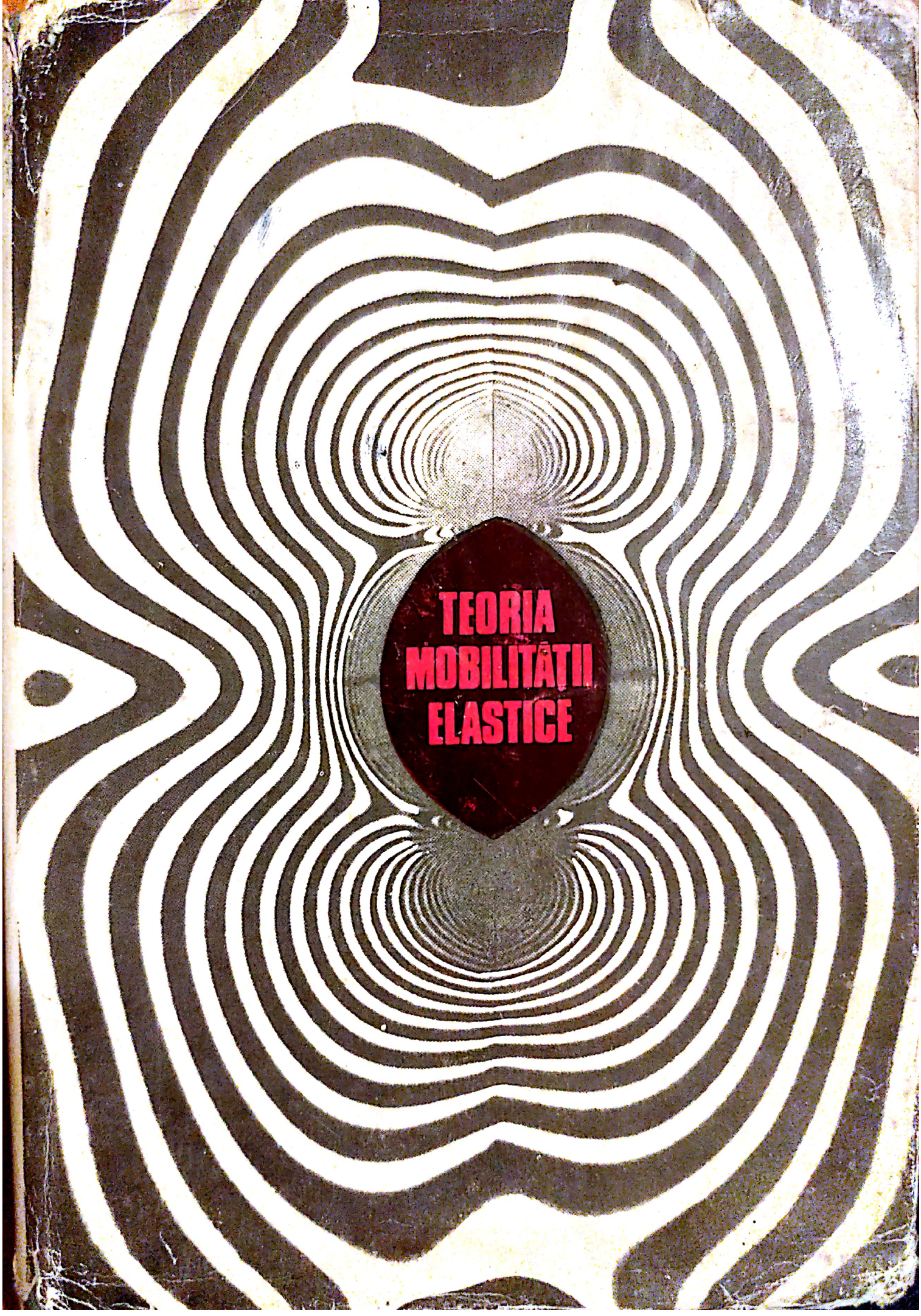


Scanned with OKEN Scanner

TEORIA MOBILITĂȚII ELASTICE

Autorul este un nume binecunoscut în literatura de specialitate, datorită valoroaselor sale rezultate obținute în cercetare și publicate într-o serie de lucrări apărute în diverse reviste de specialitate din țară cît și de peste hotare, precum și în monografia: *Mecanica mediilor deformabile. Fundamentele elasticității deformabile*, editată tot în cadrul Editurii Academiei Republicii Socialiste România în anul 1967.

În acest volum, ing. M. MIȘICU expune detaliat elementele necesare însușirii teoriei și a metodelor de calcul mai riguroase în scopul obținerii soluțiilor efective ale elasticității unor structuri de largă utilizare avînd forma unor plăci pline sau cu goluri diferite, stratificate, pe piloți, reticulate, în cadre etc., care prezintă grade de mobilitate internă și externă determinate. De asemenea, se prezintă o serie de rezultate finale sub formă de formule, diagrame și tabele în care se prezintă variația tensiunilor în zonele de solicitare maximă.

TEORIA MOBILITĂȚII ELASTICE

Scanned with OKEN Scanner

M. MIŞICU

TEORIA MOBILITĂŢII ELASTICE

PROBLEMA TRANSVERSALĂ ŞI MEDIANĂ A PLĂCILOR

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
Bucureşti, 1972

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

În această lucrare sînt expuse elemente detaliate necesare însușirii teoriei și metodelor de obținere a soluțiilor efective ale elasticității unor structuri de largă utilizare, avînd forma unor plăci pline sau cu goluri diferite, stratificate, pe piloți, reticulare, în cadre etc., care prezintă grade de mobilitate internă și externă determinate. Totodată sînt date rezultate finale sub formă de formule, diagrame și tabele care prezintă variația tensiunilor în zonele de solicitare maximă.

Aceste elemente au un caracter mai cuprinzător decît cele ce pot fi întîlnite în literatura de specialitate în sensul că, datorită formulării unor probleme mai generale decît cele tratate în forma clasică, soluțiile ce se obțin răspund la o gamă mai variată de situații ce pot interveni efectiv în practică. Această extindere se referă atît la cîmpul de tensiuni interne, cît și la structura materială. Astfel, bazele teoretice elaborate de autor în capitolul introductiv duc pînă la ultimele consecințe semnificația tensiunilor interne, ceea ce duce la revizuirea legilor lui Hooke ale elasticității care pun în corespondență tensiunile cu deformațiile corpului. Corespondența rezultată include în plus rotațiile particulelor interne sau ale elementelor constitutive ale structurii (noduri, granule incorporate, armături etc). Totodată formularea dată de autor problemei transversale constituie o analiză aprofundată a efectelor de lunecare în structuri în formă de plăci cu straturi aplicate pe fețele laterale cu armături. De asemenea, prin enunțarea problemei mediane se aprofundează studiul cîmpului elastic plan cu considerarea efectelor transversale plăcilor.

De remarcat că aceste aspecte nu se datorează introducerii unor mărimi fizice noi, ci unei rigori sporite a analizei avînd rolul de a înlătura erorile admise în cadrul formulărilor cunoscute ale teoriei clasice. Faptul că sfera de aplicație apare mult lărgită este o consecință a analizei mai atente a condițiilor de echilibru pe contur, motiv pentru care formulările păstrează nota de simplitate a teoriei clasice. În acest fel, pornind de la un punct de vedere structural, se reașează schemele clasice pe o bază mai riguroasă. Ca urmare a acestuia, prin utilizarea aparatului de calcul de mare efi-

Scanned with OKEN Scanner

cienţă al funcţiilor de variabilă complexă şi a transformărilor conforme, se obţin rezultate simple pentru forme complexe de plăci. Implicit se completează lacune existente relative la o serie de cazuri interesînd în mod special tehnica.

Limitarea expunerii la tematica menţionată a fost adoptată în scopul adîncirii aspectelor noi tratate şi a unei exemplificări mai ample, corespunzătoare necesităţilor care apar în practică în legătură cu problemele dezvoltate. Alte elemente, de importanţă aplicativă şi teoretică, vor fi înscrise în cadrul unei monografii ulterioare de asemenea cu caracter de sine stătător. Sînt însă de asemenea incluse sub o formă concentrată, fundamentele elasticităţii structurale elaborate de autor în scopul analizei cîmpului de tensiune cu structuri mai complexe şi care recurg la mărimi fizice adiţionale. În acest cadru se expun de asemenea formulări şi exemple de rezolvare pentru aceeaşi problemă la limită ca şi cele anterioare.

Materialul prezentat include în mod natural teoria clasică la care se poate reduce nemijlocit, fapt care conferă lecturii acelaşi interes ca şi în cazul unei monografii referitoare la această teorie. Sub acest raport cartea se adresează simultan atît specialiştilor în domeniul mecanicii, cît şi tehnicienilor şi studenţilor.

Lectura diferitelor capitole poate fi efectuată şi în mod independent, putînd totodată omite anumite paragrafe destinate unor dezvoltări cu caracter auxiliar. În acest mod, datele necesare calculului pot fi urmărite direct.

M. MIŞICU

Scanned with OKEN Scanner

Tabla de materii

Partea I

Elasticitatea tensională

Pag.

Capitolul I. **Teoria generală liniară a elasticității mediilor continui cu interacțiuni interne de tip tensiuni** . . . 15

A. **Cîmpul cinematic și dinamic asociat modelului tensional** 18

§ 1. Sisteme de referință 18, § 2. Distorsiuni 20, § 3. Condiții de compatibilitate cinematice 25, § 4. Tensiuni și forțe de masă 26.

B. **Ecuații generale** 28

§ 5. Modelul mecanic al mediului continuu cu interacțiuni interne de tip tensiuni (modelul tensional) 28, § 6. Principiul conservării energiei 29, § 7. Principiul conservării entropiei 32, § 8. Legea lui Fourier a conductibilității termice 33, § 9. Ecuațiile de mobilitate 33, § 10. Ecuații diferențiale 37, § 11. Ecuațiile elasticității tensionale cu mobilitate de tip polar 38, § 12. Aproximația de lungime de undă scurtă 42, § 13. Latice cu mase concentrate la noduri și efectul de polarizare inerțială 45, § 14. Placa plină pe piloți elastici și efectul de cuplaj polar 48; § 15. Condiții de compatibilitate ale tensiunilor pentru modelul tensional cu mobilitate de tip polar 50.

Capitolul II. **Elemente privind funcții de variabilă complexă și transformări conforme pentru rezolvarea problemelor la limită ale teoriei elasticității tensionale cu mobilitate internă de tip polar** 53

§ 16. Domenii de determinare a funcțiilor de reprezentare 53, § 17. Elemente generale ale transformării conforme 56, § 18. Transformarea conformă pe un contur circular și coordonate curbilinii 59, § 19. Funcții

de transformare conformă pe cercul unitate pentru studiul concentrării tensiunilor în jurul golurilor 61, § 20. Seriile Fourier complexe 67, § 21. Unele proprietăți ale integralei de tip Cauchy 70, § 22. Unele aspecte privind utilizarea funcțiilor analitice generalizate 74,

Capitolul III. Problema transversală 77

A. Formularea problemei transversale 77

§ 23. Ecuațiile fundamentale ale problemei transversale 77, § 24. Semnificația fizică a problemei transversale 86, § 25. Constrîngerile laterale 92, § 26. Reprezentarea complexă a soluțiilor 93, § 27. Determinarea funcțiilor de reprezentare 95, § 28. Utilizarea transformărilor conforme 96, § 29. Utilizarea transformărilor conforme și seriilor de puteri 97, § 30. Formularea complexă a condițiilor la limită 99,

B. Exemple de rezolvare a problemei transversale 100

§ 31. Cîmp unidimensional de lunecare 100, § 32. Lunecare într-o placă de formă circulară 100, § 33. Placă eliptică 104, § 34. Placă avînd conturul în formă de triunghi echilateral 106, § 35. Placă dreptunghiulară 109, § 36. Placă inelară circulară 115, § 37. Placă mărginită de o epitrohoidă 119, § 38. Placă avînd secțiunea transversală mărginită de o curbă în forma lemniscatei lui Booth 121,

C. Concentrarea tensiunilor în jurul golurilor 122

§ 39. Studiul soluțiilor în cazul domeniilor multiplu conexe 122, § 40. Cîmp cilindric de lunecare 125, § 41. Cîmp de lunecare compusă 130, § 42. Placă dreptunghiulară avînd un gol 134, § 43. Placă triunghiulară cu gol interior 138, § 44. Plăci cu gol circular consolidat de o nervură 142, § 45. Problema transversală neomogenă 151.

Capitolul IV. Problema mediană 153

A. Formulările generale ale problemei mediane 154

§ 46. Ecuațiile fundamentale ale problemei mediane 154, § 47. Interpretarea fizică a soluțiilor problemei mediane 155, § 48. Condițiile la limită ale problemei mediane 158, § 49. Cîmpul elastic tensional în jurul unui punct 159, § 50. Funcții de tensiune 163, § 51. Reprezentarea soluțiilor problemei mediane cu ajutorul funcțiilor de variabilă

Scanned with OKEN Scanner

complexă 164, § 52. Reprezentări complexe pentru tensiuni 165, § 53. Vector și moment principal 168, § 54. Determinarea funcțiilor de reprezentare în cazul domeniului simplu conex 170, § 55. Formulele de reprezentare în cazul domeniilor multiplu conexe 172, § 56. Funcțiile de reprezentare într-un domeniu infinit 176, § 57. Reprezentări în coordonate rectangulare 179, § 58. Reprezentări în cazul coordonatelor polare 181, § 59. Transformarea reprezentărilor problemei mediane 182, § 60. Condițiile la limită în domeniul transformat 184, § 61. Distorsiune multiformă și dislocație 185,

B. Soluții ale problemei mediane obținute cu ajutorul reprezentărilor complexe 188

§ 62. Soluția primei probleme fundamentale pentru cerc 188, § 63. Soluția celei de-a doua probleme fundamentale pentru cerc 191, § 64. Soluția primei probleme fundamentale pentru planul infinit cu un gol circular 192, § 65. Întinderea plăcii cu gol circular într-o singură direcție mediană 195, § 66. Placă cu gol circular supusă la întindere unitransversale 198, § 67. Placă cu gol circular supusă la întindere în două direcții 199, § 68. Presiune uniformă normală pe conturul golului circular al plăcii 199, § 69. Placă având un gol circular al cărui contur este acționat cu o forță 200, § 70. Cuplul concentrat 202, § 71. Forțe concentrate în general 203, § 72. Placă infinită cu o incluziune din alt material 207, § 73. Placă întinsă cu incluziune introdusă liber sau prin constrîngere 208, § 74. Întinderea plăcii cu incluziune elastică 211, § 75. Prima problemă fundamentală pentru coroana circulară 215, § 76. Diferite cazuri de încărcare ale coroanei circulare 220, § 77. Încovoierea plăcii circulare 226,

C. Tensiuni de temperatură 228

§ 78. Ecuațiile termoelasticității tensionale 228, § 79. Tensiuni din temperatură în coroana circulară 231,

D. Soluții obținute cu ajutorul transformărilor conforme 233

§ 80. Soluția generală 233, § 81. Prima problemă fundamentală pentru elipsă 240, § 82. Reducerea problemei mediane la ecuații funcționale, în cazul unui mediu interacționînd cu un rigid 245, § 83. Soluția primei probleme fundamentale pentru planul infinit cu gol eliptic 252, § 84. Întinderea plăcii cu gol eliptic 257, § 85. Placă având un gol eliptic pe conturul căruia se aplică o presiune hidrostatică 264, § 86. Gol eliptic având un contur supus unor tensiuni tangențiale uniforme 266, § 87. Gol eliptic parțial acționat cu o presiune uniformă 267, § 88. Întinderea plăcii cu un gol având forme diferite într-o singură direcție mediană 268, § 89. Întinderea mediană în placa având un gol în formă

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

de pătrat 269, § 90. Întinderea transversală a plăcii cu gol în formă de pătrat 275, § 91. Întinderea mediană a plăcii cu gol triunghiular 276, § 92. Întinderea transversală în placa cu gol triunghiular 279, § 93. Întinderea mediană a plăcii cu un gol avînd un contur curbiliniu în două direcţii mediane 280, § 94. Lunecare în placa avînd un gol 283.

E. Soluţii în problema dinamică mediană 285

§ 95. Ecuaţii şi reprezentări fundamentale 285, § 96. Perturbări mobile 289, § 97. Presiune cu caracter impulsiv aplicată într-un punct mobil pe suprafaţa unui semiplan 291, § 98. Dislocaţie mobilă 292.

Partea a II-a

Elasticitate polară

Capitolul V. Medii cu neomogeneitate structurală ca modele ale teoriei mobilităţii elastice generalizate (spectrale) 297

A. Reducerea ecuaţiilor mediului cu neomogeneitate structurală la teoria modelelor spectrale 297

§ 99. Cîmp elastic cvasiperiodic 297, § 100. Condiţiile de compatibilitate ale componentelor spectrale cinematice 300, § 101. Condiţiile de mobilitate dinamice pentru componentele spectrale 302, § 102. Analiza parametrică a modelului spectral 305, § 103. Condiţii şi probleme la limită pentru modelul spectral de tip neomogen 311, § 104. Echivalenţa modelului spectral (avînd neomogeneitate cvasiperiodică) cu unele structuri reale 311, § 105. Echivalenţa structurilor reticulare cu modelul spectral avînd polaritate restrînsă 314.

B. Formularea problemei mediane a modelului spectral 322

§ 106. Problema mediană a modelului spectral polar 322, § 107. Condiţii de compatibilitate pentru modelul spectral polar 323, § 108. Reprezentări prin potenţiali în cadrul problemei mediane (plane) a modelului spectral polar 324, § 109. Formularea complexă a deplasărilor şi rotaţiilor pentru modelul spectral polar 326, § 110. Formularea complexă a tensiunilor şi cuplelor de tensiune pentru modelul spectral polar 328, § 111. Corelaţia funcţiilor de reprezentare şi de tensiune 331.

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

C. Studiul concentrării tensiunilor în jurul golurilor cu neomogeneitate structurală 334

§ 112. Placa plană cu gol circular 334, § 113. Soluții particulare pentru planul cu gol circular 338, § 114. Încovoierea consolei cu slăbire circulară 342, § 115. Gol circular rigidizat de inele concentrice elastice 346,

D. Soluții obținute prin transformări conforme 352

§ 116. Aplicarea metodei transformărilor conforme ecuației lui Helmholtz din teoria polară a elasticității 352, § 117. Concentrarea tensiunilor și cuplelor de tensiune în jurul golurilor de contur eliptic, triunghiular și pătrat 361,

E. Soluții obținute cu ajutorul potențialilor de tensiune și cuple de tensiune 365

§ 118. Incluziune cilindrică într-un cîmp uniaxial de tensiune 365, § 119. Incluziune cilindrică 369,

F. Semiplanul elastic sub acțiunea unor sarcini normale sau tangențiale . . . 379

§ 120. Transformata Fourier a ecuațiilor fundamentale 379, § 121. Metode de determinare a tensiunilor și cuplelor de tensiune 386, § 122. Sarcină tangențială distribuită discontinuu 390, § 123. Stampă plană aplicată pe semiplanul elastic 393,

G. Sfertul de plan elastic 400

§ 124. Aplicarea transformatei Mellin 400, § 125. Valori asimptotice asociate problemelor la limită 403, § 126. Determinarea tensiunilor și cuplelor de tensiune 406.

Bibliografie 409

Theory of elastic mobility of solids (Abstract) 421

Contents 423

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA I

Elasticitatea tensională

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

Teoria generală liniară a elasticităţii mediilor continui cu interacţiuni interne de tip tensiuni

În acest capitol se dezvoltă elementele fundamentale ale teoriei liniare a elasticităţii pe baza descrierii interacţiunilor interne ale corpurilor cu ajutorul unei singure categorii de mărimi şi anume cu ajutorul tensiunilor. Aceste elemente decurg din aplicarea principiilor mecanicii şi anume a legilor de conservare a energiei, masei şi entropiei. Spre deosebire de teoria clasică a elasticităţii, se evită impunerea unor restricţii ca de exemplu condiţia ca procesele elastice să nu fie influenţate de deplasările corpului nedeformat, luat ca un rigid. În consecinţă se deduce că potenţialul elastic are o formă mai complexă căreia îi corespund legi de mişcare mai generale decît cele cunoscute, legi care exprimă atît condiţiile de echilibru ale cîmpului de tensiuni, cît şi ecuaţiile constitutive de legătură între componentele acestui cîmp şi mişcările de natura unor deformaţii, rotaţii şi deplasări şi acceleraţiile respective ale particulelor corpului. Amîndouă aceste categorii de legi apar reunite într-un singur grup de ecuaţii pe care le denumim ecuaţii de mobilitate externă şi internă. În cadrul acestor ecuaţii, forţele de masă au o semnificaţie mai largă, în care se poate include descrierea unor efecte speciale ca de exemplu interacţiunea cu un cîmp extern mecanic (prin cuplaje intermediare) sau nemecanic (prin magnetism, gravitaţie etc.). De asemenea sînt considerate momentele produse de această interacţiune, cît şi cele datorite inerţiei de rotaţie a particulelor şi răsucirii produse de componentele tangenţiale (antisimetrice) ale tensorului tensiunii. Efectele corespunzătoare au fost denumite *polarizare de cuplaj, inerţială şi tensională.*

Pentru a delimita caracterul elastic al proceselor mecanice considerate, s-a admis restricţia constînd în impunerea condiţiei de reversibilitate a mişcării conform căreia decurg legile menţionate mai sus. Ca urmare, se pun în evidenţă următoarele mărimi care caracterizează corpul elastic asociat, denumit *modelul elastic tensional*:

1) Tensorul tensiunii avînd nouă componente în general distincte şi deci asimetric în raport cu indicii. Asimetria este, după cum apare mai sus, determinată atît de un efect de polarizare inerţială constînd în producerea unor acceleraţii de rotaţie a particulelor, cît şi de un efect de cuplaj polar datorit momentelor din legăturile cuplajului mecanic.

2) Reacţiunile de cuplaj care sînt de natura unor forţe de masă şi sînt egale cu rezultanta tensiunilor şi forţelor de inerţie aplicate elementului de volum.

Scanned with OKEN Scanner

3) Deplasările particulelor determinînd apariţia unor forţe de inerţie şi cuplaj (în legăturile cu exteriorul).

4) Distorsiunile constînd în deformaţii şi rotaţii interne determinînd apariţia unor momente de inerţie şi cuplaj (în legăturile cu exteriorul).

5) Legile de mobilitate care exprimă dependenţele dintre elementele menţionate mai sus şi care descriu totodată mişcarea corpului.

Semnificaţia concretă a modelului tensional poate fi pusă în evidenţă în diferite cazuri. Astfel plăcile pe piloţi, reţele de bare sau cadrele regulate cu mase concentrate la noduri şi legate cu diafragme exterioare, aflate în echilibru static sau supuse unor vibraţii staţionare, sînt, în limite de valabilitate stabilite, corpuri a căror comportare mecanică este descrisă de modelul tensional. Analiza cîmpului elastic (compus din ansamblul de mărimi menţionate mai înainte) care apare în asemenea structuri este elaborată în acest capitol utilizînd un procedeu de dezvoltare a funcţiilor asociate mărimilor mecanice în serii de puteri ale unui parametru mic care se poate pune în evidenţă pentru asemenea structuri. Precizia descrierii cîmpului elastic cu ajutorul modelului tensional depinde de mărimea acestui parametru.

Menţionăm totodată posibilitatea utilizării modelului tensional şi pentru anumite categorii de corpuri cristaline la care efectele de rotaţie ale atomilor din nodurile reţelei cristaline prezintă trăsături comune cu cele puse în evidenţă. În acest sens precizăm că asemenea reţele se modifică sub acţiunea unor forţe de atracţie şi respingere interne cît şi sub acţiunea forţelor aplicate din exterior. Rezultă anumite mişcări ale atomilor ce pot fi descrise prin anumite ecuaţii de mişcare—de exemplu sub forma unor ecuaţii cu diferenţe finite de mărimi. În cazul în care mişcările sînt destul de mici, ecuaţiile pot fi transpuse sub formă diferenţială. De aici, printr-o analiză parametrică de tipul celei menţionate anterior, se poate trece la un model de tip tensional. Pentru corpurile reale, determinarea valorilor numerice ale constantelor fizice ale modelului tensional asociat poate fi însă mai bine făcută pe cale experimentală, aspect asupra căruia nu ne vom opri.

Aplicaţiile care se dezvoltă în capitolele următoare privesc îndeosebi efectele de concentrare ale tensiunilor în jurul golurilor. Este cunoscut faptul că asemenea efecte care au un caracter local, în zone cu dimensiuni foarte mici, sînt afectate de natura materialului. Experienţele indică o abatere faţă de rezultatele teoriei clasice. Pentru acest motiv apare necesitatea considerării unor aspecte de structură astfel cum apare, într-o oarecare măsură, şi în teoria mai simplă elaborată în acest capitol.

Remarcăm că fenomenul de mobilitate a corpurilor are în sine o semnificaţie mult mai generală decît aceea circumscrisă prin prezenta lucrare. Astfel, studiul mişcării corpurilor deformabile într-un mediu ambiant fluid, pulverulent sau solid comportă aspecte particulare studiate în literatura de specialitate, dar nu sînt subsumate unor discipline unitare, de sinteză. De asemenea, nu sînt grupate într-o analiză unitară studiile

Scanned with OKEN Scanner

privind diferite fenomene de mobilitate internă de natura curgerii plastice, fisurării, compactării, dislocației etc., care de asemenea constituie aspecte particulare. În acest sens, unele cercetări pe linia elaborării unei teorii generale ale mobilității au fost efectuate recent de autor [16], [17].

Pentru o situare în cadrul mecanicii continuului dăm mai jos o serie de elemente istorice.

Modelul clasic al mediului continuu, astfel cum apare în studiile mecanicienilor din secolul trecut (A. L. Cauchy, G. Green, L. Euler etc.), este caracterizat printr-un număr de șase componente ale tensorului deformației sau al tensorului simetric al tensiunii. Cu ajutorul acestui model, teoria elasticității, plasticității sau a viscozității furnizează rezultate ce permit determinarea satisfăcătoare a comportării mecanice a corpurilor utilizate în tehnică, exceptînd unele cazuri menționate în parte mai sus.

Modelul caracterizat prin nouă componente ale tensorului asimetric al tensiunilor sau prin nouă componente ale tensorului distorsiunilor, astfel cum a fost considerat de E. și F. Cosserat, implică și existența unei stări interne de solicitare caracterizată prin cuple de tensiune aplicate pe suprafețele elementelor de volum ale corpului. Acest model a fost parțial analizat de către P. Duhem [1] și W. Voigt [1] sub forma unui mediu orientat, conceput ca un ansamblu de vectori (în număr de trei în studiile acestor autori) cu lungimi și orientări variabile în cursul mișcării. Teoria mediilor orientate a fost reluată și extinsă de I. Ericksen și C. Truesdell [1], apoi de către A. E. Green, R. S. Rivlin [1], [2], A. E. Green și P. M. Naghdi [1], [2].

Alcătuirea complexă a materialelor reale și structurilor tehnice conduce însă la ideea elaborării unor modele complexe denumite multipolare și structurale, astfel cum apar în lucrările independente elaborate de R.S. Rivlin [2], A. E. Green [81] și R. S. Rivlin [1], [2], R. D. Mindlin [3], [4] și de autor [5] sau micromorfice conform denumirii adoptate de A. C. Eringen [1], [6]. O altă categorie de modele sînt cele eterogene astfel cum apar în lucrările lui A. C. Eringen și I. D. Ingram [1], A. E. Green, P. M. Naghdi [1], [2] și ale autorului [7]—[8], în formulări independente care sînt subsumate celor din această carte. Corespondentul fizic al unor asemenea materiale îl constituie de exemplu materialele policristaline a căror organizare poate cuprinde mai multe faze materiale componente. Considerarea unor asemenea modele conduce la definirea unor efecte mecanice mai complexe, de natura unor interacțiuni (cuplaje) sau a unor mișcări relative între diferitele componente materiale ale corpului.

Asemenea modele s-au definit concomitent cu completarea teoriei modelului de tip Cosserat (incluzînd ecuațiile constitutive diferențiale de mișcare și elaborarea unor metode de rezolvare). Astfel menționăm teoria relativă la un cîmp de rotații constrînse (dezvoltată de G. Grioli [1] și R. D. Mindlin și H. F. Tiersten [1], R. A. Toupin [1]—[3]), restrînse (E. L. Aero, H. F. Kuvșinski [1], [2], V. A. Palmov [1]), [2]), sau

cu stare polară (rotații), completă în sensul considerat în cele ce urmează și pe linia unei lucrări anterioare [7], [8], ale autorului.

Analiza mai detaliată a efectelor de cuplaj a fost elaborată în cartea autorului [9] și în cea de față. Efectele de interacțiune ale componentelor materiale în mediile structurale conduc la posibilitatea formulării principiului dualității modelelor mecanice, între cîmpul cinematic și cel dinamic apărînd o simetrie formală rezultată în urma stabilirii unor noi legi ale mișcării cu caracter dual. Aceste efecte sînt analizate în lucrările autorului [10], [11].

În scopul unei analize mai precise ale structurilor discrete (cristale) sau a celor cu dimensiuni foarte mari s-au dezvoltat teorii noi care pot fi grupate precum urmează:

— Teorii *nelocale* ale cristalelor periodice bazate pe o teoremă cunoscută din teoria informației care permite transformarea unui cîmp discontinuu de mărimi într-un cîmp continuu fără introducerea unor erori cu ajutorul transformării Fourier (I. A. Krumhansl [1], I. A. Kunin [1], [2]) sau bazate pe funcțiile potențial de tip Green ale cristalelor periodice (E. Kröner [4], E. Kröner și B. K. Datta [2]).

— Teorii de *interpolare* ale structurilor oarecari bazate pe interpolarea funcțiilor care descriu mărimi discrete pe cale funcțională și integrală, elaborată de autor [12], [13].

— Modele *spectrale* ale corpurilor bazate pe descompunerea cîmpului de mărimi mecanice în componente asociate anumitor legi de variație ale acestora (sau anumitor numere de undă). Asemenea modele permit analiza unor structuri cu o alcătuire oarecare și studiul unor probleme la limită ale elasticității tensionale ca de exemplu al plăcilor de formă oarecare. Asemenea modele au fost propuse și dezvoltate de autor [14], [15].

Elementele acestor teorii nu formează obiectul acestei cărți. Cu toate acestea, în ultimele capitole vor fi expuse unele aspecte corelate cu conținutul capitolelor anterioare situate pe linia unor extinderi în spiritul studiilor citate. De asemenea sînt dezvoltate, după cum s-a menționat, elementele teoretice, aplicative privind modelul tensional, sprijinite pe studiul elaborat de autor anterior [16].

A. Cîmpul cinematic și dinamic asociat modelului tensional

§ 1. Sisteme de referință

În scopul descrierii poziției particulelor materiale la orice moment al mișcării, se raportează această poziție la un punct O considerat fix în spațiu și la un sistem de axe de referință Ox, Oy, Oz pe care, în cele ce

urmează, îl vom presupune cartezian, axele formînd între ele unghiuri drepte. Variabilele coordonate se vor scrie în notație tensorială x_i, $i = 1,2,3$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

În vederea simplificării analizei mișcării, vom limita studiul la considerarea a numai două momente ale mișcării în locul întregului ansamblu de momente real. Aceste momente vor fi următoarele :

— Momentul inițial t_0 sau zero care corespunde unor particule situate în poziții inițiale avînd coordonatele carteziene X_α, ($\alpha = 1,2,3$; $X_1 = x^0$, $X_2 = y^0$, $X_3 = z^0$) și unei stări inițiale sau *materiale* a corpului.

— Momentul actual $t = \tau$ pentru care pozițiile particulelor sînt date de coordonatele actuale carteziene x_i și corespund unei stări actuale sau *spațiale* a corpului.

Între sistemele actual și inițial de coordonate vom presupune o dependență continuă și biunivocă (inversabilă)

$$x_i = x_i(x_\alpha^0). \tag{1}$$

Timpul t avînd valoarea τ fixă, a fost omis în scrierea acestor dependențe. Pentru o asemenea dependență, iacobianul transformării de coordonate trebuie să fie pozitiv și nenul

$$|x_{i,\alpha}| \neq 0, \quad > 0. \tag{2}$$

S-au utilizat notațiile gradienților mișcării

$$x_{i,\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \tag{3}$$

și am admis, ca și în continuare, derivabilitatea funcțiilor coordonate pînă la un ordin suficient de mare.

Mișcarea descrisă de transformarea (1) este continuă, fără salturi sau interpătrunderi ale particulelor materiale. Transformarea (1) în care timpul nu apare în mod explicit se numește *convectată*. Este clar că ecuațiile $X_\alpha = \text{const.}$ corespund unor suprafețe *materiale* pe care sînt situate particule ale corpului la momentul inițial. Prin transformarea de coordonate (1) aceste suprafețe sînt convectate în alte suprafețe pe care sînt situate aceleași particule dar la un moment actual.

Prin diferența variabilelor coordonate actuale și inițiale se obțin componentele *vectorului deplasării*,

$$u_i = x_i - \delta_{i\alpha} X_\alpha, \tag{4}$$

$\delta_{i\alpha}$ fiind simbolul lui Kronecker de substituție între sistemele de referință actual și inițial și anume fiind egal cu 1 pentru $i = \alpha$ și zero dacă i este diferit de α. În alți termeni deplasările au expresiile

$$u_1 = u = x - x^0, \quad u_2 = v = y - y^0, \quad u_3 = w = z - z^0. \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

În (4) considerăm legea de sumare einsteiniană a indicilor repetați ($a_\alpha b_\alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$).

Pe linia notațiilor utilizate, vom mai putea introduce în locul indicilor $i = 1,2,3$, indicii x,y,z, cu semnificație echivalentă. Această convenție are rolul de a da o formulare mai sugestivă anumitor mărimi.

§ 2. Distorsiuni

Prin diferențierea termenilor dependenței (1) din § 1 se obține o legătură între diferențialele variabilelor coordonate și gradienții acestora

$$\mathrm{d}x_i = x_{i,\alpha}\,\mathrm{d}X_\alpha . \tag{1}$$

Considerînd atunci două poziții învecinate de coordonate inițiale X_α și $X_\alpha + \mathrm{d}X_\alpha$, va rezulta, conform dependenței (1) din § 1, dependența

$$\mathrm{d}u_i = \mathrm{d}x_i - \delta_{i\alpha}\,\mathrm{d}X_\alpha = a_{i\alpha}\,\mathrm{d}X_\alpha \tag{2}$$

în care intervin componentele tensorului distorsiunii

$$a_{i\alpha} = x_{i,\alpha} - \delta_{i\alpha} = u_{i,\alpha} . \tag{3}$$

În cazul unei deplasări infinitezimale, relația (4) din § 1 va arăta că variabilele coordonate actuale și inițiale diferă prin valori foarte mici, astfel că în operațiile de derivare vom putea înlocui indicele α cu i :

$$(\ \ )_{,\alpha} = \delta_{\alpha i}\frac{\partial(\ \ )}{\partial(x_i - u_i)} \cong \delta_{\alpha i}(\ \ )_{,i} \tag{4}$$

În acest caz, relația (3) se mai scrie astfel :

$$\alpha_{ij} = x_{i,j} - \delta_{ij} = u_{i,j} . \tag{5}$$

Se poate constata că distorsiunea poate fi exprimată cu ajutorul a doi tensori și anume a tensorului simetric al deformației și antisimetric al rotației

$$e_{ij} = a_{(ij)} = (a_{i,j} + a_{j,i})/2 = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$$

$$\omega_{ij} = -a_{[ij]} = -(a_{j,i} - a_{i,j})/2 = (u_{j,i} - u_{i,j})/2 =$$

$$= e_{ijk}\,\omega_k , \quad \omega_k = \frac{1}{2}e_{ijk}\,\omega_{ij} \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$e_{xx} = u_{,x}, \quad e_{yy} = v_{,y}, \quad e_{zz} = w_{,z}, \quad e_{xy} = (u_{,y} + v_{,x})/2 = e_{yx},$$

$$e_{yz} = (v_{,z} + w_{,y})/2 = e_{zy}, \quad e_{zx} = (w_{,x} + u_{,z})/2 = e_{xz}, \tag{7}$$

$$\omega_x = \omega_{yz} = -\omega_{zy} = (w_{,y} - v_{,z})/2, \quad \omega_y = \omega_{zx} = -\omega_{xz} = (u_{,z} - w_{,x})/2,$$

$$\omega_z = \omega_{xy} = -\omega_{yx} = (v_{,x} - u_{,y})/2.$$

S-a notat tensorul de permutare:

$$e_{ijk} = 1 \text{ pentru o permutare } \begin{pmatrix} i\,j\,k \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix} \text{ pară}; \tag{8}$$

$= 1$ „ „ „ „ impară;

$= 0$ pentru cel puțin doi indici egali.

În definitiv distorsiunea se exprimă astfel

$$u_{i,j} = e_{ij} - \omega_{ij}. \tag{9}$$

Cu ajutorul mărimilor introduse se poate exprima elementul de lungime în cazul aflat într-o stare actuală de mișcare. Pentru aceasta vom forma expresiile bazate pe relația (1):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \delta_{ij}\, dx_i\, dx_j = g_{\alpha\beta}\; dX_\alpha\, dX_\beta \tag{10}$$

în care intervine tensorul fundamental

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{i,j}\, x_{i,\alpha}\, x_{j,\beta}. \tag{11}$$

Conform relației (3) avem însă

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{ij}\,(u_{i\alpha} + \delta_{i\alpha})\,(u_{j,\beta} + \delta_{j\beta}) = 2\,\varepsilon_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} \tag{12}$$

în care am ținut seama de relațiile $\delta_{ij}\,\delta_{i\alpha}\,\delta_{j\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ și am introdus un nou tensor al deformației care, conform relației (4), se scrie astfel

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}\,u_{k,j} + u_{k,j}\,u_{k,i}). \tag{13}$$

Este clar că în cazul în care gradienții deplasării sînt foarte mici, astfel că produsul acestora să fie neglijabil în (13), acest din urmă tensor coincide cu (6). Prin urmare, în cadrul unei teorii infinitezimale, în raționamentele

Scanned with OKEN Scanner

efectuate asupra formei pătratice (10), coeficienții (12) vor putea fi identificați cu (6). În acest sens se observă că în cazul unidimensional, (10) se scrie astfel

$$\frac{dx}{dx^0} = \sqrt{1 + 2\varepsilon} \cong 1 + \varepsilon \tag{14}$$

și deci

$$\varepsilon = \frac{dx - dx^0}{dx^0} \tag{15}$$

reprezintă alungirea de-a lungul axei Ox. Prin urmare ε_{xx} reprezintă deformația în sensul axei Ox. Pe de altă parte, se constată că vectorul (1) formează cu axele Ox, Oy unghiuri ale căror cosinuși sînt gradienții (3) din § 1. În figura 1 apare elementul deformat care inițial avea laturi pe lungul unității paralele cu axele de coordonate. Semisuma unghiurilor pe care laturile Oy și Oz le formează cu axele inițiale reprezintă deformația unghiulară e_{yz}. Semidiferența acelorași mărimi reprezintă rotația dreptei care inițial era bisectoarea unghiurilor $y^0\ O\ z^0$, ceea ce apare în figura 1.

Cu ajutorul componentelor tensorului distorsiunii pot fi exprimate mărimi invariante pentru orice transformare a sistemelor de referință.

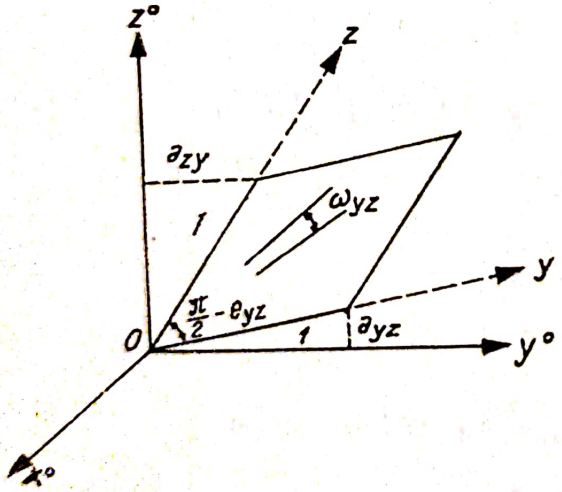


Fig. 1

Astfel intensitatea vectorului rotației

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \tag{16}$$

este invariantul care se asociază părții antisimetrice a tensorului distorsiunii. Într-adevăr, fie transformarea de coordonate carteziene

$$x_i = c_{i\alpha}\, x_\alpha \tag{17}$$

pentru care elementele de lungime

$$x_i\, x^i = c_{i\alpha}\, c_{i\beta}\, x_\alpha\, x_\beta \tag{18}$$

și unghiurile sînt păstrate.

Rezultă condițiile

$$c_{i\alpha}\, c_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta}\,. \tag{19}$$

Atunci vom avea, conform legii de transformare a vectorilor,

$$\omega_i = c_{i\alpha}\, \omega_\alpha\,. \tag{20}$$

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem că în sistemul de referință (x_α), vectorul rotitor are componentele $(\omega_1, 0,0)$. În consecință ω_1 coincide cu $\sqrt{\omega_\alpha\,\omega_\alpha}$ iar

$$\omega_i = c_{i1}\,\omega_1 \tag{21}$$

și deci, conform relațiilor (16) și (19),

$$\omega = \sqrt{\omega_i\,\omega_i} = \sqrt{\omega_\alpha\,\omega_\alpha} = \omega_1 \tag{22}$$

constituie un invariant. $c_i = c_{i1}$ reprezintă cosinușii direcției principale a rotației.

Variația în jurul unui punct a componentelor vectorului rotației este descrisă de o sferă de diametru ω care trece prin originea O și este orientat în sensul direcției principale. Proiecțiile pe axe ale acestui diametru sînt componentele rotației. Indicatoarea rotației apare în figura 2.

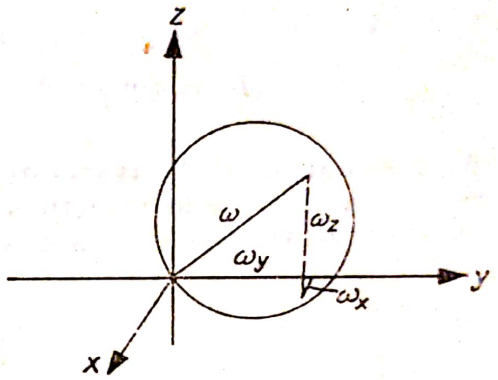


Fig. 2

În cazul tensorului deformației există un sistem de referință cartezian în care deformațiile unghiulare sînt nule. Într-adevăr, fie $c_{\alpha i}$ cosinușii directori ai unei axe a acestui sistem și deformațiile asociate $e_{\alpha i} = e_\alpha$. Va avea loc relația tensorială de transformare a componentelor deformațiilor

$$e_\alpha = c_{\alpha i}\,c_{\alpha j}\,e_{ij} \tag{23}$$

și deci înmulțind cu $c_{\alpha i}$,

$$(e_{ij} - \delta_{ij}\,e_\alpha)\,c_{\alpha j} = 0. \tag{24}$$

Pentru compatibilitate va trebui ca determinantul acestui sistem să fie nul

$$\Delta \equiv |e_{ij} - \delta_{ij}\,e| = 0 \tag{25}$$

în care $e = e_\alpha$.

Se pot arăta următoarele (M. Mișicu [9]). Rădăcinile acestei ecuații denumite *ecuația caracteristică* sau a valorilor proprii sînt invariante în raport cu transformările de coordonate, deoarece ecuația păstrează în urma acestor transformări aceeași formă. Rădăcinile ecuației caracteristice sînt reale iar vectorii proprii $c_{\alpha j}$ asociați ecuației caracteristice sînt doi cîte doi ortogonali; (25) coduce la ecuația lui Cayley-Hamilton asociată tensorului deformației

$$\Delta \equiv -e^3 + J_1\,e^2 - J_2\,e + J_3 = 0 \tag{26}$$

în care intervin mărimile

$$J_1 = I_1 = \theta = e_{ii} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz},$$

$$J_2 = (I_1^2 - I_2)/2 = e_{xx}\,e_{yy} + e_{yy}\,e_{zz} + e_{zz}\,e_{xx} - e_{yz}^2 - e_{zx}^2 - e_{xy}^2, \tag{27}$$

$$J_3 = (I_1^3 + 3\,I_1 I_2 + 2\,I_3)/3\,! = |e_{ij}| = \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{vmatrix}$$

$$(I_m = \mathrm{Sp}\,\|e_{ij}\|^m, \quad I_2 = e_{ij}\,e_{ji}, \quad I_3 = e_{ij}\,e_{jk}\,e_{ki}).$$

Aceste mărimi sînt invariante deoarece rădăcinile e sînt invariante. Direcțiile α sînt axele principale ale tensorului deformațiilor.

θ este funcția dilatării, fiind proporțională cu cîtul

$$\theta = \frac{v - V}{V}. \tag{28}$$

v reprezintă elementul de volum actual iar V elementul de volum inițial.

Într-adevăr, deoarece $V = (\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z)^0$, $v = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$, avem

$$v = V\,(1 + e_1)\,(1 + e_2)\,(1 + e_3) \cong V\,(1 + \theta), \tag{29}$$

$e_\alpha = e_{\alpha\alpha}$ fiind deformațiile normale în sensul axelor principale.

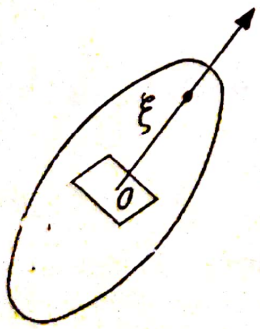


Fig. 3

Relația de forma (23) care furnizează expresia componentei normale a deformației se mai poate scrie astfel

$$\xi_i\ \xi_j\ e_{ij} = \pm\, k^2 \tag{30}$$

în care

$$\xi_i = c_i\ \xi \tag{31}$$

reprezintă componentele unui vector de lungime ξ orientat în sensul axei de cosin $c_i = c_{\alpha i}$ iar

$$e\xi^2 = \pm\, k^2, \tag{32}$$

k fiind o constantă. În spațiul coordonatelor ξ_i, ecuația (30) descrie variația în jurul unui punct al deformației și se numește cvadrica indicatorie a lui Cauchy pentru deformații. Într-adevăr, pentru a obține deformația

normală e pe suprafața de normală având cosinușii c_i, este suficient de a duce prin O o dreaptă având aceeași orientare.

Semidiametrul cuprins între O și suprafața (30) în care luăm semnul + în membrul drept este chiar ξ.

Încheiem această analiză a distorsiunilor cu observația că pe lîngă invarianții menționați anterior în relațiile (16) și (27) relativi respectiv la rotații și deformații mari, pot fi considerați următorii invarianți *)

$$u = \sqrt{u^i u_i}, \quad R = \omega^i u_i . \tag{33}$$

§ 3. Condiții de compatibilitate cinematice

Pornind de la relația (9) din § 2,

$$u_{i,j} = e_{i,j} - \omega_{ij}, \tag{1}$$

ce corelează gradienții deplasării de deformațiile e și rotațiile ω, se deduce prin integrare condiția

$$u_i = u_i^0 + \int_{x_i}^{x} (e_{ij} - \omega_{ij})\, \mathrm{d}x_j. \tag{2}$$

Pentru integrabilitate va trebui să aibe loc condiția

$$e_{ij,k} - e_{ik,j} = \omega_{ij,k} - \omega_{ik,j} . \tag{3}$$

În scopul eliminării rotațiilor vom efectua permutări circulare ale indicilor

$$e_{jk,i} - e_{ji,k} = \omega_{jk,i} - \omega_{ji,k}, \quad e_{ki,j} - e_{kj,i} = \omega_{ki,j} - \omega_{kj,i} . \tag{4}$$

Scăzînd termenii ecuației (3) din cei ai ecuațiilor (4) adunați, deducem

$$e_{ij,k} - e_{jk,i} = \omega_{ki,j} . \tag{5}$$

Adunînd termenii ecuațiilor (3) — (5) rezultă

$$\omega_{ij,k} + \omega_{jk,i} + \omega_{ki,j} = 0. \tag{6}$$

Derivînd termenii ecuației (5), deducem, aplicînd în continuare (5),

$$\omega_{ki,jl} = e_{i\ \ ,kl} - e_{jk,il} = \omega_{ki,lj} = e_{il,kj} - e_{lk,ij} \tag{7}$$

*) R nu este un invariant pentru simetriile $x \to -x$, (invariant centroasimetric).

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$e_{ij,\,kl} + e_{kl,\,ij} - e_{jk,\,il} - e_{il,\,jk} = 0. \tag{8}$$

(7) reprezintă condiția de compatibilitate a deformațiilor. Datorită proprietăților tensorilor care intervin și a repetărilor, numai nouă ecuații din (5) sînt independente.

Scrierea explicită a condițiilor (5) este următoarea

$$\begin{aligned}
&e_{xx,\,y} - e_{xy,\,x} = \omega_{yx,\,x}, \quad e_{xx,\,z} - e_{xz,\,x} = \omega_{zx,\,x}, \quad e_{yy,\,z} - e_{yz,\,y} = \omega_{zy,\,y},\\
&e_{yy,\,x} - e_{yx,\,y} = \omega_{xy,\,y}, \quad e_{zz,\,x} - e_{zx,\,z} = \omega_{xz,\,z}, \quad e_{zz,\,y} - e_{zy,\,z} = \omega_{yz,\,z},\\
&e_{xy,\,z} - e_{yz,\,x} = \omega_{zx,\,y}, \quad e_{yz,\,x} - e_{zx,\,y} = \omega_{xy,\,z}, \quad e_{zx,\,y} - e_{xy,\,z} = \omega_{yz,\,x}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Condițiile de compatibilitate pentru deformații se vor scrie astfel:

$$\begin{aligned}
&e_{xx,\,yy} + e_{yy,\,xx} = 2e_{xy,\,xy}, \quad e_{yy,\,xx} + e_{zz,\,yy} = 2e_{yz,\,yz},\\
&e_{zz,\,xx} + e_{xx,\,zz} = 2e_{zx,\,zx}, \quad e_{xx,\,yz} = (-e_{yz,\,x} + e_{zx,\,y} + e_{xy,\,z})_{,\,x},\\
&e_{yy,\,zx} = (-e_{zx,\,x} + e_{xy,\,y} + e_{yz,\,z})_{,\,y}, \quad e_{zz,\,xy} = (-e_{xy,\,z} + e_{yz,\,y} + e_{zx,\,z})_{,\,z}.
\end{aligned} \tag{10}$$

§ 4. Tensiuni și forțe de masă

Particulele materiale ale corpului se află în interacțiune reciprocă datorită forțelor care apar între acestea. Totodată pot exista interacțiuni între aceleași particule și exterior, ca de exemplu cîmpul gravific și inerțial, magnetic, sau cîmpul forțelor de cuplaj datorite unor legături materiale între corp și vectorul exterior.

Dacă ρ este densitatea corpului și forța raportată la unitatea de masă, atunci forța aplicată elementului de volum este $\rho X\,dV$. În acest mod forța totală aplicată corpului de volum V este $\int_V \rho X\,dV$.

Pentru a descrie interacțiunile de tip forță interne, procedeul uzual al mecanicii continuului constă în separarea unui element de volum V din corp, ca în figura 4, a cărui suprafață S îl delimitează de restul corpului. Orice element de suprafață dS al suprafeței S este străbătut de forțele de interacțiune între particulele din exteriorul și interiorul elementului de volum. Fie atunci $\mathbf{dF}$ rezultanta acestor forțe pe dS de natura unui vector. Notînd $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{dF}/dS$ forța de interacțiune raportată la unitatea de suprafață și considerată a fi aplicată pe partea exterioară a elementului de suprafață dS, va rezulta, în baza principiului acțiunii și reacțiunii al mecanicii, că pe zona situată pe partea interioară suprafeței dS vor apare

Scanned with OKEN Scanner

forțele — dF, respectiv — σ. Modelul astfel realizat al interacțiunilor raportate la unitatea de suprafață se va numi *tensiune*.

Pentru a preciza mărimile tensiunilor în funcție de elementul de suprafață pe care se aplică, vom recurge la un element de volum avînd

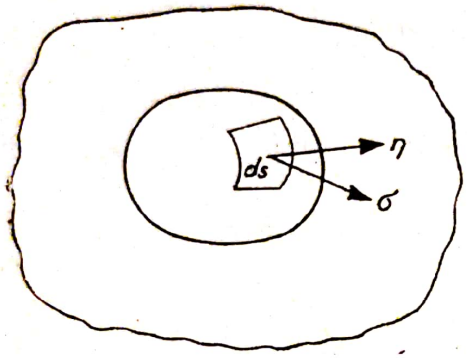


Fig. 4

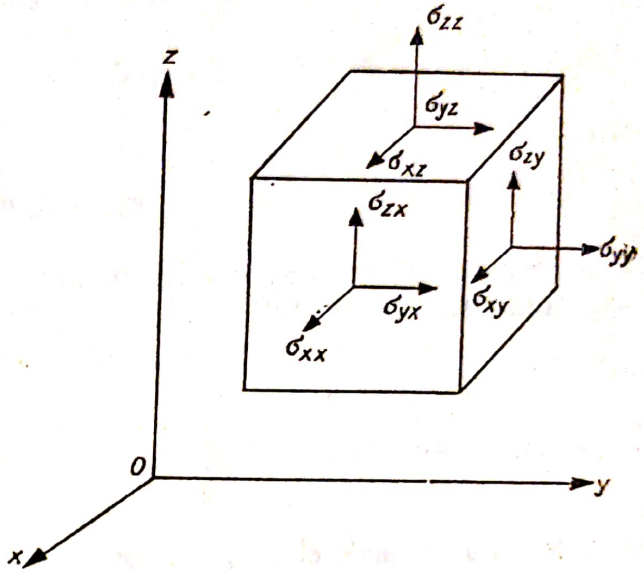


Fig. 5

o formă paralelipipedică ale cărui laturi sînt paralele cu axele de coordonate.

Proiectînd tensiunea aplicată pe fiecare față a acestui paralelipiped, ca în figura 5, se obțin, pentru cele trei fețe orientate normal la cele trei direcții ortogonale din spațiu, nouă componente care se vor nota sub forma tensorială σ_{ij}. Primul indice se referă la direcția în care este orientată componenta respectivă iar al doilea la normala la elementul de suprafață pe care se aplică. În notație dezvoltată aceste componente se vor scrie astfel

$$\begin{matrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{matrix} \qquad (1)$$

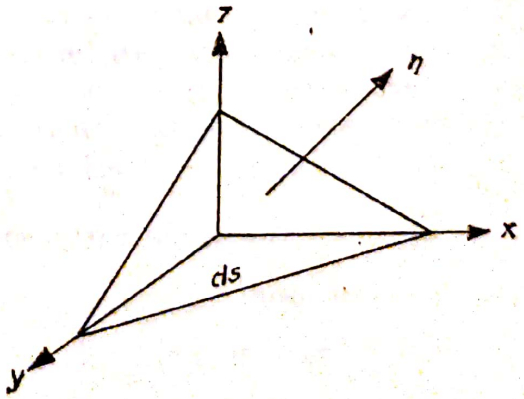


Fig. 6

Fie o suprafață de normală n care are cosinușii directori n_i. Con-

form figurii 6, proiecțiile elementului de suprafață ds pe planele coordonate sînt :

$$ds_i = n_i \, ds \tag{2}$$

și deci rezultanta tensiunilor aplicate pe fețele ds_i va avea componentele :

$$\sigma_{ij} \, ds_j = \sigma_i \, ds \tag{3}$$

în care

$$\sigma_i = \sigma_{ij} n_j \tag{4}$$

constituie, după cum apare din membrul drept al relației (2), componentele tensiunii pe suprafața ds.

B. Ecuații generale

§ 5. Modelul mecanic al mediului continuu cu interacțiuni interne de tip tensiuni (modelul tensional)

Vom utiliza în continuare modelul mecanic tensional, al mediului continuu cu interacțiuni interne de tip tensiuni. Acest model, care s-a dovedit de o mare utilitate practică, va fi însă definit sub o formă mult mai cuprinzătoare decît cea considerată pînă în prezent, deoarece se va reține ansamblul mărimilor fizice compatibile cu existența tensiunilor, ansamblu care nu a fost considerat anterior în toată complexitatea sa la nivelul teoriei acestui model. Datorită acestei extinderi, se creează posibilitatea unei mai complete analize a efectelor mecanice produse în corpuri.

Expunerea ce urmează se bazează pe principiile generale ale mecanicii și termodinamicii sub forma dată într-o serie de lucrări mai recente ale autorului [9], [16], cît și în cele ce se găsesc în literatura de specialitate, ca de exemplu în C. Truesdell și R. Toupin [1], D. C. Eringen [1] etc.

Modelul se va caracteriza cu ajutorul următoarelor mărimi :

x_i = coordonatele carteziene ale particulelor materiale ;

t = timpul ;

u_i = vectorul deplasării ;

$v_i = du_i/dt$ = vectorul vitezei ;

σ_{ij} = tensorul tensiunii;

ρ = densitatea;

X_i = forțele de volum;

X_{ij} = momentele sau cuplele de volum;

I = momentul polar de inerție al particulelor sau elementelor materiale;

ε = energia internă;

η = entropia;

ϑ = temperatura absolută;

q^i = vectorul influxului de căldură.

§ 6. Principiul conservării energiei

În formularea principiului energiei intervin următoarele mărimi adiționale care se exprimă cu ajutorul mărimilor fundamentale ale modelului mecanic definit mai înainte

$$-\rho S = X^i v_i + X^{ij} v_{i,j} \quad \text{funcția sursă a energiei;} \tag{1}$$

$$i^k = \sigma^{jk} v_j - q^k \quad \text{funcția influx a energiei;} \tag{2}$$

$$\mathcal{K} = \frac{\rho}{2}\{v^i v_i + Kv^{i,j} v_{i,j} + Lv^{i,j} v_{j,i}\} \quad \text{energia cinetică.} \tag{3}$$

Principiul energiei pentru modelul mecanic cu tensiuni interne se exprimă prin ecuația

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v (\rho\dot{\varepsilon} + \mathcal{K})\,\mathrm{d}v = \int_v \rho S\,\mathrm{d}v + \int_s i^k \mathrm{d}s_k \tag{4}$$

v fiind un volum arbitrar din corp mărginit de suprafața s, iar $\mathrm{d}s_k = n_k\,\mathrm{d}s$ proiecțiile elementelor de suprafață având normala n (n_k) pe planele coordonate. S-a utilizat notația derivatei în raport cu timpul $(\ )^{\cdot} = \mathrm{d}(\ )/\mathrm{d}t$.

Aplicînd teorema transformării integralelor de volum în integrale de suprafaţă, obţinem ecuaţia echivalentă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \rho\varepsilon\,\mathrm{d}v = \int_v \mathcal{L}\,\mathrm{d}v \tag{5}$$

în care intervine lucrul mecanic în unitatea de timp

$$\mathcal{L} = \Pi_i v_i + \Pi_{ij} v_{i,j} - q_{i,i} \tag{6}$$

şi forţele şi momentele de volum

$$\Pi_i = \sigma_{ij,j} - \rho\ddot{u}_i - X_i, \tag{7}$$

$$\Pi_{ij} = \sigma_{ij} - \rho(K\ddot{u}_{i,j} + L\ddot{u}_{j,i}) - X_{ij}. \tag{8}$$

În cazul în care este satisfăcută ecuaţia de conservare a masei

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \rho\mathrm{d}v = 0 \tag{9}$$

şi conform definiţiei volumului v, acesta este luat arbitrar de mic, ecuaţia (5) poate fi exprimată prin condiţia

$$\mathcal{L} = \rho\dot{\varepsilon}. \tag{10}$$

Se constată că funcţia $\mathcal{L}$ aproximată în (7) este invariantă pentru translaţii adiţionale t_i caracterizate de relaţia

$$v_i^* = v_i + t_i, \tag{11}$$

dacă forţele de volum Π_i sînt nule:

$$\Pi_i = 0. \tag{12}$$

Putem interpreta condiţia de invarianţă (12) a funcţiei $\mathcal{L}$ în modul următor. O translaţie rigidă a corpului nu modifică cîmpul intern de tensiuni atît timp cît prin această translaţie nu se produc eforturi în legăturile dintre corp şi obiectele exterioare, dacă asemenea legături există. Prin

urmare, dacă $\mathcal{L}$ rămîne invariantă, aceste legături nu există, forțele respective de cuplaj fiind nule. Ultima cerință poate fi identificată cu condiția (12), astfel că Π_i apar drept componentele unor *forțe* de *cuplaj* între elementele de volum ale corpului și exteriorul lui.

Vom mai considera rotațiile rigide adiționale

$$\omega^*_{ji} = \omega_{ji} + r_{ji} \tag{13}$$

în care ω_{ji} reprezintă componentele vectorului (pseudotensorului) rotației — vezi și (6) din § 2 —

$$\omega_{ij} = u_{[j,i]} = (u_{i,j} - u_{j,i})/2 \tag{14}$$

iar $r_{ij} = -r_{ji}$ componentele vectorului unei rotații rigide a corpului.

Funcția $\mathcal{L}$ din (6) va rămîne invariantă pentru această rotație dacă are loc condiția

$$\Pi_{[ij]} = (\Pi_{ji} - \Pi_{ij})/2 = 0. \tag{15}$$

Raționînd ca mai înainte, deducem că (15) reprezintă condiția de anulare a momentelor de cuplaj care apar în legăturile dintre elementele de volum ale corpului și mediul extern. $\Pi_{[ij]}$ vor reprezenta aceste *momente* de *cuplaj* în cazul cînd legăturile există.

Modelul mecanic definit mai înainte permite deci considerarea unor tipuri de interacțiuni cu exteriorul. În anumite cazuri particulare acest model prezintă un interes în studiul corpului elastic produs de aceste interacțiuni.

Privitor la componentele simetrice în raport cu indicii :

$$\Pi_{(ij)} = (\Pi_{ij} + \Pi_{ji})/2 \tag{16}$$

este de observat că acestea pot fi considerate independent de orice legătură cu exteriorul, deoarece termenii care includ aceste componente în (6) rămîn neschimbați în urma unei translații și rotații rigide. Pentru acest motiv le vom denumi tensiuni de *autocuplaj*.

Vom preciza semnificația fizică a acestor mărimi punînd totodată în evidență deosebirea care trebuie făcută între ele și tensiunile propriu-zise σ.

Tensiunile σ reprezintă rezultantele interacțiunilor interne care apar pe fețele elementelor de volum presupuse izolate de restul corpului.

Scanned with OKEN Scanner

Cuplele de inerție care apar vor fi echivalente unor sisteme de tensiuni care apar în figura 7 la marginea elementului de volum sub forma unor săgeți de sens contrar tensiunilor. Efectul cumulat al tensiunilor σ și cuplelor de inerție se traduce printr-o deformație a elementului de volum. În figură această deformație este de tipul unei lunecări produse de tensiunile tangențiale (și anume de partea lor asimetrică), precum și de momentele simetrice de inerție. Dar suma tensiunilor σ și celor echivalente cuplelor de inerție simetrice sînt chiar tensiunile de autocuplaj Π de asemenea figurate și deci acestea joacă în ultima analiză un rol hotărîtor în procesul de deformare.

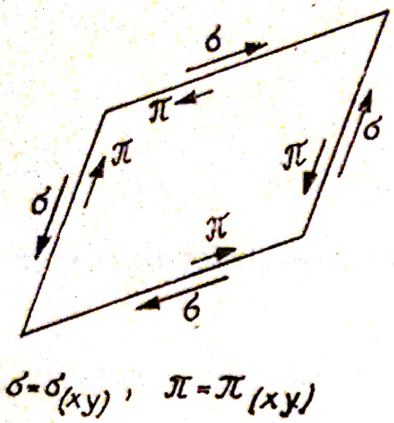


Fig. 7

§ 7. Principiul conservării entropiei

Se va adăuga la mărimile introduse anterior, funcția γ a vitezei de transfer a entropiei realizată prin conductibilitatea termică. Ecuația care formulează principiul conservării entropiei este

$$\int_v \dot{\eta} dv = -\int_s \frac{q^i n_i}{\vartheta} + \int_v \gamma dv \tag{1}$$

sau, după transformarea integralei de volum și restrîngerea domeniului de integrare în mod arbitrar,

$$\dot{\eta} = \gamma - q_{i,i}/\vartheta + q^i \vartheta_{,i}/\vartheta^2. \tag{2}$$

Principiul al doilea al termodinamicii impune în cazul proceselor reversibile condiția :

$$\gamma \geqslant 0. \tag{3}$$

Dacă se introduce funcția lui Helmholtz

$$A(u_i, u_{i,j}, \vartheta) = \rho\varepsilon - \eta\vartheta, \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă, prin derivare și aplicarea formulelor (2) de mai sus și (6), (10) din § 6, condiția

$$\dot{A} = A_{,u_i} v_i + A_{,u_{i,j}} v_{i,j} + A_{,\vartheta}\dot{\vartheta} = \Pi_i v_i + \Pi_{ij} v_{ij} - \eta\dot{\vartheta} - (\gamma + q_i \vartheta_{,i}/\vartheta^2)\vartheta. \quad (5)$$

În consecință procesul fiind reversibil, (5) este o diferențială totală exactă și au loc ecuațiile

$$\Pi_i = A_{,u_i}, \quad \Pi_{ij} = A_{,u_{i,j}}, \quad \eta = -A_{,\vartheta}, \quad -q_i \vartheta_{,i}/\vartheta^2 = \gamma \geqslant 0. \quad (6)$$

§ 8. Legea lui Fourier a conductibilității termice

Această lege se exprimă astfel

$$-q_i = k_{ij} T_{,j}. \quad (1)$$

k_{ij} reprezintă tensorul simetric al conductibilității termice pentru un mediu anizotrop; în cazul mediului izotrop avem $k_{ij} = \delta_{ij} k$. T reprezintă temperatura relativă (raportată la o stare naturală sau nedeformată în care are loc temperatura ϑ_0):

$$T = \vartheta - \vartheta_0. \quad (2)$$

Aplicînd ecuațiile (2) și (6) din § 7, rezultă

$$\dot{\eta}\vartheta = -q_{i,i} = k_{ij} T_{,ij}, \quad \text{pentru corpul anizotrop,} \quad (3)$$

$$= k\Delta T, \quad \text{pentru corpul izotrop,} \quad (4)$$

Δ fiind operatorul lui Laplace $(\quad)_{,ii}$.

§ 9. Ecuațiile de mobilitate

În cazul teoriei mediilor centro-asimetric izotrope, vom admite o funcție A a lui Helmholtz de gradul doi în raport cu funcțiile deformațiilor, rotațiilor, deplasărilor și temperaturii

$$A = \frac{1}{2}[\lambda\theta^2 + 4\mu I_2 - 2\tau T\theta - \pi T^2 - 4aR - 4\beta\omega^2 + cu^2]. \quad (1)$$

3—c. 1332

Scanned with OKEN Scanner

Această funcție este deci invariantă pentru transformări de coordonate deoarece depinde numai de invarianți (dacă $a = 0$).

Ecuațiile (6) din § 7 se vor transcrie astfel:

$$\Pi_i = cu_i - 2a\omega_i, \tag{2}$$

$$\Pi_{ij} = \delta_{ij}(\lambda\theta - \tau T) + 2\mu e_{ij} + ae_{ijk}u_k + 2\beta\omega_{ij}, \tag{3}$$

$$\eta = \tau\theta + \pi T, \ (e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1, \ e_{213} = e_{132} = e_{321} = -1). \tag{4}$$

Aceste ecuații se scriu sub o formă inversată astfel

$$e_{ij} = \tau'\delta_{ij}T + 2\mu'\Pi_{(ij)} + \lambda'\delta_{ij}\Pi, \tag{5}$$

$$\omega_{ij} = 2c'\Pi_{[ij]} - a'e_{ijk}\Pi_k, \tag{6}$$

$$u_i = \Pi_i/c - 4a(a'\Pi_i - c'e_{ijk}\Pi_{jk})/c \tag{7}$$

pentru

$$\Pi = \Pi_{ii}, \ \mu' = 1/4\mu, \ \lambda' = -\lambda/6\mu K, \ K = \lambda + 2\mu/3$$

$$\tau' = \tau/3K, \ c' = c/4(c\beta - a^2), \ a' = a/2(c\beta - a^2), \tag{8}$$

$$\Pi_{(ij)} = (\Pi_{ij} + \Pi_{ji})/2, \ \Pi_{[ij]} = (\Pi_{ij} - \Pi_{ji})/2.$$

În cazul proceselor adiabatice avem $\dot{\eta} = 0$. Luînd $\eta = 0$, deducem din (4)

$$T = -\tau\theta/\pi \tag{9}$$

și deci (3) se scrie astfel

$$\Pi_{ij} = \delta_{ij}\lambda^*\theta + 2\mu e_{ij} + ae_{ijk}u_k + 2\beta\omega_{ij}, \tag{10}$$

unde s-a notat

$$\lambda^* = \lambda + \tau^2/\pi. \tag{11}$$

În continuare vom analiza mai îndeaproape modificările care intervin în expresia energiei interne ε datorite temperaturii și entropiei.

Conform relațiilor (6), (10) din § 6 și a relației (4) din § 8, rezultă formularea diferențială

$$\rho d\varepsilon = \Pi_i du_i + \Pi_{ij}a_{ij} + \vartheta d\eta, \tag{12}$$

Scanned with OKEN Scanner

a reprezentînd tensorul distorsiunii (5) din § 2. Funcția (4) ne arată că entropia satisface condiția diferențială

$$\mathrm{d}\eta = \left(\frac{\partial \eta}{\partial e_{ij}}\right)_T \mathrm{d}e_{ij} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \vartheta}\right)_e \mathrm{d}\vartheta. \tag{13}$$

Indicii exteriori parantezelor arată că derivatele din interiorul acestora se iau pentru valori constante ale funcțiilor corespunzătoare indicilor. Parantezele sînt egale cu

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial e}\right)_T = \delta_{ij}\tau, \tag{14}$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial \vartheta}\right)_e = \frac{c}{\vartheta}. \tag{15}$$

reprezintă *căldura specifică.*

Prin urmare (12) și (13) se mai scriu astfel:

$$\rho \mathrm{d}\varepsilon = \Pi_i \mathrm{d}u_i + \Pi_{ij}\mathrm{d}a_{ij} + \vartheta\tau\mathrm{d}\theta + c\mathrm{d}\vartheta, \tag{16}$$

$$\mathrm{d}\eta = \tau\mathrm{d}\theta + c\mathrm{d}\vartheta/\vartheta. \tag{17}$$

Vom mai presupune că în starea naturală entropia este nulă. Atunci integrala ecuației (17) este

$$\eta = \tau\theta + c \log \frac{\vartheta}{\vartheta_0}. \tag{18}$$

În cazul în care $|T/\vartheta_0| \ll 1$, vom putea dezvolta funcția logaritmică în serie de puteri din care vom reține numai primul termen

$$\eta = \tau\theta + c\, T/\vartheta_0. \tag{19}$$

Comparînd acest rezultat cu (4), rezultă egalitatea

$$\Pi = c/\vartheta_0. \tag{20}$$

Remarcăm că ecuația (19) se mai poate pune sub forma

$$\vartheta\dot{\eta} = \tau\vartheta\dot{\theta} + c\dot{T}. \tag{21}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din această ecuație și (4) din § 8, rezultă consecința

$$\Delta T - \dot{T}/\varkappa - \eta_0(1 + T/\vartheta_0)\dot{\theta} = 0, \tag{22}$$

în care s-a notat

$$\varkappa = k/c, \quad \eta_0 = \tau\vartheta_0/k. \tag{23}$$

În cazul în care $|T/\vartheta_0| \ll 1$, ecuația obținută se poate liniariza. Astfel, considerînd și sursele de temperatură W în unitatea de volum și timp, se deduce ecuația conductibilității termice

$$\Delta T - \dot{T}/\varkappa - \eta_0\dot{\theta} = -Q/k \tag{24}$$

în care

$$Q = W/k. \tag{25}$$

Remarcăm că din punctul de vedere al formulării ecuațiilor (7) din § 6 și al condițiilor pe contur $p_i = \Pi_{ij}\, n_j$, n_j fiind cosinușii normalei la elementul de suprafață pe contur, efectul termic poate fi înglobat în efectele produse de forțele de masă și de încărcările

$$X_i^T = X_i + \tau T_{,i}, \quad p_i^T = p_i + \tau T n_i, \quad (p^i = \sigma_{ij} n_j). \tag{26}$$

Cîmpul de tensiune se presupune independent de temperatură.

Această observație permite unele simplificări ale procedeelor de rezolvare.

Ecuațiile (5) — (7) au caracterul unor ecuații constitutive (fizice), înțelegînd prin aceasta că ele corelează elementele constitutive ale modelului tensorial. Datorită prezenței cantităților Π din relațiile (7), (8) ale § 6, aceste ecuații includ și cele de echilibru. Deoarece acestea din urmă sînt caracterizate prin prezența termenilor inerțiali, constituie generalizări ale principiilor lui Newton.

Pornind de la observația că ecuațiile constitutive și condițiile de echilibru (6) din § 7 și (2)—(4) din § 9 au un caracter unitar, fiind subsumate condiției de reversibilitate a mișcării, le vom denumi ecuații de mobilitate (internă și externă).

Nu vom utiliza termenul de reversibilitate deoarece ecuațiile în cauză pot apare în mod analog și în cadrul unei teorii a modelului tensorial neelastic, deci nereversibil. În schimb termenul mobilitate reflectă o proprietate generală a mișcării interne a solidelor.

Scanned with OKEN Scanner

§ 10. Ecuații diferențiale

Vom înlocui expresiile (2) și (3) din § 9 ale forțelor și cuplelor mo delului tensional în ecuațiile (7) și (9) din § 6

$$\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i - X_i = \Pi_i = cu_i - 2a\,\omega_i \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} - \rho\,(I\,\ddot{e}_{ij} - J\,\ddot{\omega}_{ij}) - X_{ij}^{\bullet} = \Pi_{ij} =$$

$$= \delta_{ij}(\lambda\theta - \tau T) + 2\mu\,e_{ij} + a\,e_{ijk}\,u_k + 2\,\beta\,\omega_{ij} \tag{2}$$

în care

$$I = K + L, \quad I = L - K. \tag{3}$$

Substituția expresiei componentelor tensorului tensiunii din (2) în (1) conduce la ecuațiile diferențiale

$$[(\lambda + 2\mu)\,\theta - \tau T]_{,i} - 2\,(\mu - \beta)\,\omega_{ij,j} - cu_i + 4a\,\omega_i =$$

$$= \rho\,(u_i - I\,e_{ij,j} + J\,\omega_{ij,j})^{\cdot\cdot} + F_i \tag{4}$$

sau

$$[(\lambda + \mu + \beta)\,\theta - \tau\,T]_{,i} + (\mu - \beta)\,\Delta\,u_i - cu_i + 4a\,\omega_i =$$

$$= \rho\,(u_i - K\,\theta_{,i} - L\,\Delta\,u_i)^{\cdot\cdot} + F_i \tag{5}$$

unde s-a notat

$$F_i = X_i - X_{ij,j}. \tag{6}$$

Derivînd termenii ecuației în raport cu i și sumînd sau aplicînd operatorul rotor $\frac{1}{2}\,e_{kji}\,(\quad)_{i,j}$ termenilor ecuației (5) — vezi definiția (8) din § 2 — deducem ecuațiile undelor de dilatare și rotație:

$$\Delta\,[(\lambda + 2\mu)\,\theta - \tau\,T)] - c\theta = \rho\,(\theta - I\Delta\,\theta)^{\cdot\cdot} + \Phi,$$

$$(\mu - \beta)\,\Delta\,\omega_k - c\,\omega_k = \rho\,(\omega_k - L\,\Delta\,\omega_k)^{\cdot\cdot} + \Psi_k, \tag{7}$$

$$\Phi = F_{,i}, \quad \Psi_k = \frac{1}{2}\,e_{kji}\,F_{i,j}. \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul unor oscilaţii staţionare pentru care au loc condiţiile

$$\ddot{u}_i = -p^2 u_i, \tag{9}$$

ecuaţiile (1), (2), (5), (7) şi (8) se scriu astfel

$$\sigma_{ij,j} = (c - \rho p^2) u_i - 2a \omega_i + X_i, \tag{10}$$

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} (\lambda \theta - \tau T) + (2\mu - \rho I p^2) e_{ij} + (2\beta - \rho J p^2) \omega_{ij} - a e_{ijk} u_k + X_{ij}, \tag{11}$$

$$[(\lambda + \mu + \beta + \rho K p^2) \theta - \tau T]_{,i} + (\mu - \beta + \rho L p^2) \Delta u_i - (c - pp^2) u_i + 4a\omega_i = F_i, \tag{12}$$

$$[(\lambda + 2\mu + \rho I p^2) \Delta\theta - \tau T]_{,i} - (c - \rho p^2) \theta = \Phi, \tag{13}$$

$$(\mu - \beta + \rho L p^2) \Delta\omega_k - (c - \rho p^2) \omega_k + 2a\omega_{kj,j} = \Psi_k. \tag{14}$$

§ 11. Ecuaţiile elasticităţii tensionale cu mobilitate de tip polar

Ecuaţiile stabilite au un caracter general. Pentru acest motiv apar o serie de dificultăţi în aplicarea lor practică. Astfel, datorită structurii mult mai ample a ecuaţiilor, metodele de rezolvare sînt de asemenea mult mai complexe. Pe de altă parte, cazurile practice subsumate de formalismul teoriei elaborate se pot obţine prin particularizări ale rezultatelor generale, care, în sine, pot pretinde un volum apreciabil de calcule.

Avînd în vedere această situaţie, apare indicat de a restrînge cadrul larg al teoriei elasticităţii tensionale la nivelul unor cazuri particulare de importanţă tehnică deosebită, cîştigînd în acest fel avantajul unei formulări simple, unor corespondenţe clare între constantele modelului şi caracteristicile unor structuri reale, precum şi posibilitatea utilizării unor metode de rezolvare practice.

O asemenea particularizare este cea definită mai jos şi analizată sub raportul semnificaţiei ei fizice şi echivalenţei cu anumite structuri deformabile în paragrafele următoare. De altfel această analiză justifică particularizarea aleasă, ea corespunzînd la o clasă largă de structuri.

Scanned with OKEN Scanner

Independent de aceste dezvoltări, modelul particular expus mai jos poate fi formulat pe baza următoarelor considerente :

— Forțele de cuplaj sînt neglijabile.

— Modulul de inerție I din (3), § 10, care corespunde unui efect produs de accelerația de deformație asupra tensiunilor, este neglijabil, fapt care se poate datora dimensiunilor mici ale particulelor sau absenței accelerației de deformare.

— Fenomenul dinamic de rotație este neglijabil sau are un caracter staționar, în ultimul caz avînd loc condiția $\ddot{\omega}_{ij} = -k^2 \omega_{ij}$.

— Cuplele de masă X_{ij} sînt neglijabile.

În baza acestor ipoteze, ecuațiile de mobilitate exprimate în (1) și (2) din § 10 se transcriu astfel

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i + X_i, \qquad \sigma_{ij} = \delta_{ij}(\lambda\theta - \tau T) + 2\mu e_{ij} + 2\beta \omega_{ij}. \tag{1}$$

S-a înlocuit constanta $2\beta - \rho k^2 J$ din (2), § 10, printr-o nouă constantă notată, pentru simplificare, 2β și denumită constanta de polarizare.

Pentru claritate vom retranscrie ecuațiile (4) și (5) din § 10 pentru cazul de față :

$$[(\lambda + 2\mu)\theta - \tau T]_{,i} - 2(\mu - \beta)\omega_{ij,j} = \rho\ddot{u}_i + X_i \tag{2}$$

sau

$$[(\lambda + \mu + \beta)\theta - \tau T]_{,i} + (\mu - \beta)\Delta u_i,$$

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}(\lambda\theta - \tau T) + 2\mu e_{ij} + 2\beta\omega_{ij}. \tag{3}$$

Ecuațiile undelor (7) și (8) din § 10 se vor simplifica astfel :

$$(\lambda + 2\mu)\Box_l \theta = X_{i,i} + \tau \Delta T \tag{4}$$

$$(\mu - \beta)\Box_l \omega_i = \frac{1}{2} e_{ijk}(X_k + \tau T_{,k})_{,j} \tag{5}$$

în care intervin operatorii asociați undelor longitudinale și transversale

$$\Box_l\left(\frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \Delta - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\Box_t\left(\frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \Delta - \frac{\rho}{\mu - \beta}\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right). \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

În scopul reprezentării prin potențiali a soluțiilor, vom retranscrie ecuațiile (1) sub forma

$$A_{ij}\, u_j = X_i + \tau\, T_{,i} \tag{7}$$

în care intervin operatorii

$$A_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = (\lambda + \mu + \beta)\, \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} + (\mu - \beta)\, \delta_{ij}\, \Box_t. \tag{8}$$

Utilizînd metoda matricilor asociate propusă inițial de Lopatinski, vom transpune sistemul diferențial (7) cu ajutorul notațiilor

$$\xi_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \tau = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathcal{A}_{ij}\, A_{ij} = (\xi_k, \tau).$$

$$\mathcal{L} = \Box_l\, (\xi_k, \tau), \quad \mathcal{T} = \Box_t\, (\xi_k, \tau), \tag{9}$$

în sistemul algebric

$$\mathcal{A}_{ij}\, \mathcal{U}_j = \mathcal{X}_i + \tau\, \xi_i\, T \tag{10}$$

avînd soluțiile

$$\mathcal{U}_i = \mathcal{B}_{ij}\, (\mathcal{X}_j + \tau\, \xi_j\, T) \tag{11}$$

cu

$$\mathcal{B}_{ij} = \frac{\delta_{ij}\, (\lambda + 2\,\mu)\, \mathcal{L} - (\lambda + \mu + \beta)\, \xi_i\, \xi_j}{(\lambda + 2\,\mu)\, (\mu - \beta)\, \mathcal{L}\, \mathcal{T}}.$$

Trecînd la funcțiile originale, rezultă reprezentarea

$$u_i = \left[\delta_{ij}\, (\lambda + 2\mu)\, \Box_l - (\lambda + \mu + \beta)\, \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}\right] G_j \tag{12}$$

în care intervin funcțiile de reprezentare G_j, pentru care sînt satisfăcute condițiile

$$(\lambda + 2\mu)\, (\mu - \beta)\, \Box_l\, \Box_t\, G_i = X_i + \tau \frac{\partial T}{\partial x_i}. \tag{13}$$

Această reprezentare extinde pe cea dată de Galerkin în cazul static al teoriei clasice. În monografia [2] a autorului se dă o asemenea extindere și trimiteri bibliografice.

Scanned with OKEN Scanner

În vederea unei noi reprezentări vom nota

$$(\lambda + 2\mu)\, G_{i,i} = \frac{1}{2}(B_0 + x_i B_i), \quad (\lambda + 2\mu)\, \square_l G_i = B_i. \tag{14}$$

Se deduce atunci reprezentarea

$$u_i = B_i - \frac{\lambda + \mu + \beta}{2(\lambda + 2\mu)}(B_0 + x_j B_j)_{,i}, \tag{15}$$

în care

$$\square_l B_0 + x_i \cdot \square_l B_i = 0,$$

$$(\mu - \beta)\, \square_l B_i = X_i + \tau \frac{\partial T}{\partial x_i}. \tag{16}$$

În cazul static şi în absenţa forţelor de masă şi a efectelor termice, funcţiile B_0 şi B_i sînt armonice. Pentru $\beta = 0$ se reobţine reprezentarea lui C. Sternberg şi R. A. Eubanks pentru cazul general şi a lui Papcovici-Neuber în cazul static, fără forţe de masă şi efecte termice.

Primul grup de ecuaţii din (1) conduce la reprezentarea prin potenţiali a funcţiilor de tensiune valabile pentru cazul static

$$\sigma_{ij} = e_{jkl} F_{li,k} + \sigma^0_{ij}. \tag{17}$$

Funcţiile F care extind cele introduse de Maxwell şi Morera în teoria clasică, satisfac anumite condiţii diferenţiale determinate de-al doilea grup de ecuaţii din (1) asupra cărora nu ne oprim aici. De asemenea au loc condiţiile :

$$\sigma^0_{ij,j} = X_i. \tag{18}$$

Remarcăm în încheiere că ecuaţiile constitutive din (1) se inversează sub forma

$$e_{ij} = \tau' \delta_{ij} T + 2\mu' \sigma_{(ij)} + \lambda' \delta_{ij} \Theta \tag{19}$$

$$\omega_{ij} = \sigma_{[ij]}/2\beta$$

în care

$$\Theta = \sigma_{ii}. \tag{20}$$

Se aplică relaţiile (5), (7) şi (8) din § 9. Indicii din paranteză au semnificaţia formulată în relaţia (6) din § 2.

Utilizînd mărimile

$$E = (3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu), \qquad \nu = \lambda/2(\lambda + \mu) \tag{21}$$

denumite respectiv modul de elasticitate longitudinal și coeficientul lui Poisson, constatăm că în (8), § 9, coeficienții sînt cei din (19) și se scriu astfel:

$$\tau' = \tau(1 - 2\nu)/E, \quad \lambda' = -\nu/E, \quad 2\mu' = (1 + \nu)/E. \tag{22}$$

§ 12. Aproximația de lungime de undă scurtă

În scopul asocierii modelului elastic tensional cu mobilitate de tip polar, definit în paragraful precedent, unor structuri reale determinate, intervine necesitatea adoptării unor criterii generale în baza cărora să se stabilească măsura de exactitate în care ecuațiile date descriu comportarea mecanică a acelor structuri.

Asemenea criterii sînt formulate în cele ce urmează cu ajutorul unei analize a legilor de variație a cîmpului elastic și admițînd o serie de ipoteze cu privire la această variație formulate cu ajutorul puterilor unui anumit număr. Acest număr de natura unui parametru mic poate de exemplu descrie distanța între nodurile unei rețele sau lungimea de undă a deplasărilor etc. În cele din urmă, punînd în evidență termenii principali care apar în această analiză și reținîndu-i și neglijînd pe cei secundari în conformitate cu ipotezele ce se introduc, rezultă modelul polar.

În consecință, pornind de la cazul general și pentru cîmpuri de deplasări, distorsiuni, tensiuni, forțe și cuple de masă, care variază conform legilor admise în cele ce urmează, ecuațiile sînt cele din § 11. Sub acest raport, modelul cu mobilitate polară constituie un instrument de analiză chiar și în cazul elasticității tensionale generale, corespunzător anumitor variații ale cîmpurilor interne.

Notăm însă că în cele ce urmează se analizează și mărimea diferitelor constante fizice ale modelului general. Din această analiză rezultă că dacă mărimea constantelor se situează în anumite limite, modelul degenerează în cel de tip polar. O asemenea analiză se poate face în diferite cazuri concrete, astfel cum apar în § 13 și § 14, cu care se stabilește și o echivalență între modelul cu mobilitate polară și anumite structuri reale.

Vom considera un cîmp elastic staționar pentru care presupunem că se poate pune în evidență o mărime notată Λ în sensul următor. Dacă variația mărimilor cîmpului elastic are un caracter periodic, Λ va fi identificată cu lungimea de undă care se poate pune în evidență între două amplitudini maxime învecinate. Dacă există legături de cuplaj, Λ ar putea eventual să fie asociat, astfel cum va apare în paragrafele următoare cu o lungime caracteristică a acestor legături cu mediul extern. Λ va fi presupus că este o mărime foarte mică comparativ cu alte mărimi

Scanned with OKEN Scanner

ce se vor indica. Limitîndu-ne pentru moment la primul caz, vom presupune că periodicitatea cîmpului este caracterizată de o frecvență p. Deoarece în general frecvența p depinde de perioada de oscilație T prin relația $p = 2\pi/T$ și deoarece Λ/T este de natura unei viteze de undă, rezultă că $p = 2\pi v/\Lambda$. Vom presupune de asemenea că mărimile date mai jos pot fi exprimate sub forma unor dezvoltări în raport cu puterile lungimii Λ considerată ca un parametru mic:

$$u_i = \sum \Lambda^s u_i^s,\ x_i = \Lambda\ \xi_i\ ,\ v = \Lambda^C v_0, c = \Lambda^{2(C-1)} c_0 \tag{1}$$

$$J = \Lambda^K J_0,\quad \beta = \Lambda^{2(K-1)}\ \beta_0,\quad a = \Lambda^N a_0, \tag{2}$$

$$\sigma = \sum_s \Lambda^s\ \sigma_s,\ (s \geqslant 0). \tag{3}$$

În baza acestor dezvoltări, derivatele se pot exprima astfel:

$$(\quad),_i = \frac{\partial(\quad)}{\partial x_i} = \Lambda^{-1}(\quad):_i, (\quad):_i = \frac{\partial(\quad)}{\partial\ \xi_i}. \tag{4}$$

În mod corespunzător celor precedente, vor avea loc dezvoltările parametrice

$$e,\ \theta,\ \omega,\ \sigma,\ X = \Sigma\Lambda^s\ (e^s,\ \theta^s,\ \omega^s,\ \sigma^s,\ X^s), \tag{5}$$

$$e_{ij}^s = u_{i;j}^{s+1},\quad \theta^s = e_{ii}^s,\quad \omega_{ij}^s = u_{(j;\ i)}^s, \tag{6}$$

$$\lambda,\ \mu,\ \beta, \ldots = \Sigma\ \Lambda^s\ (\lambda^s,\ \mu^s,\ \beta^s, \ldots). \tag{7}$$

În definitiv ecuațiile (10) și (11) din § 10 se vor scrie astfel:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij;\ j}^s &= (c_0 - \rho\ 4\ \pi^2\ v_0^2)\ u_i^{s-2G+1} - 2a_0\ \omega_i^{s-1-N} + X_i^{s-1}\\ \sigma_{ij}^s &= \delta_{ij}\ (\lambda\theta^s - \tau\ T^s) + 2\ \bar{\mu}_0\ e_{ij}^s + 2a_0\ e_{ijk}\ u_k^{s-N} + 2\ \bar{\beta}_0\ \omega_{ij}^{s-2(K-1)} + X_{ij}^s\end{aligned} \tag{8}$$

pentru

$$\bar{\mu}_0 = (\mu - \rho/Ip2)_0\ ,\quad \bar{\beta} = \beta_0 - \rho\ J_0\ 2\pi^2\ c^2. \tag{9}$$

Fie atunci cîmpul staționar caracterizat de următoarele condiții pentru parametri:

$$C \geqslant 1,\quad K = 1,\quad N \geqslant 1. \tag{10}$$

Vom avea atunci în prima aproximație, și anume pentru o valoare 0 a indicelui s care va fi omis din formule, următoarele ecuații care înlocuiesc ecuațiile (8) și (9):

$$\sigma_{ij;j} = X_i^{-1}, \tag{11}$$

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}(\lambda\theta - \tau T) + 2\bar{\mu}_0 e_{ij} + 2\bar{\beta}_o \omega_{ij} + X_{ij}^{-1}. \tag{12}$$

Ecuațiile (13) și (14) din § 10 se vor scrie astfel:

$$[(\lambda + \bar{\mu}_0 + \bar{\beta}_0)\theta - \tau T]_{,i} + (\bar{\mu}_0 - \bar{\beta}_0)\Delta u_i = F_i, \tag{13}$$

$$[(\lambda + 2\bar{\mu}_0)\Delta\theta - \tau T]_{,i} = \Phi^{-1}, \tag{14}$$

$$(\bar{\mu}_0 - \bar{\beta}_0)\Delta\omega_k = \Psi_k^{-1}. \tag{15}$$

Prin urmare ecuațiile (13) — (15) sînt analoge teoriei clasice a elasticității în care doar modulii λ și μ sînt nenuli dacă utilizăm substituțiile

$$\lambda \to \lambda + 2\bar{\beta}_0, \quad \mu \to \bar{\mu}_0 - \bar{\beta}_0. \tag{16}$$

Condițiile (10) corespund printre altele unui mediu și cîmp elastic caracterizat în modul următor:

— Mediul nu este cuplat prin legături care să transmită forțe de prim ordin de mărime ($C = N = 1$).

— Pot apare momente de inerție de ordinul 1 sau superior ($K \geqslant 1$).

— Frecvențele p sînt de un ordin de mărime principal ($C = 1$) sau eventual superior ($C \geqslant 1$).

— Cuplajul admite existența unor momente de ordin de mărime principal ($K = 1$) sau eventual superior ($K \geqslant 1$).

În alți termeni, dacă există fenomene staționare care se reproduc la distanțe relativ mici în raport cu dimensiunile corpului, poate apare un cîmp elastic caracterizat de ecuațiile (11) — (15) pe care-l vom numi cîmp elastic în aproximația de lungime de undă scurtă. Remarcăm că un asemenea cîmp apare și în lipsa efectelor inerțiale staționare pentru un cuplaj caracterizat de modulul b (sau β).

Condițiile (10) corespund unei viteze v (vezi (2)) de ordinul de mărime 0 — deci cu valori arbitrar de mari — unui moment de inerție J de ordinul 1 în Λ și unui mediu fără legături care să preia forțe (cel puțin în prima aproximație, pentru care $a_0 = 0$, $c_0 = 0$), dar care poate avea legături preluînd momente de cuplaj.

Reținem deci că aproximația de lungime scurtă corespunde unui efect de autocuplare prin *polarizare inerțială* exprimat prin mărimea $\beta_0 = -\rho J_0 2\pi^2 c^2$ în (12) iar aproximația de lungime scurtă caracteristică se referă la un efect de *cuplaj polar*, exprimat prin mărimea $\bar{\beta}_0 = \beta_0$.

În baza acestor considerații rezultă că ecuațiile de mobilitate (11) caracterizează cîmpul elastic în prima aproximație de undă scurtă. Limitîndu-ne la această aproximație și omițînd barele și indicii 0 și — 1 afectați cantităților care apar în membrul drept, se obțin ecuațiile expuse în § 11.

§ 13. Latice cu mase concentrate la noduri și efectul de polarizare inerțială

Un exemplu de realizare a unui cîmp elastic cu tensiuni de autocuplaj, echivalent aproximației de lungime de undă scurtă, îl poate constitui o latice de bare care transmit forțe tăietoare și axiale de la un nod la altul.

În noduri presupunem situate, ca în figura 8, masele m și momentele polare de inerție i. Atunci, dacă Δx_i sînt dimensiile barelor orientate paralel cu axele de coordonate iar $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, va rezulta că în (1), § 10, avem forțele și momentele produse într-un cîmp staționar de vibrații

$$\rho \Delta V = m, \quad \rho J \Delta V = mi, \text{ (sau } J = i). \tag{1}$$

Am presupus că u_i , ω_i reprezintă deplasările și rotațiile nodurilor și deci că barele prezintă o slabă deformabilitate între două noduri, fiind groase.

De asemenea, presupunem rețeaua suficient de deasă pentru a o putea utiliza în locul unui mediu continuu.

Vom identifica lungimea Λ cu una din valorile $n \Delta x_i$, n fiind un număr întreg suficient de mic. Considerînd o latice izotropă (cu deschideri între noduri egale), aceste valori rezultă egale pentru orice i.

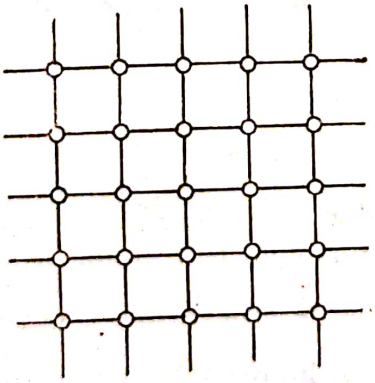


Fig. 8

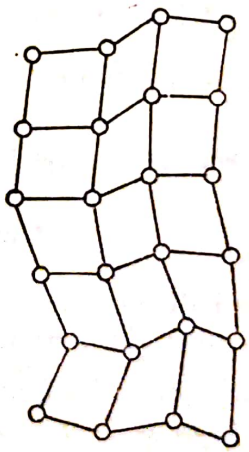


Fig. 9

În alți termeni, vom avea de considerat oscilații care produc slabe deplasări nodurilor rețelei (de ordinul de mărime al lungimii Λ), dar rotații mari ca în figura 9.

Momentul de inerţie i va fi de asemenea proporţional cu o putere Λ^k, $(k > 0)$, a lungimii caracteristice, deoarece geometria reţelei implică existenţa unor dimensiuni de ordin Λ a regiunilor în care sînt distribuite masele.

În figura 10 apare cazul mai simplu al unei bare sau plăci avînd elemente de masă uniform distribuite, plasate pe tije transversale de lungimi egale. Mişcările de încovoiere sînt însoţite de perturbări datorite acestor mase în sensul celor expuse mai sus.

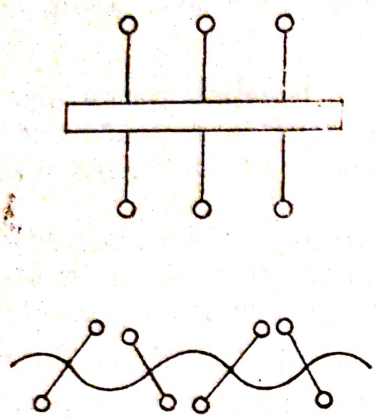


Fig. 10

Efectul de polarizare provenit din existenţa unei dependenţe între rotaţii şi tensiunile tangenţiale antisimetrice apare în mod pregnant în cazul corpurilor elastice într-un cîmp de sarcini electrice.

Fie e aceste sarcini situate în corp. Fie de asemenea o sarcină exterioară ε. Vom presupune că interacţiunea reciprocă a sarcinilor din corp este neglijabilă faţă de interacţiunea dintre fiecare dintre aceste sarcini şi sarcina exterioară ε. Rezultă că în corp apar forţele $e\varepsilon/R$, R fiind distanţa dintre poziţiile sarcinilor e şi ε.

În alţi termeni vom defini cîmpul electric $E = e\vec{\nu}/R^2$ al sarcinilor din corp şi cîmpul forţelor $\vec{F} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{\nu}$ fiind versorul axei care trece prin punctele de aplicare ale sarcinilor e şi ε.

Prin mişcarea elementelor constitutive ale corpului, lungimile R suferă o creştere δR astfel că forţele produse de interacţiunea sarcinilor electrice vor suferi o creştere

$$\delta F = \varepsilon e\,(1/(R + \delta R)^2 - 1/R^2) = -2\varepsilon e\,\delta R/R^3 \qquad (2)$$

în care ţinem seama de corelaţia

$$\delta R = \vec{\nu}\,(\vec{u} - \vec{r} \times \vec{\omega}), \qquad (3)$$

$\vec{r}$ fiind vectorul de poziţie al punctelor de aplicare ale sarcinilor electrice din interiorul unui element de volum al corpului avînd origina în centrul de greutate al acestui element. $\vec{u}$ şi $\vec{\omega}$ sînt vectorii deplasării şi rotaţiei. Am presupus $R >> \delta R$.

Vom calcula integrala extinsă la volumul ΔV al acestui element

$$\pi = \int \delta F\, dv\, /\Delta V = -2\varepsilon e \int \vec{\nu}\,(\vec{u} - \vec{r} \times \vec{\omega})\, dv/\Delta V\, R^3 = -$$

$$-2\varepsilon e\,(\vec{\nu}\,\vec{u} - \vec{\nu} \cdot \vec{\rho} \times \vec{\omega})/R^3. \qquad (4)$$

Scanned with OKEN Scanner

S-a notat $\vec{\rho} = \int \vec{r}\, dv/\Delta V$. Această cantitate se anulează în cazul unor elemente cu axe de simetrie ($\vec{\rho} = 0$), astfel că vom avea forțele de volum

$$\Pi_i = \nu_i \Pi = - \sum_{\varepsilon} 2 \varepsilon e \nu_i \nu_j u_j / R^3 . \tag{5}$$

Simbolul de sumare $\sum_{\varepsilon}$ se referă la un ansamblu de sarcini exterioare ε. În cele ce urmează vom presupune existența a trei sarcini exterioare ε_k, $(k = 1, 2, 3)$, pentru care corespund orientările $\nu\,(k)$ ale căror cosinuși directori sînt

$$\nu_i\,(k) = \delta_{ik} \tag{6}$$

și alte trei sarcini ε_l, $(l = 1, 2, 3)$, pentru care

$$\nu_i\,(l) = - \delta_{il} . \tag{7}$$

Presupunem $R(k) = R(l)$, $\varepsilon\,(k) = \varepsilon$.

Cumulînd efectele acestor sarcini vom avea

$$\Pi_i = - 12 \varepsilon e \; U_i / R^3 . \tag{8}$$

Ultima formulă corespunde unei distribuții izotrope de sarcini. Trecînd la calculul momentelor aplicate elementelor de volum, momente produse de forțele $\delta \vec{F} = \vec{\nu}\, \delta F$,

$$\vec{m}\, \Delta V = \int dv\, \vec{r} \times \delta \vec{F} = \int dv\, \vec{r} \times \vec{\nu}\, \delta F, \tag{9}$$

avem, trecînd la componente vectoriale

$$M_i = \int dv\, e_{ijk}\, dr_j\, \nu_k\, (- 2\varepsilon e)\, \nu_m\, (u_m - e_{mnp}\, r_n\, \omega_p)/R^3\, \Delta V = \tag{10}$$

$$= - 2\varepsilon e\, (\nu_k\, \nu_m\, e_{ijk}\, \rho_j\, u_m - e_{ijk}\, e_{mnp}\, \nu_k\, \nu_m\, \mathfrak{R}_{jn}\, \omega_p)$$

în care

$$\mathfrak{R}_{jn} = \int dv\, r_j\, r_n / \Delta V \left(\rho_j = \int dv r_j / \Delta V \right) \tag{11}$$

sînt momentele de inerţie raportate la elementul total de volum (raze de giraţie). Vom presupune elementele de volum simetrice astfel ca $\rho_j = 0$, $\mathcal{R}_{jn} = \delta_{jn}\mathcal{R}_{(j)}$. Atunci avem

$$M_i = 2\varepsilon\, ce_{ijk}\, e_{mjp}\, \mathcal{R}_{(j)}\, \nu_k\, \nu_m\, \omega_p/R^3. \tag{12}$$

În cazul izotropiei structurale a sarcinilor interne, astfel ca $\mathcal{R}_{(j)} = \mathcal{R}$, rezultă

$$M_i = -2\varepsilon\, e\, \mathcal{R}\, (\omega_i - \nu_i\, \omega)/R^3, \tag{13}$$

în care $\omega = \nu_k \omega_k$. Dacă vom avea aceleaşi sarcini externe ε_k, ε_l ca şi cele deja considerate, deducem

$$\Pi_{[ij]} = e_{ijk}\, M_k = -12\varepsilon e\, \mathcal{R}\, \omega_{ij}/R^3. \tag{14}$$

Comparînd cu ecuaţiile de mobilitate (12), (2) din § 10, rezultă condiţiile

$$\Pi_i = cu_i, \quad c = -12\varepsilon\, e/R^3, \quad a = 0,$$

$$\Pi_{[ij]} = 2\beta\omega_{ij}, \quad \beta = -6\varepsilon\, e\, \mathcal{R}^2/R^3. \tag{15}$$

Dacă notăm $f_{ij} = \partial f/\xi_i$, $\xi_j = \mathcal{R}x_i$ şi presupunem că $u_i/\mathcal{R}$ este de un ordin de mărime superior lui $u_{i:jk}$ rezultă că în ecuaţia (1) din § 10 putem neglija termenul $\Pi_i = cu_i$ deoarece acesta este de un ordin superior de mărime. Ipoteza conduce la modelul cu mobilitate de tip polar şi corespunde unor deplasări foarte mici şi unor curburi foarte mari la scara razelor de giraţie $\mathcal{R}$.

O altă echivalenţă a modelului tensional cu un corp real este cea relativă la fluidele vîscoase. Astfel, înlocuind deplasările u cu vitezele v ale particulelor fluidelor, rezultă că prezenţa unei vorticităţi în fluid, date de funcţiile ω_{ij}, corespunde unei ecuaţii constitutive pentru tensiunile antisimetrice $\sigma_{[ij]} = \beta\,(v_{j,i} - v_{i,j})$, dacă ne restrîngem la efectul de mobilitate asociat constantei β nenule. Această constantă reprezintă atunci un coeficient de viscozitate care exprimă efectul de inerţie internă datorat rotaţiei particulelor.

§ 14. Placa plană pe piloţi elastici şi efectul de cuplaj polar

Un exemplu de realizare a unui cîmp elastic cu cuplaj pur polar îl oferă placa plană pe piloţi elastici subţiri (fig. 11). Vom presupune că aceşti piloţi sînt suficient de deşi pentru ca placa să poată fi asimilată cu un mediu continuu suportînd sarcini repartizate pe elementele

de volum provenite din reacțiunile piloților. Reacțiunile care intervin în echilibrul în plan al plăcii pot fi forțe Π_α, $(\alpha = 1, 2)$, orientate în direcția axelor de coordonate $x = x_1$, $y = x_2$ situate în planul plăcii și momente Π care tind să răsucească în același plan elementele de volum.

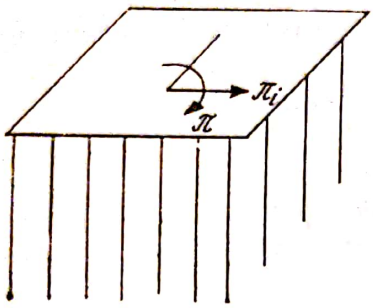


Fig. 11

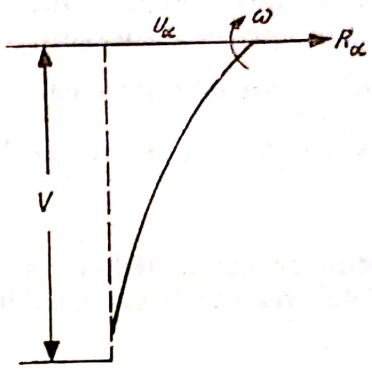


Fig. 12

Fie Δx_α dimensiunile în plan ale elementelor de volum și $\Delta z = h$ grosimea plăcii. Reacțiunile din piloți vor fi

$$\Pi_\alpha \, \Delta x \, \Delta y \, h = R_\alpha, \quad (1) \qquad\qquad \Pi \, \Delta x \, \Delta y \, h = M. \quad (2)$$

Dacă vom considera ca în figura 12 cîte un pilot cu secțiune circulară de lungime L, modul de elasticitate E, moment de inerție I, vom avea condițiile:

$$R_\alpha = \frac{6EI}{L^3} u_\alpha, \quad M = \frac{GI}{L} \omega. \quad (3)$$

Prima formulă corespunde legii de torsiune cunoscute din statica barelor, iar a doua rezultă prin integrarea ecuației de încovoiere a barei

$$u_{\alpha,\,zzz} = R_\alpha / EI \quad (4)$$

pentru încastrarea în punctul $z = 0$ și forța R_α transversală în punctul $z = L$:

$$u_\alpha(z) = R_\alpha z^3 / 6EI. \quad (5)$$

pentru $z = L$, $u_\alpha(L) = u_\alpha$, se obține formula dată.

În definitiv avem conform relației (1), § 10, și (2)

$$\Pi_\alpha = c u_\alpha, \quad c = 6E\Lambda^2 / \Delta x \, \Delta y \, hL,$$
$$\Pi_{[xv]} = 2\beta \omega_{xv}, \quad 2\beta = GI / \Delta x \, \Delta y \, hL, \quad a = 0. \quad (6)$$

Λ este o lungime caracteristică a cuplajului egală cu raza de giraţie a secţiei transversale a piloţilor

$$\Lambda^2 = I/L^2. \tag{7}$$

Prin urmare, dacă vom considera $\varepsilon = 1/L$ drept un parametru mic şi vom dezvolta soluţiile u_α în raport cu acest parametru $u_\alpha = \varepsilon \sum_0^\infty \varepsilon^s u_\alpha^s$, vom constata că, în prima aproximaţie, putem lua $\Pi_\alpha = 0$, astfel că vom avea momentele de cuplaj $\Pi_{[xy]}$.

§ 15. Condiţii de compatibilitate ale tensiunilor pentru modelul tensional cu mobilitate de tip polar

În cazul modelului descris în § 11, este posibilă o formulare simplă a condiţiilor pe care trebuie să le satisfacă tensiunile. Aceste condiţii de compatibilitate contribuie la caracterizarea generală a cîmpului elastic şi la stabilirea unor condiţii diferenţiale ca de exemplu acelea care ar rezulta pentru funcţiile potenţiali de tensiune.

Substituind în (4) din § 3 expresiile furnizate de ecuaţiile de mobilitate inversate (19) din § 11, obţinem

$$(1+\nu)\,[\sigma_{(ij),k} - \sigma_{(jk),i}] + (1-2\nu)\,\tau\,[\delta_{ij}\,T_{,k} - \delta_{jk}\,T_{,i}] - \\ - \nu\,[\delta_{ij}\,\Theta_{,k} - \delta_{jk}\,\Theta_{,i}] = m\,\sigma_{[ki],j} \tag{1}$$

pentru

$$m = E/2\beta, \quad \Theta = \sigma_{ii}. \tag{2}$$

Ecuaţiile (7) din § 3 se transformă într-un mod asemănător

$$(1+\nu)\,[\sigma_{(ij),kl} + \sigma_{(kl),ij} - \sigma_{(ik),jl} - \sigma_{(jl),ik}] + (1-2\nu)\,\tau\,[\delta_{ij}\,T_{,kl} + \\ + \delta_{kl}\,T_{,ij} - \delta_{ik}\,T_{,jl} - \delta_{jl}\,T_{,ik}] = \nu[\delta_{ij}\,\Theta_{,kl} + \delta_{kl}\,\Theta_{,ij} - \delta_{ik}\,\Theta_{,jl} - \delta_{jl}\,\Theta_{,ik}]. \tag{3}$$

Combinînd aceste din urmă ecuaţii prin sumare în raport cu un indice repetat $k = l$, obţinem

$$(1+\nu)\,[\Delta\sigma_{(ij)} + \Theta_{,ij} - \sigma_{(ik),jk} - \sigma_{(jk),ik}] + \\ + (1-2\nu)\,\tau\,[\delta_{ij}\,\Delta T + T_{,ij}] = \nu\,[\delta_{ij}\,\Delta\Theta + \Theta_{,ij}] \tag{4}$$

în care $\Delta = (\ )_{,ii}$, $\delta_{ii} = 3$.

Recurgînd la ecuațiile (9) din § 4 ai căror termeni îi derivăm în raport cu x_i, deducem

$$\sigma_{(ik),jk} = X_{i,j} - \sigma_{[ik],jk} \tag{5}$$

astfel că ecuațiile (4) se transcriu în modul următor

$$(1 + \nu)\,[\Delta\sigma_{(ij)} - X_{i,j} - X_{j,i} + \sigma_{[ik],jk} + \sigma_{[jk],ik}] + \tag{6}$$

$$+ \Theta_{,ij} - \nu\delta_{ij}\,\Delta\Theta + (1-2\,\nu)[\delta_{ij}\,\Delta T + T_{,ij}] = 0.$$

Remarcăm că (3) conduce după sumare în raport cu indicii repetați $k = i$ și $l = j$ la ecuația

$$(1 + \nu)\,[2\,\sigma_{(ij),ij} - 2\Delta\Theta] - 4\,(1 - 2\nu)\,\tau\,\Delta T + 4\nu\,\Delta\Theta = 0 \tag{7}$$

sau

$$\sigma_{(ij),ij} = \frac{1-\nu}{1+\nu}\Delta\Theta + 2\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}\,\tau\,\Delta T. \tag{8}$$

Deoarece prin sumarea termenilor din (6) în raport cu indicii repetați $j = 1$ avem

$$\sigma_{(ij),ij} = X_{i,i}, \tag{9}$$

rezultă din (8) și (9)

$$(1 + \nu)\,[\Delta\sigma_{(ij)} - X_{i,j} - X_{j,i} + \sigma_{(ik),jk} + \sigma_{(jk),ik}] + \Theta_{,ij} + \tag{10}$$

$$+ (1 - 2\nu)\,[\delta_{ij}\,\Delta T + T_{,ij}] = \nu\delta_{ij}\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\left[X_{k,k} - 2\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}\,\tau\,\Delta T\right].$$

Ultima formă a ecuațiilor de compatibilitate obținute se reduce, pentru un cîmp simetric de tensiune și pentru $T = 0$, la ecuațiile lui Beltrami-Mitchell.

Scanned with OKEN Scanner

Prin analogie cu (8) din § 3, ecuațiile (1) se scriu în mod explicit astfel :

$$
\begin{aligned}
&(1+\nu)\,[\sigma_{xx,y}-\sigma_{(xy),x}]+[(1-2\nu)\,\tau\,T-\nu\,\Theta]_{,y}=-m\,\sigma_{[xy],x},\\
&(1+\nu)\,[\sigma_{xx,z}-\sigma_{(xz),x}]+[(1-2\nu)\,\tau\,T-\nu\,\Theta]_{,z}=m\,\sigma_{[zx],x},\\
&(1+\nu)\,[\sigma_{yy,z}-\sigma_{(yz),y}]+[(1-2\nu)\,\tau\,T-\nu\,\Theta]_{,z}=-m\,\sigma_{[yz],y},\\
&(1+\nu)\,[\sigma_{yy,x}-\sigma_{(yx),y}]+[(1-2\nu)\,\tau\,T-\nu\,\Theta]_{,x}=m\,\sigma_{[xy],}\ ,\qquad (11)\\
&(1+\nu)\,[\sigma_{zz,x}-\sigma_{(zx),z}]+[(1-2\nu)\,\tau\,T-\nu\,\Theta]_{,x}=-m\,\sigma_{[zx],z},\\
&(1+\nu)\,[\sigma_{zz,y}-\sigma_{(zy),z}]+[(1-2\nu)\,\tau\,T-\nu\,\Theta]_{,y}=m\,\sigma_{[yz],z},\\
&(1+\nu)\,[\sigma_{(xy),z}-\sigma_{(yz),x}]=m\,\sigma_{[zx],y},\\
&(1+\nu)\,[\sigma_{(yz),x}-\sigma_{(zx),y}]=m\,\sigma_{[xy],z},\quad (1+\nu)[\sigma_{(zx),y}-\sigma_{(xy),z}]=m\,\sigma_{[yz],x}.
\end{aligned}
$$

CAPITOLUL II

Elemente privind funcţii de variabilă complexă şi transformări conforme pentru rezolvarea problemelor la limită ale teoriei elasticităţii tensionale cu mobilitate internă de tip polar

Teoria statică a elasticităţii tensionale cu mobilitate internă de tip polar, pentru forţe de masă nule, este caracterizată printr-un cîmp de deplasare biarmonic. Pentru acest motiv este posibil de a utiliza întregul aparat de calcul bazat pe teoria funcţiilor de variabilă complexă şi a transformărilor conforme care s-au dovedit deosebit de eficiente atît în alte domenii ale mecanicii, cît şi în teoria clasică a elasticităţii. În acest sens menţionăm o serie de lucrări care au fundamentat metodele de rezolvare bazate pe teoria menţionată în cazul elasticităţii clasice şi anume lucrările lui G. V. Kolosov [1], N. I. Mushelişvili [1]—[3], A. C. Stevenson [1], L. M. Milne-Thomson [1], [2], G. N. Savin [1]—[4] şi D. I. Şerman [1], [2].

Soluţiile problemelor la limită ale elasticităţii tensionale stabilite de autor în capitolele următoare se exprimă în raport cu o singură funcţie de reprezentare în cazul problemei transversale şi în raport cu trei funcţii de reprezentare în cazul problemei mediane, funcţii care se reduc la două în cazul problemei plane a teoriei clasice. Aceste funcţii sînt funcţii de variabilă complexă a căror determinare, în baza condiţiilor la limită, necesită aplicarea a o serie de proprietăţi expuse pe scurt în cadrul acestui capitol. În cazul unor contururi cu o formă mai complexă este utilă aplicarea transformărilor conforme cărora li s-a destinat de asemenea o parte a acestui capitol.

Rezolvarea problemelor la limită poate apela şi la teoria ecuaţiilor integrale în legătură cu care se dau de asemenea o serie de elemente.

§ 16. Domenii de determinare a funcţiilor de reprezentare

În rezolvarea problemelor la limită, funcţiile de variabilă complexă de reprezentare a soluţiilor pot fi definite în interiorul unui domeniu mărginit de o linie curbă închisă sau într-un domeniu infinit. Aceste domenii pot fi simplu sau multiplu conexe.

Pentru precizarea ideilor, vom considera un domeniu D, mărginit sau infinit în planul variabilelor complexe $\zeta = x + i\,y$. În acest plan

considerăm o linie de contur L simplă, închisă. Pentru utilizarea unor metode de rezolvare, cum ar fi acelea bazate pe transformările conforme sau ecuaţiile integrale, este necesar de a introduce anumite ipoteze relative la linia L. Astfel, se va presupune că L este netedă pe porţiuni. Alte ipoteze se vor introduce în cadrul metodelor expuse ulterior.

Domeniul D se va presupune ca fiind o parte Γ conexă a planului cu frontieră formată dintr-un contur simplu închis L (în cazul domeniului simplu conex) sau dintr-un număr finit de linii închise $L_1, \ldots, L_{n+1}$ fără puncte comune, dintre care ultima le include pe celelalte (fig. 13).

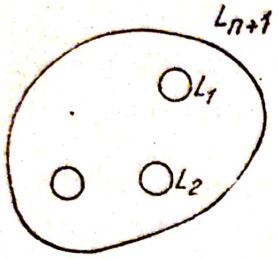


Fig. 13

În cazul domeniilor infinite, L_{n+1} lipseşte, iar D reprezintă planul infinit (cu golurile mărginite de $L_1, \ldots, L_n$). Fiecare linie de contur închisă se va presupune simplă (fără a se intersecta cu ea însăşi).

Pentru $x = 0$ vom avea un domeniu simplu conex. În cazul unui domeniu multiplu conex, D, mărginit de un contur L_{n+1} şi avînd în interior goluri mărginite de liniile închise $L_1, \ldots, L_n$, continui sau continui pe porţiuni fără intersecţii, funcţia sau funcţiile de reprezentare sînt în general multiforme. Dacă însă separăm din domeniul dat porţiuni simplu conexe, funcţiile de reprezentare vor fi olomorfe şi uniforme în aceste domenii luate în parte. Aceasta se realizează în modul următor. Fixăm valorile constantelor care intervin în formulele de reprezentare în subdomeniul D', funcţiile fiind în acesta uniforme. Prin prelungirea analitică a acestora vor apare însă multiformităţi exprimate de nedeterminările stabilite pentru funcţiile de reprezentare. În acest mod ele rămîn analitice în domeniul total D.

În cele ce urmează precizăm o serie de elemente corelate cu definirea funcţiilor de reprezentare pe linia celor menţionate mai sus.

Printr-un element de linie (contur) continuu, vom înţelege elementul care are o tangentă cu o variaţie continuă; continuitatea pe porţiuni va corespunde unui număr finit de arce continui.

Funcţiile care vor fi definite în asemenea domenii D (exclusiv conturul L) se vor presupune în mod uzual că sînt continue. O funcţie $F(x, y)$ se prelungeşte continuu pe porţiunea L' a conturului L (eventual $L = L'$) dacă se pot prescrie valori ale acestei funcţii pe L', astfel ca ea să fie continuă în $D + L'$.

O funcţie $F(x, y)$ care se poate prelungi continuu pînă la punctul x_0, y_0 pe L se va considera în următorul sens.

Fie x_0, y_0 un punct pe frontieră (conturul) L. Vom presupune că $F(x, y)$ tinde la o limită determinată cînd punctul tinde (pe un drum continuu sau printr-un şir de puncte izolate) către (x_0, y_0).

Se demonstrează că dacă $F(x_0, y_0)$ reprezintă valorile limită ale funcţiei $F(x, y)$ în punctele x_0, y_0 ale unei porţiuni L' ale conturului L, $F(x, y)$ putînd fi prelungită continuu pînă în orice asemenea punct, atunci $F(x_0, y_0)$ este o funcţie continuă de (x_0, y_0) în L'.

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea rezultă că, dacă $F(x, y)$ poate fi prelungită continuu pînă în orice punct al porțiunii L' al frontierei, atunci ea este continuă în $D + L'$ dacă prin $F(x, y)$, pentru (x, y) pe L', se înțelege valorile limită pe L' luate de funcție.

Prin funcții analitice de variabilă complexă într-un domeniu D se definesc funcții care pot fi eventual multiforme dar fiecare ramură a acestora variază continuu (fiind uniformă) într-o parte simplu conexă mărginită a lui D. Funcțiile de variabilă complexă olomorfe se consideră în sensul teoriei generale a acestor funcții (numite într-o serie de tratate și funcții regulate). Funcțiile analitice (ramurile lor uniforme) se dezvoltă în vecinătatea unui punct arbitrar z_0 din D în serie de forma $\Sigma A_n(\zeta-\zeta_0)^n$. Analiticitatea se mai presupune și în D, excluzînd unele puncte izolate, caz în care aceasta se menționează în mod explicit.

O proprietate importantă în aplicații a funcțiilor de variabilă complexă este următoarea. Dacă în domeniile D_1 și D_2 mărginite pe conturul continuu sau continuu pe porțiuni L, se dau respectiv funcțiile olomorfe $F_1(\zeta), F_2(\zeta)$ continui în D_1+L, D_2+L, $(\zeta=x+iy)$, și egale pe L, $F_1(\zeta)=F_2(\zeta)$, atunci funcția $F(\zeta)$, egală cu $F_1(\zeta)$ pentru ζ în D_1+L sau $F_2(\zeta)$ pentru ζ în $D_2 + L$, este olomorfă în domeniul D, reuniune a domeniului D_1, D_2 inclusiv L.

O consecință a acestei proprietăți este următoarea : o funcție olomorfă $F(\zeta)$ în D cu valori limită pe partea L' a frontierei L nule, este nulă în tot domeniul D*).

În cele ce urmează vom utiliza :

Teorema reziduurilor. Reziduul funcției $f(\zeta)$ într-un punct izolat singular a este numărul **)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \operatorname{Rez} f(0), \tag{1}$$

γ fiind un cerc $|\zeta - a| = \rho$ suficient de mic. Conform proprietăților integralelor lui Cauchy, reziduul nu depinde de D presupus suficient de mic.

Dezvoltînd $f(\zeta)$ în serie Laurent

$$f(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(\zeta - a)^n, \tag{2}$$

vom avea $\operatorname{Rez} f(a) = c_{-1}$, reziduul fiind egal cu coeficientul primei puteri negative a dezvoltării în serie Laurent.

---

*) Într-adevăr, fie D' mărginit de L' exterior lui D și $F(\zeta) = 0$ în D'. Atunci, conform celor precedente, $F(\zeta)$ e olomorfă în $D + D'$, fiind nulă peste tot, după cum se știe din teoria funcțiilor analitice. În mod analog, dacă valoarea limită este $C \neq 0$, atunci se arată că $F(\zeta) = C$ (în tot domeniul D), fapt ce rezultă înlocuind în demonstrația de mai sus $F(\zeta)$ cu C.

**) A. Cauchy [1], [2].

Pentru un pol de ordin n avem formula

$$\operatorname{Rez} f(a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{\zeta \to a} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} [(\zeta - a)^n f(\zeta)] \tag{3}$$

care rezultă înmulţind dezvoltarea Laurent

$$f(\zeta) = \frac{c_{-n}}{(\zeta - a)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{\zeta - a} + c_0 \tag{4}$$

cu $(\zeta - a)^n$ şi aplicînd operaţiile dictate de formule.

Dacă în vecinătatea punctului a, $f(\zeta)$ este cîtul a două funcţii analitice

$$f(\zeta) = \varphi(\zeta)/\psi(\zeta), \tag{5}$$

unde $\varphi(a) \neq 0$ iar $\psi(\zeta)$ are în a o derivată de ordinul întîi, atunci formula de mai sus se mai scrie astfel

$$\operatorname{Rez} f(a) = \lim_{\zeta \to a} \frac{\varphi(\zeta)}{\dfrac{\psi(\zeta) - \psi(a)}{\zeta - a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{6}$$

Prima teoremă a reziduurilor este următoarea:

Fie o funcţie $f(\zeta)$ continuă pe frontieră (a domeniului D), analitică în interiorul acestui domeniu peste tot, exclusiv punctele singulare $a_1, \ldots, a_n$. Atunci

$$\int_C f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Rez} f(a_k). \tag{7}$$

§ 17. Elemente generale ale transformării conforme

Vom considera în cele ce urmează unele aspecte principale ale metodei reprezentării conforme, iar apoi vom deduce formulele cu caracter fundamental care intervin în teoria mediilor eterogene necesare rezolvării problemelor la limită cu ajutorul acestei metode. *)

*) Această metodă joacă un rol important în rezolvarea unor probleme din domenii diferite ale ştiinţei ca de exemplu în aero şi hidrodinamică (N. E. Jucovski, S. A. Ciaplighin, M. V. Keldiş), elasticitatea simetrică (G. V. Kolosov, N. I. Mushelişvili), teoria corpurilor termice, magnetice etc. Aplicarea acestor metode în cazul mediilor cu efecte de asimetrie a fost iniţial dată de autor şi R.D. Mindlin.

D'Alembert, L. Euler, K. F. Gauss şi alţii au studiat probleme legate de acest procedeu. B. Riemann l-a considerat în general şi a demonstrat posibilitatea transformării conforme a domeniilor simplu conexe între ele, legîndu-l de aspecte fizice (1851).

Expuneri ale acestei metode sînt date în numeroase cărţi. Ne limităm de a cita o serie de asemenea lucrări în bibliografie.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\zeta = f(\zeta)$ o funcție de variabilă complexă $\zeta = \xi + i\eta$ uniformă și analitică într-un domeniu dat Δ din planul variabilei ζ.

α) Din modul de alegere al funcției de reprezentare $f(\zeta)$ rezultă, după cum se arată în teoria reprezentării conforme, faptul că corespondența între ζ și ζ este de natura unei reprezentări (transformări) conforme *biunivoce*, fiecărui punct din planul ζ corespunzîndu-i un singur punct din planul ζ și invers.

În cele ce urmează vom considera funcțiile $f(\zeta)$ definite mai sus și deci reprezentări biunivoce. De asemenea vom mai considera numai domenii mărginite de unul sau mai multe contururi simple închise.

β) O altă consecință ce rezultă din alegerea funcției $f(\zeta)$ se referă la reprezentarea funcției $f(\zeta)$ în diferite cazuri. Astfel, dacă domeniul D în planul ζ și domeniul D în planul ζ sînt nemărginite, $f(\zeta)$ se exprimă cu ajutorul unor funcții olomorfe într-un domeniu nemărginit *) Δ. Mai precis, dacă în particular domeniul Δ este mărginit iar D nemărginit, $f(\zeta)$ va lua valoarea ∞ în Δ, căci în caz contrar nu vom mai avea în Δ un punct căruia să-i corespundă punctul de la infinit al lui D. Atunci rezultă că $f(\zeta)$ are în acel punct un pol simplu. Dacă de exemplu acest punct este $\zeta = \infty$, $\zeta = 0$, avem $f(\zeta) = \frac{R}{\zeta} + f^*(\zeta)$ iar $f^*(\zeta)$ este o funcție olomorfă în Δ; R fiind o constantă. În cazul cînd această reprezentare nu ar avea loc, apărînd alte singularități, reprezentarea nu ar mai fi biunivocă. Dacă, în particular, D, Δ sînt nemărginite, iar pentru $\zeta = \infty$ avem $\zeta = \infty$, atunci $f(\zeta) = R + f^*(\zeta)$, fiind olomorfă.

γ) Din biunivocitatea reprezentării rezultă că nu are loc o reprezentare a unui domeniu simplu conex pe un domeniu multiplu conex. Limitîndu-ne la cazul unor domenii simple conexe mărginite de cîte un contur închis, se poate arăta atunci că există o reprezentare a acestora, continuă, inclusiv pe frontieră iar aceasta poate fi astfel aleasă încît să existe o corespondență (biunivocă) între două puncte arbitrar alese ζ_0 în Δ și ζ_0 în D, cît și între direcțiile unor elemente de linie ce trec prin ζ_0 și ζ arbitrar alese. Alegerea acestor puncte și direcții determină complet funcția de reprezentare.

δ) Un alt rezultat demonstrat în teoria reprezentării conforme, consecință a caracterului biunivoc al acesteia, este faptul că $f'(\zeta) = \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta}$ nu se poate anula în domeniul Δ al variabilei ζ. În aplicarea procedeului reprezentării conforme interesează însă și comportarea acestei derivate și în vecinătatea frontierei și anume dacă aceasta se poate

*) Prin definiție, acestea sînt funcții olomorfe în orice subdomeniu finit din Δ, care pentru $|\zeta|$ suficient de mare e reprezentabilă prin seria

$$a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \cdots$$

Fie $\zeta = f(\zeta)$ o funcție de variabilă complexă $\zeta = \xi + i\eta$ uniformă și analitică într-un domeniu dat Δ din planul variabilei ζ.

α) Din modul de alegere al funcției de reprezentare $f(\zeta)$ rezultă, după cum se arată în teoria reprezentării conforme, faptul că corespondența între ζ și ζ este de natura unei reprezentări (transformări) conforme *biunivoce*, fiecărui punct din planul ζ corespunzîndu-i un singur punct din planul ζ și invers.

În cele ce urmează vom considera funcțiile $f(\zeta)$ definite mai sus și deci reprezentări biunivoce. De asemenea vom mai considera numai domenii mărginite de unul sau mai multe contururi simple închise.

β) O altă consecință ce rezultă din alegerea funcției $f(\zeta)$ se referă la reprezentarea funcției $f(\zeta)$ în diferite cazuri. Astfel, dacă domeniul D în planul ζ și domeniul D în planul ζ sînt nemărginite, $f(\zeta)$ se exprimă cu ajutorul unor funcții olomorfe într-un domeniu nemărginit *) Δ. Mai precis, dacă în particular domeniul Δ este mărginit iar D nemărginit, $f(\zeta)$ va lua valoarea ∞ în Δ, căci în caz contrar nu vom mai avea în Δ un punct căruia să-i corespundă punctul de la infinit al lui D. Atunci rezultă că $f(\zeta)$ are în acel punct un pol simplu. Dacă de exemplu acest punct este $\zeta = \infty$, $\zeta = 0$, avem $f(\zeta) = \frac{R}{\zeta} + f^*(\zeta)$ iar $f^*(\zeta)$ este o funcție olomorfă în Δ; R fiind o constantă. În cazul cînd această reprezentare nu ar avea loc, apărînd alte singularități, reprezentarea nu ar mai fi biunivocă. Dacă, în particular, D, Δ sînt nemărginite, iar pentru $\zeta = \infty$ avem $\zeta = \infty$, atunci $f(\zeta) = R + f^*(\zeta)$, fiind olomorfă.

γ) Din biunivocitatea reprezentării rezultă că nu are loc o reprezentare a unui domeniu simplu conex pe un domeniu multiplu conex. Limitîndu-ne la cazul unor domenii simple conexe mărginite de cîte un contur închis, se poate arăta atunci că există o reprezentare a acestora, continuă, inclusiv pe frontieră iar aceasta poate fi astfel aleasă încît să existe o corespondență (biunivocă) între două puncte arbitrar alese ζ_0 în Δ și ζ_0 în D, cît și între direcțiile unor elemente de linie ce trec prin ζ_0 și ζ arbitrar alese. Alegerea acestor puncte și direcții determină complet funcția de reprezentare.

δ) Un alt rezultat demonstrat în teoria reprezentării conforme, consecință a caracterului biunivoc al acesteia, este faptul că $f'(\zeta) = \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta}$ nu se poate anula în domeniul Δ al variabilei ζ. În aplicarea procedeului reprezentării conforme interesează însă și comportarea acestei derivate și în vecinătatea frontierei și anume dacă aceasta se poate

*) Prin definiție, acestea sînt funcții olomorfe în orice subdomeniu finit din Δ, care pentru $|\zeta|$ suficient de mare e reprezentabilă prin seria

$$a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \cdots$$

anula într-un punct pe contur. În această privință dăm răspunsul *). În acest scop vom considera un domeniu Δ mărginit de un cerc γ de rază $|\zeta| = 1$, cu centrul în origină. În baza aliniatului precedent avem de considerat o funcție continuă inclusiv pe frontiera γ, unde aceasta ia valoarea $f(\sigma)$, $\sigma = e^{i\theta}$ (pe cercul unitate). Se demonstrează atunci următoarea proprietate a funcției $f(\zeta)$:

Dacă conturul domeniului D în planul variabilei este caracterizat prin funcții coordonate avînd derivate în raport cu arcul continue pînă la ordinul al doilea (conturul avînd astfel o curbură ce variază continuu), atunci funcția derivată $f'(\zeta)$ poate fi prelungită în mod contiuuu pe conturul γ, luînd pe γ valorile limită :

$$f'(\sigma) = \frac{df(\sigma)}{d\sigma} \neq 0 \qquad \text{pe } \gamma. \tag{1}$$

În continuare se mai arată următoarele :

Dacă conturul domeniului D este caracterizat prin funcții coordonate avînd derivate de ordinul al treilea în raport cu elementul de arc continui, atunci derivata de ordinul doi a funcției de reprezentare poate de asemenea să fie prelungită continuu pe γ, luînd valoarea la limită

$$f''(\sigma) = \frac{df'(\sigma)}{d\sigma}. \tag{2}$$

În aplicarea procedeului reprezentării conforme, ne limităm în cadrul condițiilor pentru care aceste proprietăți sînt îndeplinite.

ε) O observație importantă în aplicație este următoarea : Transformarea prin inversiune

$$\zeta = 1/\zeta_1$$

reprezintă domeniul D, ($|\zeta| < 1$), pe planul nemărginit $|\zeta_1| > 1$ (cu un gol circular în origină). Atunci, dacă D este reprezentat pe Δ, el va fi reprezentat și pe planul nemărginit cu gol circular. Această reprezentare a domeniilor simplu-conexe nemărginite este convenabilă într-o serie de aplicații.

φ) Conform biunivocității reprezentării, domeniile multiplu conexe se reprezintă conform pe domenii de același ordin de conexiune**). În

*) Acest aspect este expus în lucrări de specialitate în condiții mai generale (N. I. Smirnov). În vederea aplicării în teoria simetrică a elasticității, N. I. Mushelișvili expune de asemenea aceste aspecte [3].

**) Un domeniu dublu-conex este reprezentabil pe o coroană circulară. Se remarcă însă faptul că raportul razei interioare și cea exterioară a conturului coroanei are o valoare determinată care depinde de forma domeniului D. În acest fel rezultă faptul că în cazul domeniilor multiplu conexe, alegerea acestora nu poate fi cu totul arbitrară.

Scanned with OKEN Scanner

legătură cu aceste reprezentări sînt utile unele rezultate generale din literatură. Ne limităm de a enunța următoarele proprietăți, utilizate și în teoria simetrică a elasticității *).

A°. $z = f(\zeta)$ este o reprezentare conformă a domeniului D pe Δ din interiorul conturului L, dacă :

α') Δ este un domeniu conex din planul ζ, limitat de un contur simplu închis γ (sau nemărginit).

β') $f(\zeta)$ este o funcție olomorfă (inclusiv punctul de la infinit dacă planul este nemărginit), continuă inclusiv pe contur ;

γ') L este un contur simplu închis în planul z parcurs în același sens ca și γ (la puncte diferite ale lui γ se presupune că corespund puncte diferite ale lui L).

Reciproca este de asemenea valabilă.

B°. $z = f(\xi)$ este o reprezentare conformă a domeniului Δ pe D din interiorul curbelor $L_1, \ldots L_k$, dacă :

α') Δ este un domeniu multiplu conex mărginit de curbele simple, închise, $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, fără puncte comune, eventual infinit ;

β') $f(\zeta)$ este olomorfă în Σ și continuă pe frontieră, $L_1, \ldots, L_k$ sînt contururi simple închise, fără puncte comune, mărginind domeniul D, parcurse în același sens ca și $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$. Presupunem că z parcurge frontierea lui D în sens pozitiv atunci cînd ζ parcurge frontiera lui Δ în sens pozitiv — sensul pozitiv corespunde sensului pentru care interiorul domeniului este în stînga.

Reciproca este de asemenea valabilă.

§ 18. Transformarea conformă pe un contur circular și coordonate curbilinii

În vederea utilizării reprezentării conforme a unui domeniu dat D din planul complex $z = x + iy$ pe un domeniu Δ din planul complex $\zeta = \xi + i\eta$, avînd forma unui cerc, inel circular sau plan infinit cu gaură circulară, $\zeta = 0$ corespunzînd centrului, se utilizează coordonatele polare ρ și θ în planul ζ :

$$\zeta = \rho e^{i\theta} \qquad (1)$$

Curbele coordonate în acest plan vor fi $\rho = \text{const.}$ și $\theta = \text{const.}$ (cercuri concentrice sau raze). ρ, θ apar drept coordonate curbilinii în planul z. Curbele $\rho = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ sînt ortogonale.

Vom deosebi următoarele două situații :

α) D constituie un domeniu finit mărginit de conturul închis simplu L iar Δ este un cerc de rază unitate ($\rho = 1$) cu centrul în punctul $\zeta = 0$. Se poate pune întotdeauna în corespondență, prin transformarea conformă, punctele $z = 0$ și $\zeta = 0$. Conturul în planul z corespunzător curbei $\rho = \text{const.}$

*) N. I. Mushelișvili [3], § 47, după W. F. Osgood [1].

Scanned with OKEN Scanner

va fi, de asemenea, o linie închisă în jurul punctului $\zeta = 0$. Pentru $\rho = 1$ va fi chiar conturul L. Atunci curbele $\theta = \text{const.}$ trec prin $\zeta = 0$ și se sprijină pe L.

β) D constituie un domeniu infinit, mărginit de un contur închis simplu L iar D este planul infinit cu gol circular. Presupunem că punctele $\zeta = \infty$ și $\zeta = \infty$ se află în corespondență prin transformarea conformă, fapt care se arată că este întotdeauna posibil. Atunci curbele $\rho = \text{const.}$ sînt închise în jurul lui L iar curbele $\theta = \text{const.}$ se sprijină pe L și merg la infinit (cazul reprezentării conforme a lui D pe exteriorul cercului $|\zeta| < 1$).

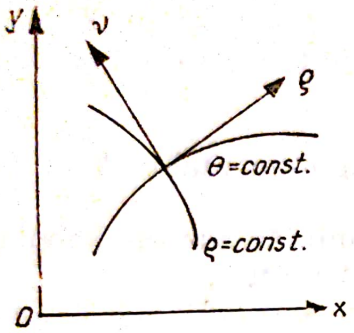


Fig. 14

Mai putem considera și următorul caz:

γ) Domeniul D este mărginit de două contururi închise și se reprezintă pe interiorul unui inel circular în Δ.

Fie $f(\zeta)$ funcția de transformare conformă astfel că

$$\zeta = f(\zeta) = f(\rho\, e^{i\theta}). \tag{2}$$

Sistemul de axe (ρ, θ), tangente la curbele $\theta = \text{const.}$, $\rho = \text{const.}$ respectiv, este astfel orientat încît sensul de rotație de la axa (ρ) la (θ) să fie invers mersului acelor de ceas. În acest fel, transformarea conformă nu schimbă sensul sistemului de referințe (fiind același ca pentru Oxy). (Vezi de ex. fig. 14).

Fie V_ρ, V_θ proiecțiile pe axele (ρ), (θ) ale vectorului $\vec{V}(V_x, V_y)$ în planul ζ cu origina în punctul de afix ζ.

Deoarece

$$V_\rho = V_x \cos\nu + V_y \sin\nu, \quad V_\theta = -V_x \sin\nu + V_y \cos\nu, \tag{3}$$

unde V reprezintă unghiul făcut de axa (ρ) cu Ox, avem

$$V_\rho + iV_\theta = e^{-i\nu}(V_x + iV_y), \tag{4}$$

V_x, V_y fiind proiecțiile pe axele Ox, Oy ale aceluiași vector. Unghiul ν se determină luînd creșterea $d\zeta$ în sensul axei căreia îi va corespunde o creștere $d\zeta$ în sensul radial. Atunci au loc relațiile $d\zeta = e^{i\nu}|d\zeta|$, $d\zeta = e^{i\theta}|d\zeta|$ și deci

$$e^{-i\nu} = \frac{d\bar{\zeta}}{|d\zeta|} = \frac{\overline{f'(\zeta)\,d\zeta}}{|f'(\zeta)|\cdot|d\zeta|} = e^{-i\theta}\frac{\overline{f'(\zeta)}}{|f'(\zeta)|} = \frac{\bar{\zeta}}{\rho}\frac{\overline{f'(\zeta)}}{|f'(\zeta)|}. \tag{5}$$

În acest fel determinăm pe ν independent de creșterea considerată, iar

$$V_\rho + iV_\theta = \frac{\bar{\zeta}}{\rho}\frac{\overline{f'(\zeta)}}{|f'(\zeta)|}(V_x + iV_y). \tag{6}$$

§ 19. Funcții de transformare conformă pe cercul unitate pentru studiul concentrării tensiunilor în jurul golurilor

În cazul studiului concentrării tensiunilor, domeniile care interesează sînt planele inclusiv punctul de la infinit cu gol în formă de dreptunghi, pătrat, triunghi, trapez etc. O primă problemă care ne apare în interes practic este aceea dacă orice asemenea domeniu poate fi reprezentat conform pe interiorul cercului unitate, astfel încît să se poată rezolva pe această cale problemele la limită asociate. Răspunsul la această problemă îl dă teorema lui Riemann.

Această teoremă este valabilă în cazul unor goluri poligonale, deci cu margini drepte pe porțiuni, goluri care, conform reprezentării lui Jordan, pot fi reprezentate în formă parametrică : $x(t)$, $y(t)$. Intervalul $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ în care variază parametrul t se poate deci împărți într-un număr finit de părți, astfel ca în fiecare din aceste părți funcțiile $x(t)$ și $y(t)$ să admită derivate $x'(t)$ și $y'(t)$ continui care să nu fie simultan nule. În alți termeni, conturul golului va fi format dintr-un număr finit de drepte cu orientări diferite. Teorema menționată se referă la existența funcției $z = f(\zeta)$ pentru reprezentarea conformă a exteriorului unui asemenea domeniu pe interiorul cercului unitate. Funcția de reprezentare nu poate fi stabilită pe baza unui procedeu unitar, această funcție rezultînd prin construcții analitice înainte de fixarea domeniului la care se poate aplica.

În cele ce urmează vom indica o serie de funcții de transformare.

Elipsa. Pentru elipsa $x^2/p^2 + y^2/q^2 = 1$ funcția de transformare este

$$z = f(\zeta) = c\left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta\right) \tag{1}$$

în care $c = Re^{i\delta}$. Notăm că $|m| \leqslant 1$ ia valorile $m = 0$ pentru cerc și $m = \pm 1$ pentru o tăietură de lungime $4R$ situată pe axa Oy sau Ox. În funcție de valorile lui δ, axa mare a elipsei are înclinări δ diferite față de axa Ox. Pentru $\delta = 0$, ecuațiile parametrice ale conturului eliptic sînt

$$x = R(1 + m)\cos\theta, \quad y = -R(1 - m)\sin\theta. \tag{2}$$

p și q fiind semiaxele elipsei corespunzătoare valorilor coordonatelor pentru $\theta = 90°, 0°$ rezultă următoarele relații utile

$$k = \frac{q}{p} = \frac{R(1 - m)\sin 90°}{R(1 + m)\cos 0°} = \frac{1 - m}{1 + m}. \tag{3}$$

Se deduc formulele pentru excentricitate și rază medie

$$m = \frac{1 - k}{1 + k} = \frac{p - q}{p + q}, \quad R = \frac{p + q}{2}. \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcția de transformare corespunzătoare valorii $\delta = 0$ este

$$\zeta = f(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta\right) = \frac{p+q}{2}\cdot\frac{1}{\zeta} + \frac{p-q}{2}\zeta. \tag{5}$$

Pătratul. Funcția

$$\zeta = f(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta^3}{9}\right) \tag{6}$$

transformă pătratul cu colțuri rotunjite pe cercul unitate.

Triunghiul echilateral. Funcția de transformare este

$$\zeta = f(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta^2}{4}\right). \tag{7}$$

Colțurile triunghiului sînt de asemenea rotunjite.

Poligonul regulat. Conform formulei lui Schwarz-Christoffel, funcția de reprezentare pe exteriorul sau interiorul cercului unitate este

$$\zeta = f(\zeta) = c\int_1^{\zeta}(t-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(t-a_n)^{\alpha_n-1}\frac{dt}{t^2} + d. \tag{8}$$

În cazul reprezentării pe exteriorul cercului unitate, c și d sînt constante complexe arbitrare care precizează poziția poligonului iar $a_1, \ldots, a_n$ sînt puncte pe cercul unitate $|\zeta| = |\xi + i\eta| = 1$ care corespund vîrfurilor $A_1, \ldots, A_n$ ale poligonului. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sînt constante pozitive reale care determină valorile unghiurilor exterioare ale poligonului în multipli de $\pi \cdot t$ este un punct al domeniului exterior cercului. Reprezentarea este continuă pînă pe contur, cu excepția punctelor $a_1, \ldots, a_n$ în care $f'(\zeta)$ se anulează iar caracterul conform al reprezentării dispare. Deoarece $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = n + 2$, transformarea mai poate fi pusă sub forma următoare

$$f(\zeta) = c\int_1^{\zeta}\left(1-\frac{a_1}{t}\right)^{\alpha_1-1}\ldots\left(1-\frac{a_n}{t}\right)^{\alpha_n-1}dt. \tag{9}$$

Deoarece $|a_n| = 1$ și $|t| \geqslant 1$, este posibil de a dezvolta în serie și apoi integra funcția de sub semnul integralei

$$f(\zeta) = c\left\{\zeta - [(\alpha_1-1)a_1 + \ldots + (\alpha_n-1)a_n]\ln\zeta + \frac{e_1}{\zeta} + \frac{e_2}{\zeta^2} + \ldots\right\}. \tag{10}$$

În cazul reprezentării conforme între domenii simplu conexe, este necesar și suficient ca

$$(\alpha_1 - 1)a_1 + \ldots + (\alpha_n - 1)c_i = 0.$$

Dreptunghiul. În cazul unui dreptunghi ca în figurile 15, avînd în centrul său origina coordonatelor, vom considera reprezentarea vîrfurilor sale pe cercul unitate din planul ζ în punctele $a_1, \ldots, a_4$. Aceste din urmă puncte pot fi astfel alese încît să se păstreze raportul laturilor dreptunghiului. Se pot alege trei puncte din patru, de exemplu a_1, a_2, a_3 astfel că a_1 și a_2 să fie simetrice față de axa $O\xi$ iar iar a_2 și a_3 față de axa $O\zeta$. Din

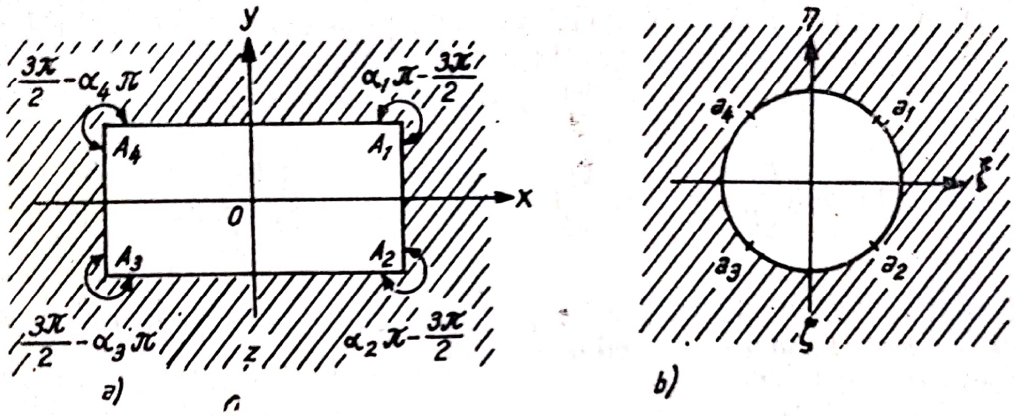


Fig. 15

motive de simetrie rezultă că a_3 și a_4 sînt simetrice față de axa $O\xi$ iar a_1 și a_4 față de axa $O\eta$.

Fie k raportul laturilor. Atunci vîrfurile poligonului vor fi situate în punctele

$$a_1 = e^{k\pi i}, \quad a_2 = e^{(2-k)\pi i}, \quad a_3 = e^{(1+k)\pi i}, \quad a_4 = e^{(1-k)\pi i} \tag{11}$$

Pentru $k < 1/4$, dreptunghiul este situat ca în figură și anume cu latura mare paralelă cu axa Ox. Pentru $k > 1/4$ latura mare este paralelă cu axa Oy iar pentru $k = 1/4$ avem un pătrat.

În cazul unghiului drept intervin valorile $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 3/2$. Cu ajutorul acestor valori pentru α și conform relațiilor (11), formula lui Schwartz-Christoffel (10) în care înlocuim ζ prin $1/\zeta$ devine — vezi G. N. Savin [2], [5] —

$$\delta = f(\zeta) = c\left\{\frac{1}{\zeta} + \frac{a+\bar{a}}{2}\zeta + \frac{(a-\bar{a})^2}{24}\zeta^3 + \frac{(a^2-\bar{a}^2)(a-\bar{a})}{80}\zeta^5 + \right.$$

$$+ \frac{5(a^4+\bar{a}^4) - 4(a^2+\bar{a}^2) - 2}{896}\zeta^7 + \frac{7(a^5+\bar{a}^5) - 5(a^3+\bar{a}^3) - 2(a+\bar{a})}{2304}\zeta^9 +$$

$$\left. + \frac{21(a^6+\bar{a}^6) - 14(a^4+\bar{a}^4) - 5(a^2+\bar{a}^2) - 4}{11264}\zeta^{11} + \cdots \right\} \tag{12}$$

pentru $a = e^{2k\pi i}$, $\bar{a} = e^{-2k\pi i}$. Exteriorul dreptunghiului este astfel reprezentat pe interiorul cercului unitate.

Dacă în formula precedentă ne limităm la termeni pînă la un anumit ordin, dreptunghiul va fi înlocuit de o figură cu laturi curbe și colțuri rotunjite. Deoarece $|a| = 1$, se poate constata că seria (12) este rapid convergentă, putînd oricînd ameliora precizia rezultatelor prin alegerea unui număr de termeni convenabil.

De exemplu, putem alege o rază R a racordării la colțuri a laturilor care să fie mai mică decît cea rezultată din calcul.

Pentru $a = e^{i\pi/2}$, $\bar{a} = e^{-i\pi/2}$, rezultă transformarea pentru pătrat

$$f(\zeta) = c\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta^3}{6} + \frac{\zeta^7}{56} - \frac{\zeta^{11}}{176} + \frac{\zeta^{15}}{384} - \frac{7\zeta^{19}}{4864} + \dots\right) \tag{13}$$

iar pentru $a = e^{i\pi/3}$, $(k = 1/6)$, rezultă transformarea pentru un dreptunghi la care raportul laturilor este 3, 2

$$f(\zeta) = c\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta}{2} - \frac{\zeta^3}{8} - \frac{3}{80}\zeta^5 - \frac{3}{896}\zeta^7 + \frac{5}{768}\zeta^9 + \frac{57}{11264}\zeta^{11} + \dots\right). \tag{14}$$

Pentru $a = e^{10\pi/36}$, raportul este 5 :

$$f(\zeta) = c\left(\frac{1}{\zeta} + 0{,}643\,\zeta - 0{,}098\,\zeta^3 - 0{,}038\,\zeta^5 - 0{,}011\,\zeta^7 + \dots\right). \tag{15}$$

Revenind la cazul mai general al poligonului regulat, se poate arăta, ca în cazul dreptunghiului, că punctele $a_1, \dots, a_n$ de pe cercul unitate îl împart în părți egale. Prin rotirea cercului putem face ca $a_1 = 1$ și deci

$$a_1 = 1,\ a_2 = e^{2\pi i/n},\ a_3 = e^{4\pi i/n},\ \dots,\ a_n = e^{2(n-1)\pi i/n},$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1 + 2/n. \tag{16}$$

n este numărul laturilor poligonului regulat.

Înlocuind în (8) valorile de mai sus și presupunînd că centrul cercului corespunde centrului poligonului, rezultă

$$f(\zeta) = c\int_1^{\zeta} (t - e^{2\pi i/n})^{2/n} \dots (t - e^{2(n-1)\pi i/n})^{2/n} \frac{dt}{t^2}. \tag{17}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dezvoltînd în serie în jurul punctului de la infinit, apoi integrînd și substituind ζ cu $1/\zeta$, rezultă reprezentarea pe interiorul cercului unitate — vezi monografia menționată mai înainte, a lui G. N. Savin —

$$f(\zeta) = c\left\{\frac{1}{\zeta} + \frac{2}{n(n-1)}\zeta^{n-1} + \frac{n-2}{n^2(n-1)}\zeta^{2n-1} - \frac{(n-2)(2n-2)}{3n^3(3n-1)}\zeta^{3n-1} + \right.$$

$$+ \frac{(n-2)(2n-2)(3n-2)}{12\ n^4(4n-1)}\zeta^{4n-1} -$$

$$\left. - \frac{(n-2)(2n-2)(3n-2)(4n-2)}{60\ n^5(5n-1)}\zeta^{5n-1} + \ldots \right\}, n = 3,\ 4,\ 5. \quad (18)$$

Luînd $\zeta = \rho^{i\theta}$, $\rho = 1$ și separînd partea reală de cea imaginară, rezultă forma parametrică a ecuației conturului.

Pentru $n = 3$ decurge reprezentarea pentru triunghiul echilateral:

$$f(\zeta) = c\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta^2}{3} + \frac{\zeta^5}{45} + \frac{\zeta^8}{162} + \frac{7}{2673}\zeta^{11} + \ldots\right) \quad (19)$$

iar pentru $n = 4$, pătratul rotit cu un unghi egal cu $\pi/4$ față de pătratul definit în (13),

$$f(\zeta) = c\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta^3}{6} + \frac{\zeta^7}{56} + \frac{\zeta^{11}}{176} + \ldots\right). \quad (20)$$

În continuare vom mai da o serie de transformări conforme care corespund unor contururi cu o formă mai complicată. Aceste transformări se pot utiliza în mod analog celor expuse mai sus.

Semicercul. Funcția care reprezintă conform exteriorul cercului unitate pe exteriorul planului cu un gol semicircular ca în figura 16 este

$$f(\zeta) = R\left(\zeta + \sum_{k=1}^{n} a_k\ \zeta^{-k}\right) \quad (21)$$

în care

$$n = 5,\ a_1 = -0{,}31250,\ a_2 = -0{,}15625,\ a_3 = -0{,}05078,$$

$$a_4 = 0{,}00195,\ a_5 = 0{,}0015113.] \quad (22).$$

R este o constantă depinzînd de dimensiunile golului și poziția acestuia în raport cu axele de coordonate.

Scanned with OKEN Scanner

Luînd $\zeta = \rho e^{i\theta}$, $\rho = 1$, se obţin ecuaţiile conturului

$$x = R[0{,}68750\ \cos\theta - 0{,}15625\ \cos\ 2\theta - 0{,}05078\ \cos\ 3\theta + \\ + 0{,}00195\ \cos\ 4\theta + 0{,}01513\ \cos 5\theta],$$
$$y = R[1{,}31250\ \sin\ \theta + 0{,}15625\ \sin\ 2\theta + 0{,}05078\ \sin 3\theta - \\ - 0{,}00195\ \sin\ 4\theta - 0{,}01513\ \sin 5\theta]. \qquad (23)$$

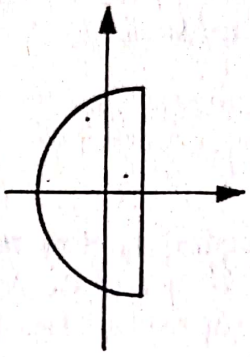


Fig. 16

Ogiva. Pentru transformarea (21) în care

$$a_1 = 0{,}14153,\ a_2 = 0{,}06795,\ a_3 = -0{,}10130,\ a_4 = 0{,}03873, \\ a_5 = 0{,}00194 \qquad (24)$$

se obţine transformarea exteriorului cercului unitate pe exteriorul ogivei din figura 17.

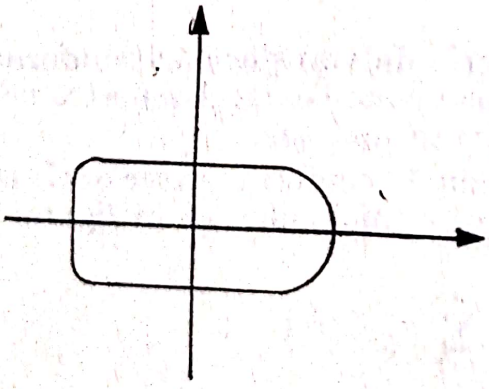


Fig. 17

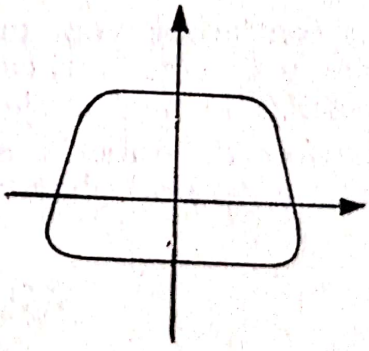


Fig. 18

Ecuaţiile conturului sînt

$$x = R\ [1{,}14153\ \cos\theta + 0{,}06795\ \cos\ 2\theta - 0{,}10130\ \cos\ 3\theta + \\ + 0{,}03873\ \cos\ 4\theta + 0{,}00194\ \cos 5\theta],\ y = R\ [0{,}85847\ \sin\ \theta - \qquad (25)$$
$$0{,}06795\ \sin\ 2\theta + 0{,}10130\ \sin 3\theta - 0{,}03873\ \sin\ 4\theta - 0{,}00194\ \sin 5\theta].$$

Scanned with OKEN Scanner

Trapezul. Transformarea (21) în care intervin alte valori ale coeficienților corespunde cazului trapezului din figura 18. Pentru

$$f(\zeta)=R\left[\zeta-0{,}0086+\frac{0{,}0167}{\zeta}+\frac{0{,}058}{\zeta^2}-\frac{0{,}1405}{\zeta^3}-\frac{0{,}0109}{\zeta^4}\right] \quad (26)$$

se obține de asemenea o transformare pentru trapez. (v ezi A. A. Boim,])

§ 20. Seriile Fourier complexe

Reducerea problemelor pentru unele medii eterogene și anume acelea caracterizate numai prin tensiuni (eventual ale teoriei simetrice) la probleme la limită ale funcțiilor de variabilă complexă, permite rezolvarea a numeroase cazuri de interes practic foarte diferit. Deoarece procedeele utilizate necesită utilizarea seriilor Fourier, vom da în prealabil o scurtă mențiune a elementelor cunoscute din literatura de specialitate referitoare la aceste serii, elemente care stau la baza atît a metodei elaborate de N. I. Mushelișvili pentru teoria simetrică, cît și la baza procedeelor relative la teoria extinsă expusă în continuare.

Deși exemplele au un caracter limitat, ele pot fi extinse cu ajutorul determinat.

Fie o funcție reală definită într-un interval $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, dezvoltabilă în serie Fourier.

Pentru aceasta este necesar să se satisfacă anumite condiții (ale lui Dirichlet) și anume să fie continuă în intervalul dat, exceptînd un număr finit de discontinuități *) de prima speță și să aibă cel mult un număr finit de extreme. În baza definiției discontinuităților de prima speță, rezultă că $f(\theta)$ are limite determinate la stînga și la dreapta $f(+0)$, $f(2\pi-0)$ iar atunci seria Fourier

$$f(\theta)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos k\theta+\beta_k\sin k\theta) \quad (1)$$

avînd coeficienții

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos k\theta\,d\theta,\ \beta_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin k\theta\,d\theta \quad (2)$$

*) O discontinuitate de prima speță este o discontinuitate pentru care, cînd argumentul θ tinde către către punctul de discontinuitate θ_0 de la stînga la dreapta, funcția $f(\theta)$ tinde spre limite finite (la stînga sau la dreapta acestui punct) notate $f(\theta_0-0)$ respectiv $f(\theta_0+0)$.

converge în toate punctele intervalului $(0,2\pi)$, însă în punctele de discontinuitate $\theta = \theta_0$ are valoarea

$$(f(\theta_0 - \theta) + f(\theta_0 + 0)/2. \tag{3}$$

La capetele intervalului ia valoarea

$$(f(+0) + f(2\pi - 0))/2. \tag{4}$$

Funcţia fiind şi continuă în tot intervalul $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ iar $f(0) = f(2\pi)$, atunci seria Fourier dă valoarea lui $f(\theta)$ în tot intervalul $(0,2\pi)$ şi converge uniform *).

În calcule este util de a transforma dezvoltarea în serie astfel încît acestea să devină serii de puteri (exponenţiale). Pentru aceasta, grupînd termenii şi aplicînd relaţiile între funcţiile trigonometrice reale şi exponenţiale, rezultă seria

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{8}\left(a_k e^{ik\theta} + a_{-k} e^{-ik\theta}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\theta}. \tag{5}$$

Apar noii coeficienţi

$$a_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad a_{-k} = \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2}, \quad a_k = \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2}. \tag{6}$$

Înlocuind α_k, β_k daţi din formulele anterioare (2), deducem

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{-ik\theta}\, d\theta, \tag{7}$$

formulă care se obţine înmulţind termenii dezvoltării lui $f(\theta)$ în serie de exponenţiale cu $e^{-ik\theta}$ şi integrînd de la 0 la 2π. k fiind presupus întreg, sau nul, vom avea condiţiile auxiliare

$$\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} f(\theta)\, d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta}\, d\theta. \tag{8}$$

În această formulă, deoarece $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\, d\theta = 2\pi\delta_{0k}$, singurul termen nenul în membrul drept este $2\pi a_k$.

*) Funcţiile care satisfac condiţiile lui Dirichlet se subsumează cazului funcţiilor cu variaţii mărginite iar rezultatele se pot extinde în cazul acestor funcţii.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul general al unei funcții $f_1(\theta) + if_2(\theta)$, f_1 și f_2 fiind reale și dezvoltabile în serie Fourier în intervalul $(0,2\pi)$, se deduce o dezvoltare de același tip și formule analoge pentru a_n, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, înlocuind f cu $f_1 + if_2$ și observînd că a_n, a_{-n} nu sînt în general complex conjugați.

Invers, dîndu-se coeficienții seriei Fourier complexe, se deduc dezvoltările funcțiilor f_1, f_2:

$$f_1(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta),$$
$$f_2(\theta) = \frac{A'_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (A'_k \cos k\theta + B'_k \sin k\theta), \tag{9}$$

ai căror coeficienți se determină în mod univoc prin relațiile

$$\alpha_0 = \frac{A_0}{2}, \quad A_k = \alpha_k + \alpha_{-k}, \quad B_k = -\beta_k + \beta_{-k},$$
$$\beta_0 = \frac{A'_0}{2}, \quad A'_k = \beta_k + \beta_{-k}, \quad B'_k = \alpha_k - \alpha_{-k}. \tag{10}$$

Fie $f(\theta)$ o funcție continuă și cu derivate continui pînă la ordinul dat $n-1$ inclusiv în intervalul $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ (în sensul că fiind continuă în acest interval, la capetele lui valorile ei sînt egale). De asemenea, presupunem că derivata de ordinul n satisface condițiile lui Dirichlet în intervalul considerat (sau are derivate mărginite). Atunci, în baza proprietăților ce se demonstrează pentru aceste funcții, au loc inegalitățile

$$|\alpha_k| < \frac{C}{k^{n+1}}, \quad |\beta_k| < \frac{C}{k^{n+1}}, \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{11}$$

C fiind o constantă pozitivă iar α_k, β_k coeficienții seriei Fourier respective.

În mod absolut analog rezultă că dacă funcțiile f_1, f_2 satisfac condițiile menționate mai sus, coeficienții a_k ai seriei Fourier complexe studiate mai înainte satisfac de asemenea inegalități de aceeași formă

$$|a_k| < \frac{C}{|k|^{n+1}}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{12}$$

Asemenea inegalități au loc și pentru $n = 1$, funcția $f(\theta)$ avînd o derivată de ordinul întîi satisfăcînd condițiile lui Dirichlet. În acest caz, inegalită-

ţile ne arată că seria Fourier a funcţiei $f(\theta)$ este uniform şi absolut convergentă, deoarece convergenţa uniformă este condiţionată numai de continuitatea funcţiei $f(\theta)$ şi de faptul că această funcţie să fie cu variaţie mărginită sau în particular să satisfacă condiţii de tip Dirichlet.

Această proprietate rezultă formînd inegalităţile evidente

$$|\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta| \leqslant |\alpha_k| + |\beta_k| < 2C/k^2 \tag{13}$$

şi deci seria considerată este majorată de o serie cu termeni pozitivi care nu depind de θ:

$$\sum_1^\infty \frac{2C}{k^2} = 2C \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}, \tag{14}$$

termeni mai mari în valoare absolută decît termenii primei serii.

§ 21. Unele proprietăţi ale integralei de tip Cauchy

Pentru obţinerea soluţiilor efective pentru clase de contururi suficient de generale (de ex. reprezentabile conform pe cercul unitate sau semiplan), se pot elabora o serie de metode utilizînd integrala de tip Cauchy). Contururile mărginind domenii multiplu conexe nu vor fi considerate în cadrul acestor metode *).

Vom formula o serie de proprietăţi ale integralei lui Cauchy, fără demonstraţie**).

Fie L un contur simplu neted pe porţiuni şi $f(\zeta)$ o funcţie complexă mărginită şi integrabilă. Presupunînd că punctul ζ nu este situat pe L, $f(\zeta)$ va fi olomorfă în fiecare parte a planului despărţită de L. Alegînd sensul de parcurgere pe sensul invers acelor de ceasornic, L va împărţi planul într-o regiune finită D^+ (la stînga) şi o regiune infinită (la dreapta).

Fie $f(t)$ o funcţie dată pentru orice punct ζ pe L, unde aceasta este continuă. Atunci sînt valabile următoarele teoreme:

I. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca $f(t)$ să fie valoarea la limită a unei funcţii olomorfe în D^+ este:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-\zeta} = 0 \quad \textit{pentru } \zeta \textit{ în } D^-. \tag{1}$$

---

*) N. I. Mushelişvili [3], V. A. Fok [1], D. I. Şerman [1], [2] etc.

În cazul mai general al mediului simplu în teoria simetrică a elasticităţii, au fost de asemenea stabilite reprezentări complexe şi ecuaţii funcţionale asociate problemei vibraţiilor staţionare de către N. Vekua [1], [2]. În cazul teoriei asimetrice pentru medii cu rotaţii constrînse, rezultatele mai generale au fost stabilite de autor [4], [6].

**) Vezi autorii citaţi sau expunerea rezumativă a lui I. N. Sneddon şi D. S. Berry în [1], p. 59.

Scanned with OKEN Scanner

II. O condiție necesară și suficientă pentru ca $f(t)$ să fie valoarea la limită a unei funcții olomorfe în D^-, incluzînd punctul de la infinit, este:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-\zeta} = a \quad \textit{pentru } \zeta \textit{ în } D^+, \tag{2}$$

a fiind o constantă egală cu $f(\infty)$.

Fie L cercul unitate γ. Se mai stabilesc următoarele proprietăți:

I a. *O condiție necesară și suficientă pentru ca funcția $f(\sigma)$ continuă pe γ să fie valoarea la limită a unei funcții olomorfe în afară de γ este:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = 0 \quad \textit{pentru } |\zeta| > 1. \tag{3}$$

II a. *O condiție necesară și suficientă pentru ca funcția $f(\sigma)$ continuă în γ să fie valoarea la limită a unei funcții olomorfe în interiorul lui γ este:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = \bar{a} \quad \textit{pentru } |\zeta| < 1, \tag{4}$$

$\bar{a}$ fiind o constantă egală cu $\overline{f(0)}$.

În cazul cînd L este o linie dreaptă nelimitată pe care o presupunem confundată cu axa reală, iar $f(t)$ este continuă pe L și satisface condiția

$$f(t) = a + 0(|t|^{-\mu}), \quad \mu > 0 \tag{5}$$

pentru $|t|$ suficient de mari, au loc proprietăți analoge. Astfel, D^+ fiind semiplanul superior, au loc teoremele:

III. *O condiție necesară și suficientă pentru ca $f(t)$ să fie valoarea la limită a unei funcții olomorfe în D^+ și continuă în $D^+ + L$ inclusiv punctul de la infinit, este:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-\zeta} = -\frac{a}{2} \quad \textit{pentru } \zeta \textit{ în } D^-. \tag{6}$$

IV. *O condiție necesară și suficientă pentru ca $f(t)$ să fie valoarea la limită a unei funcții olomorfe în D^- și continuă în $D^- + L$ inclusiv punctul de la infinit este:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-\zeta}\,dt = \frac{a}{2} \quad \textit{pentru } \zeta \textit{ în } D^+. \tag{7}$$

Scanned with OKEN Scanner

III a. *O condiție necesară și suficientă pentru ca $f(t)$ să fie valoarea la limită a unei funcții olomorfe în D^- este:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{f(t)}\,dt}{t-\zeta} = -\frac{\overline{a}}{2} \text{ pentru } \zeta \text{ în } D^-. \tag{8}$$

IVa. *O condiție necesară și suficientă pentru ca $f(t)$ să fie valoarea la limită a unei funcții olomorfe în D^+ este:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{f(t)}\,dt}{t-\zeta} = \frac{\overline{a}}{2} \text{ pentru } \zeta \text{ în } D^+. \tag{9}$$

Dacă, de exemplu, ζ tinde către un punct t_0 pe L, trebuie deosebite valorile la limită ale integralei $F(\zeta) = \int f dt \cdot (t-\zeta)^{-1}$ atinse din dreapta sau stînga lui L (dacă acestea există).

În cazul cînd acestea există, funcția $F(\zeta)$ este continuă în L de la stînga și de la dreapta, iar valorile la limită sînt respectiv $F^+(t_0)$, $F^-(t_0)$.

Dacă $f(t)$ satisface condițiile lui Hölder astfel ca pentru orice pereche de puncte t_1, t_2 pe L să aibă loc inegalitățile

$$|f(t_1)-f(t_2)| \leqslant A|t_1-t_2|^{\mu}, \quad (0 \leqslant \mu \leqslant 1), \tag{10}$$

A fiind o constantă pozitivă, iar dacă acestea sînt satisfăcute și într-un punct t_0 diferit de un capăt al lui L, $F^+(t_0)$, $F^-(t_0)$ există efectiv, și sînt date de formulele lui Plemelj

$$F^+(t_0) = \frac{f(t_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{11}$$

$$F^-(t_0) = -\frac{f(t_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{12}$$

integralele reprezentînd valorile principale.

În legătură cu formula de tip Cauchy se mai demonstrează următoarele (L fiind contur simplu, neted):

I'. *$f(\zeta)$ fiind o funcție olomorfă în D^+ și continuă în $D^+ + L$ avem*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-\zeta} = f(\zeta) \text{ pentru } z \text{ în } D^+, \tag{13}$$

$$= 0 \text{ pentru } \zeta \text{ în } D^-. \tag{14}$$

Scanned with OKEN Scanner

II′. *$f(\zeta)$ fiind o funcție olomorfă în D^- inclusiv punctul de la infinit și continuă în $D^- + L$ avem*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-\zeta} = -f(\zeta) + f(\infty) \text{ pentru } \zeta \text{ în } D^-, \tag{15}$$

$$= f(\infty) \text{ pentru } \zeta \text{ în } D^+.$$

III′. *$f(\zeta)$ fiind o funcție olomorfă în D^+ și continuă în $D^+ + L$ excluzînd eventual punctele $a_1, \ldots, a_n$ în D^+, unde poate avea poli cu părțile principale $G_1(\zeta)$, $G_2(\zeta)$, $\ldots$, $G_n(\zeta)$, au loc formulele*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-\zeta} = f(\zeta) - G_1(\zeta) \ldots - G_n(\zeta) \text{ pentru } \zeta \text{ în } D^+, \tag{17}$$

$$= -G_1(\zeta) - \ldots - G_n(\zeta) \text{ pentru } \zeta \text{ în } D^-. \tag{18}$$

IV′. *Fie $f(\zeta)$ o funcție olomorfă în D^- și continuă în $D^- + L$ excluzînd eventual punctele $a_1, \ldots, a_n$ și $\zeta = a$, unde poate avea poli cu părțile principale $G_1(\zeta)$, $G_2(\zeta)$, $\ldots$, $G_\infty(\zeta)$.*

Atunci

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-\zeta} = -f(\zeta) + G_1(\zeta) + \ldots + G_\infty(\zeta) \text{ pentru } \zeta \text{ în } D^-, \tag{19}$$

$$= G_1(\zeta) + \ldots + G_\infty(\zeta) \text{ pentru } \zeta \text{ în } D^+ \tag{20}$$

Un pol de ordin n cu parte principală $G(\zeta)$ al funcției $f(\zeta)$ în punctul a corespunde următoarei forme a acestei funcții în vecinătatea lui a:

$$f(\zeta) = G(\zeta) + f_0(\zeta), \qquad G(\zeta) = \frac{A_1}{\zeta - a} + \frac{A_2}{(\zeta - a^2)} + \ldots + \frac{A_n}{(\zeta - a)^n}, \tag{21}$$

$A_1, \ldots, A_n$ fiind constante, iar $f_0(z)$ o funcție olomorfă în vecinătatea punctului considerat.

V. *Soluția problemei de tip Dirichlet corespunzătoare condiției la limită pe cercul*

$$F(0) + \overline{F(\sigma)} = 2f(0) \tag{22}$$

este

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\theta)\,\frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta}\,\frac{d\sigma}{\sigma} + ic, \tag{23}$$

Scanned with OKEN Scanner

c fiind o constantă reală arbitrară iar $\sigma = e^{i\theta} F(\zeta)$ *este olomorfă în interiorul lui* γ. *Pentru* $\zeta = \rho e^{i\psi}$ *rezultă formula lui Poisson*

$$\operatorname{Re} F(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \rho^2) f(\theta)\, d\theta}{1 - 2\rho \cos(\theta - \psi) + \rho^2}. \tag{24}$$

VI. *Soluția problemei de tip Neumann corespunzătoare condițiilor la limită*

$$\frac{d}{dn} \operatorname{Re} F(\sigma = f(\theta). \tag{25}$$

este dată de formula lui Dini

$$F(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \log r\, d\theta + \text{const.} \tag{26}$$

Proprietățile enunțate sînt corelate sau derivă din următoarea teoremă a lui Harnack:

Dacă L *este un contur simplu închis din* D, *și* D^+, D^- *partea mărginită respectiv nemărginită a planului separate de* L (*care nu se include în aceste părți*), *atunci* $f(t)$ *fiind o funcție reală de punct definită pe* L *și continuă pe acest contur, au loc următoarele proprietăți:*

dacă

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)\, dt}{t - z} = 0 \text{ pentru } z \text{ în } D^+, \tag{27}$$

atunci $f(t) = 0$ *în orice punct din* L;

dacă

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)\, dt}{t - z} = 0 \text{ pentru } z \text{ în } D^-, \tag{28}$$

atunci $f(t) = \text{const.}$ *pe* L.

§ 22. Unele aspecte privind utilizarea funcțiilor analitice generalizate.

În cadrul problemelor fundamentale ale mobilității elastice intervin anumite funcții care constituie extindere a funcțiilor de variabilă complexă. Asemenea funcții satisfac ecuații de forma

$$\frac{\partial W}{\partial z} = AW + \overline{BW} \tag{1}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care A și B sînt matrici pătrate de ordinul doi iar W un vector de ordin doi

$$A = \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} e & f \\ g & h \end{matrix} \right\|, \quad W = \left\| \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right\|, \tag{2}$$

P și Q fiind funcții complexe.

Aplicînd operatorul $4\partial/\partial\bar{\zeta}$, se deduce ecuația

$$\Delta W = 4A \frac{\partial W}{\partial \bar{\zeta}} + 4B \frac{\partial \overline{W}}{\partial \bar{\zeta}}. \tag{3}$$

Sistemul (1) este echivalent cu sistemul de ecuații integrale

$$W(\zeta) + \frac{1}{\pi} \iint_S (AW + B\overline{W}) \frac{dS}{t - \zeta} = \Psi(\zeta) \tag{4}$$

în care $\Psi(\zeta)$ este un vector de ordinul doi olomorf în S.

În particular, dacă W este o funcție complexă $P + iQ$, iar $A = a + ib$, $B = c + id$ constante scalare, sistemul (3) se descompune în ecuațiile reale

$$\Delta P = 2\{(a + c) P_{,x} - (b + d) P_{,y} + (d - b) Q_{,x} + (c - a) Q_{,y}\}, \tag{5}$$

$$\Delta Q = 2\{(b + d) P_{,x} + (a + c) P_{,y} + (a - c) Q_{,x} + (d - b) Q_{,y}\}.$$

Dacă

$$d - b = c - a = 0 \tag{6}$$

sistemul se scindează în două ecuații diferențiale pentru P respectiv Q.

Funcțiile analitice generalizate corespunzătoare ecuațiilor de mai sus au fost aplicate și studiate în scopuri practice ca de exemplu de către L. Bers [1], B. V. Boiarskii [1], [2], T. Carleman [1], V. A. Fok [1], N. Teodorescu [1], N. Vekua [1] și alții.

Scanned with OKEN Scanner

Problema transversală

CAPITOLUL III

În acest capitol se tratează problema la limită corespunzătoare unui cîmp de deplasări definit de o singură componentă nenulă $u_3 = w$, dependentă de variabilele coordonate $x_1 = x$, $x_2 = y$ asociate axelor orientate normal pe axa Ox_3 de-a lungul căreia are loc deplasarea. Această problemă, formulată şi dezvoltată în acest capitol, priveşte în special plăcile plane ale căror secţiuni transversale suportă acţiunea unor tensiuni tangenţiale (eforturi unitare de lunecare) orientate în sens transversal plăcii. Pentru acest motiv problema asociată cîmpului de deplasări astfel definit, a fost denumită problema *transversală*. Deoarece această problemă corespunde cazului unei plăci indeformabile în sens transversal, după cum se va arăta în cuprinsul acestui capitol, ea poate fi corelată cu teoria plăcilor armate sau cu straturi paralele dispuse paralel cu suprafaţa mediană (sandviş). Simplitatea ecuaţiilor de bază permite obţinerea soluţiilor cu ajutorul unor procedee de asemenea simple.

Pe această linie se obţine un model mecanic simplu pentru structuri relativ complexe.

Independent de cele menţionate mai sus, soluţiile problemei transversale pot fi considerate drept aproximaţii sau soluţii parţiale ale unor probleme mai complexe relative la plăci.

A. Formularea problemei transversale

§ 23. Ecuaţiile fundamentale ale problemei transversale

a) Vom admite următorul cîmp de deplasări

$$u = v = 0, \quad w = w(x, y) \tag{1}$$

pentru care au loc următoarele ecuaţii constitutive ale teoriei elasticităţii tensionale cu mobilitate de tip polar

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0, \quad \sigma_{yz} = (\mu + \beta)\, w_{,y}, \quad \sigma_{xz} = (\mu + \beta)\, w_{,x}, \tag{2}$$

$$\sigma_{zy} = (\mu - \beta)\, w_{,y}, \quad \sigma_{zx} = (\mu - \beta)\, w_{,x}, \quad \underset{zx}{\sigma_{xz}} = \sigma_{(zx)} \mp \sigma_{[zx]} \text{ etc.} \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţiile de echilibru (2) din § 11 se reduc la următoarele

$$(\mu - \beta)\,\Delta w = \rho\,\ddot{w} + Z \tag{4}$$

în care intervine operatorul lui Laplace definit în planul (x, y):

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{5}$$

b) Vom considera o placă mărginită de feţele $z = \pm h/2$ şi de o suprafaţă cilindrică avînd generatoarele paralele cu axa Oz. Intersecţia acestei suprafeţe cu planul median $z = 0$ va fi o curbă L. Pe această curbă putem considera următoarele condiţii la limită.

Prima problemă fundamentală la limită. 1) Deplasarea transversală w ia o valoarea anumită $W(x, y)$.

$$w = W(x, y) \text{ pe } L. \tag{6}$$

1') Unghiul într-un plan perpendicular pe elementul de contur descris prin deformare de fibrele iniţial normale la suprafaţa mediană ia o valoare determinată $\vartheta(s)$:

$$\frac{dw}{dn} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos\nu + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\nu = \vartheta(s) \tag{7}$$

$\cos\nu$ şi $\sin\nu$ fiind cosinuşii normalei la elementul ds de contur în planul median.

A doua problemă fundamentală la limită. a) Rezultanta σ a tensiunii tangenţiale

$$\sigma = \sigma_{zx}\cos\nu + \sigma_{zy}\sin\nu \tag{8}$$

pe unitatea de lungime de-a lungul curbei C şi aplicată pe suprafaţa tangenţială ia o valoare determinată $Q(x, y)$:

$$Q(x, y) = (\mu - \beta)\,h\frac{dw}{dn} = \int_{-}^{+}\sigma\,dz, \tag{9}$$

„+" şi „−" reprezintă limitele de integrare $+h/2$ şi $-h/2$.

Comparînd condiţiile (7) şi (9), rezultă egalitatea funcţiilor ϑ şi Q:

$$Q = (\mu - \beta)\,h\vartheta. \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece cosinușii proiecției normalei la suprafața mediană pe planul (x, y) sînt

$$\cos \nu = \frac{dy}{ds}, \sin \nu = -\frac{dx}{ds} \tag{11}$$

(presupunînd un sens de parcurgere pozitiv astfel ca domeniul interior să fie situat la dreapta), rezultă că integrala de-a lungul curbei L a tensiunilor tangențiale pe contur date de (8) are expresia

$$\int_L q\, ds = \int_L (\sigma_{zx}\, dy - \sigma_{zy}\, dx) = \int_D (\sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y})\, dx\, dy = \int_D (\rho \ddot{w} + Z)\, dx\, dy. \tag{12}$$

Integralele de suprafață se extind la întregul domeniu D din interiorul curbei L. S-a aplicat regula transformării integralei pe o curbă închisă într-o integrală pe suprafața mărginită de aceasta.

Se deduce că, în cazul static ($\ddot{w} = 0$) și în lipsa forțelor de masă ($Z = 0$), are loc condiția de echilibru a forțelor aplicate pe contur

$$\int_\sigma \frac{dw}{dn}\, ds = 0. \tag{13}$$

Problema la limită pentru funcția w care satisface conform relației (4) ecuația lui Laplace

$$\Delta w = 0 \tag{14}$$

este de tip Dirichlet în cazul primei probleme la limită (6) și de tip Neumann pentru a doua problemă (7) sau (8). În această din urmă situație, relația (13) constituie condiția de compatibilitate pe care trebuie s-o satisfacă funcția w pentru ca problema la limită să admită o soluție. Aceasta se mai scrie conform condiției (6) astfel

$$\int_L Q\, ds = 0. \tag{15}$$

c) În cele ce urmează ne vom limita la cazul considerat mai sus ($\ddot{w} = 0$, $Z = 0$) și vom introduce funcția $\psi(x, y)$ armonic conjugată cu funcția w:

$$w_{,x} = \psi_{,y},\ w_{,y} = -\psi_{,x}. \tag{16}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă vom considera cosinuşii tangentei t la elementele ds ale curbei L :

$$\cos(t, x) = dx/ds, \quad \cos(t, y) = dy/ds \tag{17}$$

şi derivata de-a lungul acestor elemente

$$\frac{d}{ds} = \cos(t, x)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(t, y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{18}$$

condiţiile de conjugare armonică (16) se vor putea transcrie astfel

$$\frac{dw}{dn} = \frac{d\psi}{ds}, \quad \frac{dw}{ds} = -\frac{d\psi}{dn} \tag{19}$$

astfel încît condiţia la limită (9) capătă forma

$$(\mu - \beta)\, h\frac{d\psi}{ds} = Q(x, y), \text{ (pe conturul } L). \tag{20}$$

Vom presupune conturul L format din $m + 1$ curbe închise L_k $(k = 1, \ldots, m + 1)$, dintre care L_{m+1} constituie frontiera exterioară a domeniului în interiorul căreia sînt situate celelalte contururi. Aşadar domeniul în planul (x, y) corespunzător regiunii ocupate de placă este multiplu conex. În acest caz integrarea conduce la expresia funcţiei ψ :

$$\psi = G + c_k, \quad \text{pe conturul } L_k, \ (k = 1, \ldots, m + 1), \tag{21}$$

c_k sînt constante în general diferite, iar G o funcţie uniformă satisfăcînd (20).

Constantele c_k se pot determina alegînd una din ele în mod arbitrar, de exemplu $c_{m+1} = 0$ şi impunînd condiţia ca funcţia w să fie uniformă în domeniul dat.

În cazul primei probleme fundamentale, funcţia w este complet determinată, ceea ce rezultă imediat din (6) iar în cazul celei de-a doua probleme fundamentale, condiţia (9) ne arată că w este determinată abstracţie făcînd de o constantă.

Deoarece tensiunile (3) se mai scriu sub forma

$$\sigma_{yx} = -(\mu - \beta)\,\psi_{,x}, \quad \sigma_{zx} = (\mu - \beta)\,\psi_{,y}, \tag{22}$$

rezultă că liniile

$$\psi = \text{const.} \tag{23}$$

Scanned with OKEN Scanner

sînt linii ale căror tangente sînt orientate în sensul vectorilor $(-\sigma_{yz}, \sigma_{zz})$ astfel că

$$(\mu - \beta)\, d\psi = -\sigma_{yz}\, dx + \sigma_{zz}\, dy = 0. \tag{24}$$

d) Conform formulelor (7) şi (9) rezultă că efortul de lunecare pe contur se mai exprimă cu ajutorul proiecţiilor Q_x şi Q_y reprezentînd rezultantele eforturilor pe elementele de suprafaţă paralele cu planele coordonate

$$Q = Q_x \cos \nu + Q_y \sin \nu \tag{25}$$

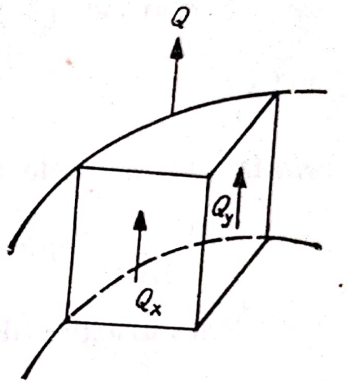


Fig. 19

în care, conform figurii 19,

$$Q_x = (\mu - \beta)\, hw_{,x} = (\mu - \beta)\, h\, G_{,y},$$

$$Q_y = (\mu - \beta)\, hw_{,y} = -(\mu - \beta)\, h\, G_{,x}. \tag{26}$$

În cele ce urmează vom defini în tot planul (x, y) funcţiile Q_x, Q_y conform relaţiilor (26).

Vom mai considera funcţiile

$$\Psi = \psi - G \tag{27}$$

care satisfac ecuaţiile diferenţiale

$$\Delta\Psi = -H, \ (H = \Delta G). \tag{28}$$

Condiţia pe contur (21) se va scrie astfel

$$\Psi = c_k, \quad (L_k). \tag{29}$$

Conform relaţiilor (26) şi (3), rezultă că liniile

$$\Psi = \text{const.} \tag{30}$$

sînt linii pentru care au loc condiţiile

$$(\mu - \beta)\, d\Psi = (\mu - \beta)\, d(\psi - G) = [(Q_y - h\sigma_{zy})\, dx + (h\sigma_{zx} - Q_x)\, dy]/h \tag{31}$$

şi deci tangentele acestor linii sînt orientate în sensul vectorilor $(Q_y - h\sigma_{zy}, h\sigma_{zx} - Q_x)$. Împărţind cu ds, decurge condiţia (20), deci conturul aparţine familiei de linii (30).

Scanned with OKEN Scanner

Aplicarea relațiilor (26) condiției (15) dă

$$\int dG = 0. \tag{32}$$

Prin urmare aceste relații furnizează o formă a funcției Q pentru care e satisfăcută identic condiția de compatibilitate (15).

Remarcăm că pentru

$$G = -2\,(Ax + By), \tag{33}$$

relația (20) se scrie astfel

$$Q = -2(\mu - \beta)\, h(B \cos \nu - A \sin \nu). \tag{34}$$

Prin urmare, dacă notăm

$$\begin{aligned} &2(\mu - \beta)\, h(A^2 + B^2)^{1/2} = C \\ &A : C = \cos \alpha : \sin \alpha \end{aligned} \tag{35}$$

avem

$$Q = C \sin (\nu - \alpha).$$

Această încărcare, reprezentată în figura 20, variază deci proporțional cu sinusul unghiului format de normala la contur cu o direcție fixă. În cazul conturului circular sau aproape circular, variația este echivalentă cu variația în raport cu distanța la o linie dreaptă fixă.

Ultimul caz poate fi interpretat și în modul următor. Dacă placa din figura 21 este sprijinită pe contur iar acesta este elastic astfel ca eforturile Q să fie proporționale cu tasările W ascultînd de legea lui Winkler:

$$Q = k\, W, \tag{36}$$

va trebui ca $W = mx + ny$.

e) Revenind la ecuația (4) în care presupunem doar forțele de inerție nule, se constată că soluția este suma soluției ecuației particulare (14) și a unei soluții particulare a ecuației inițiale (4).

De exemplu, fie cazul unei plăci dreptunghiulare lungi, ale cărei margini lungi se pot mișca în mod liber. Admitem că în această placă apare un cîmp transversal de eforturi și anume o lunecare cilindrică

Scanned with OKEN Scanner

(unidimensională) sub acțiunea unei sarcini uniform repartizate $Zh = P$, unde h reprezintă înălțimea plăcii. Într-o secțiune a fișiei de lungime l a plăcii apare momentul încovoietor (preluat de elementele laterale)

$$M = -Pl\,x/2 + Px^2/2 + Sw \tag{37}$$

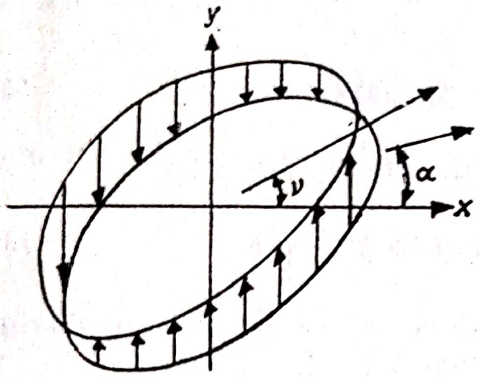


Fig. 20

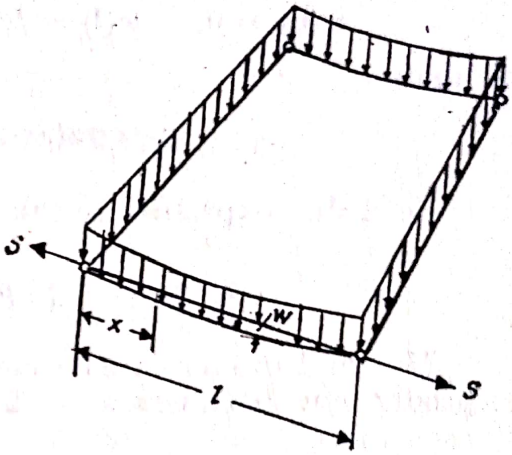


Fig. 21

și deci apare forța tăietoare

$$Q = \partial M/\partial x = -Pl/2 + Px + S\,\partial w/\partial x. \tag{38}$$

Fie k coeficientul de reducere al forței tăietoare care se calculează conform relației (8) sau (12) sau (20) de la § 24 și care tinde la zero pentru elemente laterale foarte subțiri și foarte rigide în sens longitudinal. Vom nota

$$\pi = (1 - k)P,\quad s = (1 - k)\,S,\quad T = (1 - k)\,Q. \tag{39}$$

Derivînd funcția T și aplicînd (38) de mai sus

$$\partial T/\partial x = \pi + s\partial^2 w/\partial x^2 = p \tag{40}$$

se obține expresia unei sarcini uniforme p aplicată miezului plăcii (în care intervine cîmpul transversal de eforturi) compusă din sarcina π și o sarcină adițională provenită din acțiunea sarcinii verticale P pe o placă deformată.

Înlocuind în (4) încărcarea Z prin p/h, se obține ecuația diferențială proprie cîmpului de solicitare transversal

$$(\mu - \beta - s)\,\partial^2 w/\partial x^2 = p/h \tag{41}$$

a cărui soluție este

$$w = w(0) + xw'(0) + x^2 p/2(\mu - \beta - s)h. \tag{42}$$

Admitem condițiile la limită

$$w(0) = 0, \qquad w(l) = lw'(0) + l^2 p/2(\mu - \beta - s)\, h = 0 \tag{43}$$

de unde

$$w = px(x - l)/2(\mu - \beta - s)\, h. \tag{44}$$

Se deduc expresiile tensiunilor definite în (3) din § 24

$$\sigma_{zx} = (\mu - \beta)\, p(x - l/2)/(\mu - \beta - s)\, h. \tag{45}$$

Maximul acestora are loc pentru $x = 0$ sau $x = l$. Deplasarea maximă se produce în secțiunea $x = l/2$ și este

$$w_{max} = - pl^2/8(\mu - \beta - s)\, h. \tag{46}$$

În cazul plăcii încastrate la margini cu un cîmp cilindric de lunecare intervine momentul

$$M = - Plx/2 + Px^2/2 + Sw + M_0 \tag{47}$$

în care M_p este constant. Aplicînd procedeul utilizat mai sus, rezultă soluția (44), încastrarea neavînd efect. Aceasta era de așteptat deoarece nu apar încovoieri ale fibrelor plăcii, în baza ipotezelor admise.

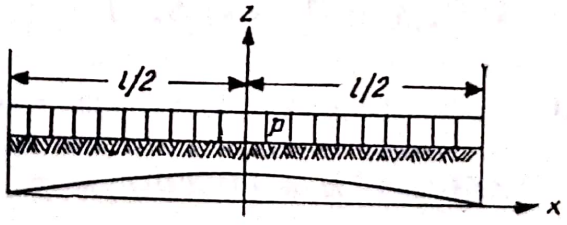


Fig. 22

În cazul plăcii cu un cîmp cilindric de lunecare, presupusă a fi rezemată pe un mediu elastic ca în figura 22, mediu care reacționează conform ipotezei lui Winkler, vom avea condiția

$$Z = (p - Kw)/h \tag{48}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care p este sarcina presupusă uniform distribuită pe placă iar K un coeficient de tasare. Neglijăm factorul de reducere k (considerarea acestui factor conduce la înlocuirea termenilor p și K prin $(1-k)p$, $(1-k)K$. Rezultă ecuația diferențială

$$(\mu - \beta)\,\partial^2 w/\partial x^2 = (p - Kw)/h \tag{49}$$

având soluția

$$w = p/hK + A\cos(2\alpha x/l) + B\sin(2\alpha x/l) \tag{50}$$

pentru

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{(\mu-\beta)h}}. \tag{51}$$

Constantele A și B se determină în baza condiției de simetrie a deplasărilor w în raport cu axa Oz și alegînd axa Ox astfel ca să treacă prin capetele plăcii deformate. Rezultă

$$A = 0, \qquad w(\pm l/2) = p/hK + B\sin\alpha = 0 \tag{52}$$

și deci

$$w = W(1 - \sin(2\alpha\, x/l))/\sin\alpha), \qquad W = p/hK. \tag{53}$$

Maximul are loc pentru $x = 0$ și este W.

Se obțin tensiunile

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \sigma_{xz_{\max}}\cos(2\alpha x/l), \\ \sigma_{xz_{\max}} &= (\mu \pm \beta)\, p2\alpha/hKl\sin\alpha. \end{aligned} \tag{54}$$

Maximul este atins pentru $x = 0$.

În cazul plăcii din figura 23 încărcată de sarcini P pe unitatea de latură a plăcii vom avea ecuația

$$(\mu - \beta)\,\partial^2 w/\partial x^2 = K(\delta - w)/h, \tag{55}$$

δ fiind deplasarea la margini.

Scanned with OKEN Scanner

Echilibrul forţelor care acţionează placa conduce la condiţia

$$P = K\left(\delta l/2 - \int_0^{l/2} w\,dx\right). \tag{56}$$

Soluţia este dată de (50) sau (53) în care $p/h = K\delta$ şi deci

$$w_{max} = \delta$$

$$P = \delta K(l/2 - (l/2 + l(\cos\alpha - 1)/2\alpha \sin\alpha)) = \delta K l(1 - \cos\alpha)/2\alpha \sin\alpha \tag{57}$$

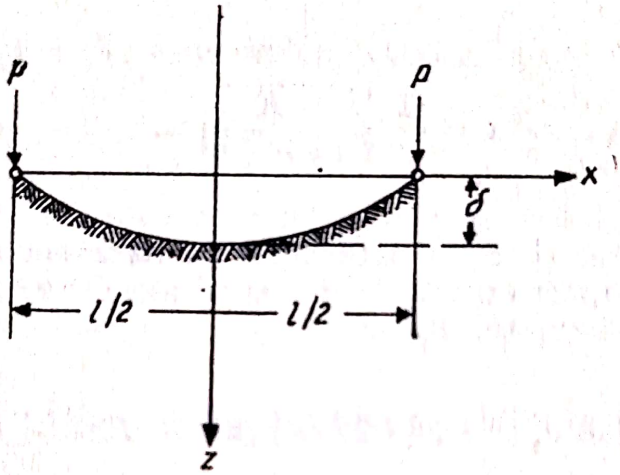


Fig. 23

sau

$$\delta = 2\alpha \cdot \sin\alpha\, P/(1 - \cos\alpha)\, Kl. \tag{58}$$

Această formulă permite determinarea deplasării maxime δ.

§ 24. Semnificaţia fizică a problemei transversale

Problema formulată mai înainte corespunde unei plăci încărcate pe contur cu forţele transversale Q definite în (9) din § 23. Aceste forţe, conform egalităţilor (12) din § 23, echilibrează rezultanta forţelor transversale de inerţie şi masă iar în cazul absenţei acestora este evident, conform relaţiei (13) din § 23, că ele se autoechilibrează, placa avînd rolul de transmitere a forţelor Q de la o regiune a conturului L la altă regiune.

Pe feţele laterale $z = \pm h/2$ apar tensiunile tangenţiale în general nenule

$$\sigma_{xz} = (\mu + \beta)\, w_{,x}, \quad \sigma_{yz} = (\mu + \beta)\, w_{,y} \tag{1}$$

Scanned with OKEN Scanner

a căror rezultantă aplicată pe un element de volum este nulă deoarece au sensuri opuse. Existența acestor forțe este însoțită, conform celor precedente, de existența unui cîmp de deplasări pur transversal w definit de primele două ecuații din (1), § 23, concomitent cu indeformabilitatea plăcii în sens transversal condiționată de ultima ecuație din (1), § 23, care se mai scrie astfel

$$w_{,z} = 0. \tag{2}$$

În consecință cîmpul astfel definit este compatibil cu existența unor elemente care să preia tensiunea tangențială (1), împiedicînd astfel deplasarea plăcii în direcții situate în plane paralele cu suprafața mediană și deformația normală a plăcii în sens transversal.

Asemenea elemente apar în figura 24 și reprezintă straturi laterale flexibile în sensul transversal plăcii, dar prezentînd o mare rigiditate în planul lor, paralel cu suprafața mediană. Ele preiau tensiunile tangențiale (1) sub forma unor forțe aplicate pe elementele lor de suprafață. Sistemul format de placă și elementele laterale solidare cu acestea constituie o placă sandviș de tip special.

Acest tip de placă se întîlnește și în cazul plăcilor armate ca în figura 25, la care elementele longitudinale pot avea o mare flexibilitate în sens transversal, dar o rigiditate ridicată în sensul axei lor. Etrierii sau montanții care cuplează armăturile superioare de cele inferioare pot avea de asemenea o rigiditate ridicată în sensul transversal împiedicînd depărtarea sau apropierea armăturii superioare de cea inferioară.

Observăm că modelele precedente au componente cu caracter *complementar* în sensul că unele (placa) preiau un tip de solicitări (lunecări) iar altele (armăturile) alt tip (forțe normale). Asemenea plăci care permit o înțelegere imediată a fenomenelor mecanice care au loc sînt de exemplu plăcile utilizate frecvent în construcțiile aeronautice, sînt formate ca în figura 26, dintr-un miez de tablă ondulată îmbrăcat de tole laterale, rigide în planul lor.

Vom studia tensiunile într-o placă de înălțime h și laturi b, placă cu două elemente laterale avînd o mare rigiditate în sens longitudinal, de grosime d, lățime c și articulate la reazem ca în figura 27. Dacă admitem în placa mediană cîmpul de deplasări w și utilizăm soluția unidimensională (3) din § 31, am obține tensiuni tangențiale constante τ_b. Elementele laterale sînt încărcate cu tensiunile τ conform figurii 28, apărînd forțele

$$F(x) = \tau b x. \tag{3}$$

Momentele care apar într-o secțiune transversală a plăcii, x = constant, sînt

$$M(x) = Qx \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

și sînt preluate, conform ipotezelor de mai sus, de către elementele laterale prin cuplele

$$M(x) = F(x)\,(h + d). \tag{5}$$

Rezultă relațiile care dau forțele din elementele laterale și tensiunile tangențiale în placă

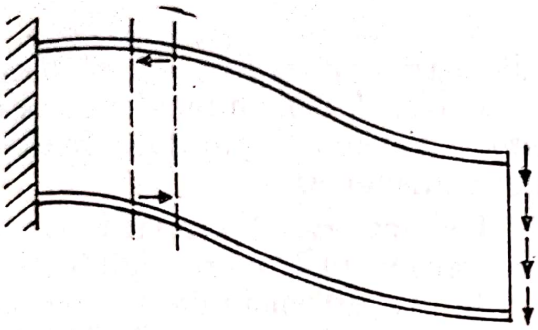


Fig. 24

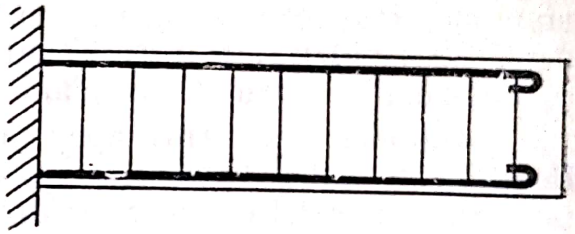


Fig. 25

$$F(x) = Qx/(h + d), \tag{6}$$

$$\tau = Q/b(h + d). \tag{7}$$

Rezultanta tensiunilor tangențiale din placă este

$$Q_b = \tau bh = Q(1 - k), \qquad (k = d/(h + d)). \tag{8}$$

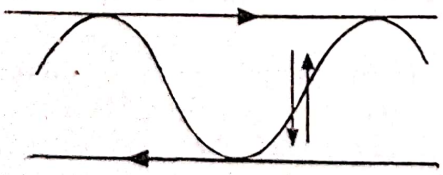


Fig. 26

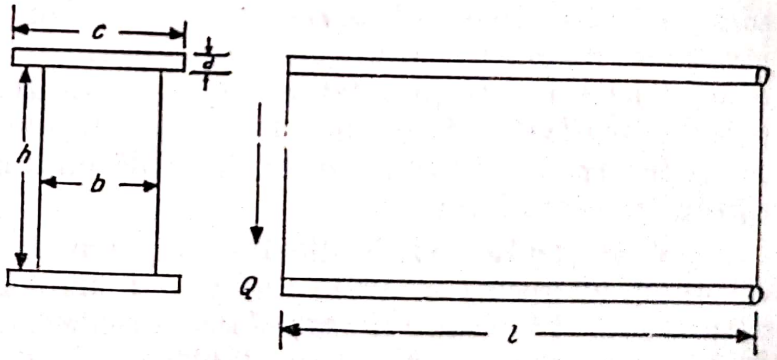


Fig. 27

În elementele laterale apar forțele de lunecare

$$Q_a = Qk \tag{9}$$

deoarece

$$Q = Q_a + Q_b\,. \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

În consecință, în cadrul problemei transversale vom reduce, pentru cazul de mai sus, forța de lunecare Q cu cantitatea Q_a. Această cantitate depinde, conform (8), de raportul

$$\delta = d/h \tag{11}$$

astfel că

$$k = \delta/(1 + \delta). \tag{12}$$

În cazul în care δ este mult mai mic decît unitatea k, este neglijabil în (8) și deci putem lua în (10) $Q_a = 0$.

Prin urmare problema transversală este aplicabilă plăcilor cu elemente laterale avînd o mare rigiditate longitudinală și o grosime foarte mică în raport cu a plăcii propriu-zise.

Deoarece rezultatele precedente nu mai sînt riguros valabile în cazul unei rigidități longitudinale mai scăzute ale armăturilor, vom analiza precizia rezultatelor în funcție de caracteristicile geometrice și elastice ale structurii de tip sandviș considerate mai sus. Pentru aceasta vom presupune că elementele laterale se deformează în sens longitudinal, producîndu-se, ca în figura 29, o încovoiere a structurii, caracterizată printr-o variație liniară a deformațiilor normale pe secția transversală a plăcii

$$\varepsilon = \theta z. \tag{13}$$

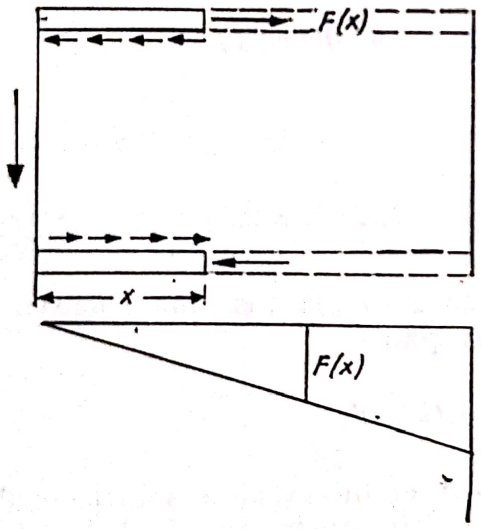


Fig. 28

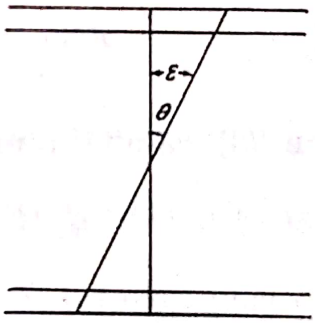


Fig. 29

În consecință vor apare tensiunile în placa și elementele laterale

$$\sigma_b = zE_b\theta, \quad (-h/2 < z < h/2)$$
$$\sigma_a = zE_a\theta, \quad (-(h+d)/2 < z < -h/2), \quad h/2 < z < (h+d)/2). \tag{14}$$

E_b şi E_a sînt modulii de elasticitate ai plăcii şi armăturii. θ se determină din condiţia ca momentul rezultant al tensiunilor normale să fie egal cu momentul (4)

$$M(x) = Qx = b\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_b z\,dz + 2d\int_{h/2}^{h+d/2} \sigma_a z\,dz. \tag{15}$$

Rezultă, prin efectuarea integralelor, condiţia

$$\theta x = (E_b I_b + E_a I_a)\,\theta = E_b I\,\theta \tag{16}$$

în care

$$I = I_b + nI_a, \qquad I_b = bh^3/12, \qquad I_a = (h+d)^2 = cd/2 + 2cd^3/12,$$

$$A_a = cd, \qquad n = E_a/E_b\,. \tag{17}$$

Cu acestea, tensiunile (14) capătă expresiile

$$\sigma_b = Qzx/I, \qquad \sigma_a = nQzx/I. \tag{18}$$

Rezultanta tensiunilor normale într-un element lateral este

$$F(x) = \int_{+h/2}^{(h+d)/2} \sigma_a\,dz = nhc\,dQx/2I. \tag{19}$$

Din (3) rezultă atunci

$$\tau = nhc\,dQ/2bI = Q_b/bh, \qquad Q_b = (1-k)Q, \qquad k = 1 - nh^2cd/2I. \tag{20}$$

Formăm raportul între tensiunea normală maximă (pentru $x = l$, $z = h/2$) şi tensiunea tangenţială în placă

$$K = \sigma_b/\tau = lb/ncd. \tag{21}$$

Acest raport constituie o măsură a erorii ce intervine în soluţia problemei transversale, eroare ce rezultă din apariţia tensiunilor de încovoiere σ_b. Introducînd factorii de formă

$$\alpha = l/d, \qquad \beta = b/c, \tag{22}$$

rezultă că (19) se mai scrie

$$K = \alpha\beta/n \quad \text{sau} \quad \alpha = Kn/\beta. \tag{23}$$

Scanned with OKEN Scanner

Forța tăietoare în placa Q_b va trebui să fie evaluată conform (20). În diagrama din figura 30 apare variația factorilor de formă, pentru diferiți Kn, precum și variația factorului K în funcție de n, pentru diferite valori ale produsului $\alpha\beta$.

Fie K_0 valoarea admisă a erorii măsurate de K. Atunci valorile α admisibile se citesc pentru diferiți n în ultima diagramă din figura 30., sub linia punctată. În cazul în care secția transversală a structurii este dreptunghiulară, avem $b = c$ și deci $\beta = 1$. În consecință valorile α se citesc în prima diagramă din figura 30 în dreptul liniei punctate. Curbele

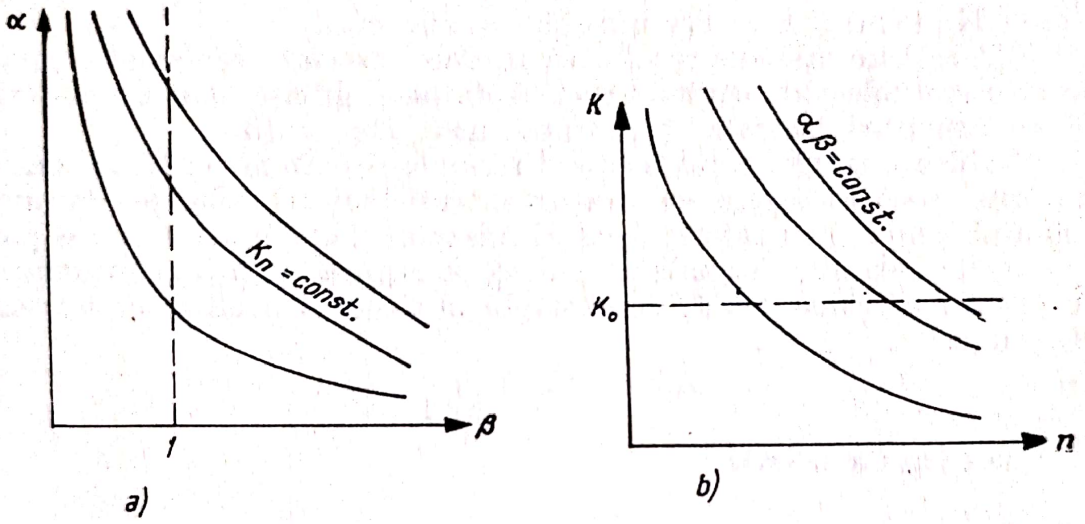


Fig. 30

celei de-a doua diagrame din figura 30 vor corespunde valorilor α = constant.

Remarcăm că în general putem considera, în cazul în care $c \neq d$, structuri ca în figura 31.

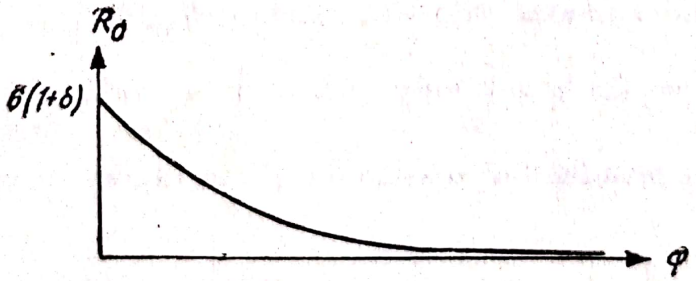


Fig. 31

Exemplul 1. Fie o placă de cauciuc dur ($E_b = 50$ kg/cm², $h = 10$ cm) între două table de oțel ($E_a = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm², $d = 0{,}05$ cm). Lungimea minimă a plăcii, pentru o eroare mai mică decît cea admisă mai jos, se stabilește astfel. Se calculează valorile $n = 0{,}42 \cdot 10^{5}$, $\beta = 1$, $K = l\beta/dn = l$ (cm)$/2{,}1 \cdot 10^{3}$. Pentru $K < 0{,}1$, caz în care tensiunile normale

maxime sînt 10% din cele tangenţiale, va trebui ca $l > 210$ cm. De exemplu, pentru $l = 100$ cm rezultă $K = 4{,}7/10^2$.

Exemplul 2. Pentru o placă de masă plastică ($E_b = 800$ kg/cm^2, $h = 5$ cm) între două table de oţel ($E_a = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm^2, $d = 0{,}1$ cm) avem $n = 0{,}263 \cdot 10^4$, $K = l(\text{cm})/2{,}63 \cdot 10^2$. Pentru $K < 0{,}1$ rezultă $l > 263$ cm.

Exemplul 3. Pentru o placă formată din pereţi de beton poros ($E_b = 1{,}4 \cdot 10^4$ kg/cm^2, $b = 5$ cm) şi două plăci laterale de oţel ($E_a = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm^2, $c = 100$ cm, $d = 1$ cm) avem $\beta = 5/10^2$, $n = 150$, $l\,(\text{cm}) = 3000$ K. Pentru $K = 0{,}2$ rezultă $l = 600$ cm.

Din cele de mai sus rezultă că modelul asociat problemei transversale este mai adecvat pentru structuri de plăci groase, dar din materiale moi cu armături laterale foarte puternice dar subţiri.

Problema transversală poate fi formulată pornind şi de la considerarea unei plăci eterogene cu straturi laterale subţiri (placaje) dar avînd un modul λ mult mai ridicat decît al miezului. Pentru acest caz se poate de asemenea elabora o analiză care să se reducă în prima aproximaţie la o problemă transversală, de exemplu utilizînd dezvoltări cu un parametru mic.

§ 25. Constrîngerile laterale

Datorită existenţei tensiunilor (1) din § 24, apar constrîngeri laterale transmise altor elemente capabile de a le prelua. Rezultantele acestor tensiuni sînt

$$R_x = \int_D \sigma_{xz}\,dx\,dy = (\mu + \beta)\,D_x\,, \qquad R_y = \int_D \sigma_{yz}\,dx\,dy = (\mu + \beta)\,D_y \tag{1}$$

iar în expresiile acestora intervin constantele

$$D_x = \int_D w_{,x}\,dx\,dy = \int_L w\,dy, \qquad D_y = \int_D w_{,y}\,dx\,dy = -\int_L w\,dx. \tag{2}$$

Momentul rezultant al tensiunilor (1) în raport cu originea coordonatelor este

$$M = \int_D (x\sigma_{yz} - y\sigma_{xz})\,dx\,dy = (\mu + \beta)\,D \tag{3}$$

în care

$$D = \int_D (xw_{,y} - yw_{,x})\,dx\,dy = -\int_L (y\cos\nu - x\sin\nu)\,w\,ds \tag{4}$$

ds fiind elementul de lungime al conturului.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, în cadrul primei probleme fundamentale, vom putea înlocui în (2) și (4) pe w prin funcția W dată de condiția (6) din § 23.

Remarcăm că (2) și (4) se mai pot scrie astfel

$$D_x = \int_D \psi_{,y}\,dx\,dy = -\int_L \psi\,dx, \qquad D_y = -\int_D \psi_{,x}\,dx\,dy = -\int_L \psi\,dy$$

$$D = -\int_D (x\psi_{,x} + y\psi_{,y})\,dx\,dy = \tag{5}$$

$$= 2\int_D \psi\,dx\,dy + 2\sum_k \int_{L_k} G(y\,dx - x\,dy) + 2\sum_k C_k A_k.$$

În aceste relații intervin ariile suprafețelor mărginite de C_k:

$$A_k = \frac{1}{2}\int_{L_k} (y\,dx - x\,dy). \tag{6}$$

§ 26. Reprezentarea complexă a soluțiilor

Limitîndu-se în continuare la considerarea problemei statice și pentru forțe de masă nule, vom alege reprezentarea funcțiilor armonice w, ψ cu ajutorul unei funcții de variabilă complexă $\mathfrak{F}(x, y) = w + i\psi$:

$$w = \frac{1}{2}(\mathfrak{F}(\zeta) + \overline{\mathfrak{F}(\zeta)}), \quad \psi = \frac{1}{2}(\mathfrak{F}(\zeta) - \overline{\mathfrak{F}(\zeta)}), \tag{1}$$

unde ζ este variabila complexă

$$\zeta = x + iy \tag{2}$$

în care $i = \sqrt{-1}$.

Vom forma tensiunea complexă

$$\Sigma = \sigma_{zx} - i\sigma_{zy} = 2(\mu - \beta)\frac{\partial w}{\partial \zeta} = (\mu - \beta)\,\mathfrak{F}'(\zeta) \tag{3}$$

în care intervin tensiunile din (3), § 23, și derivata complexă

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{4}$$

Tensiunea pe contur (8) din § 23 va avea expresia

$$\sigma\left(= \frac{g}{h}\right) = \operatorname{Re} n.\Sigma = -(\mu - \beta)\operatorname{Re} i\frac{d\mathfrak{F}}{ds} \tag{5}$$

pentru

$$n = \cos\nu + i\sin\nu = -i\frac{d\zeta}{ds}, \quad \operatorname{Re} f = (f + \bar{f})/2. \tag{6}$$

Am aplicat (11) din § 23.

Vom exprima și rigiditățile D, D_x și D_y din (4), (5), § 25, ținînd seama de (11) din § 23 și (1) sub formă complexă

$$D = -\frac{1}{4}\int_L [\mathfrak{F}(\zeta) + \overline{\mathfrak{F}(\zeta)}]\, d(\zeta\bar{\zeta})$$

$$D_x = -\frac{1}{4i}\int_L [\mathfrak{F}(\zeta) - \overline{\mathfrak{F}(\zeta)}]\, d(\zeta + \bar{\zeta}) \tag{7}$$

$$D_y = \frac{1}{4}\int_L [\mathfrak{F}(\zeta) - \overline{\mathfrak{F}(\zeta)}]\, d(\zeta - \bar{\zeta}).$$

Dacă deplasarea w este determinată, atunci corespunzător unei prime probleme fundamentale la limită, relația (1) ne arată că funcția $\mathfrak{F}(z)$ este determinată abstracție făcînd de o constantă pur imaginară. Aceasta se va scrie astfel

$$\mathfrak{F}^*(\zeta) = \mathfrak{F}(\zeta) + iC, \tag{8}$$

C fiind o constantă reală. Dacă se dau tensiunile, atunci (3) ne arată că are loc următoarea determinare

$$\mathfrak{F}^*(\zeta) = \mathfrak{F}(\zeta) + a, \tag{9}$$

a fiind constantă complexă.

§ 27. Determinarea funcțiilor de reprezentare

Se deduce din (3), § 26, că pentru un cîmp de tensiuni dat, funcția $\mathcal{F}(z)$ este determinată abstracție făcînd de o constantă complexă $a + ib$, a și b fiind constante reale. Prin urmare în cazul unui domeniu simplu conex vom putea impune condiția

$$\mathcal{F}(0) = 0. \tag{1}$$

În cazul unui domeniu infinit, de exemplu în cazul unei plăci cu un gol interior mărginit de o curbă în interiorul căreia este situată originea coordonatelor, condiția precedentă poate fi înlocuită prin următoarea

$$\mathcal{F}(\infty) = 0. \tag{2}$$

Introducînd în (1) din § 26 funcția $\mathcal{F}(\zeta) = a + ib$, rezultă că deplasarea w este determinată abstracție făcînd de o translație rigidă care nu modifică echilibrul

$$w = a. \tag{3}$$

Considerînd placa cu gol definită mai sus, vom observa că partea imaginară a funcției $\mathcal{F}(\zeta)$ poate fi multiformă. Într-adevăr, luînd

$$\mathcal{F}(\zeta) = \mathcal{F}^*(\zeta) + \alpha \log \zeta, \tag{4}$$

α fiind constantă reală iar $\mathcal{F}^*(\zeta)$ olomorfă în domeniul ocupat de placă, rezultă că deplasarea w este uniformă. Dacă în urma parcurgerii unui ciclu de-a lungul lui L în sensul pozitiv (al acelor de ceasornic), w înregistrează o creștere nulă :

$$\{w\}_L = \operatorname{Re} 2i\pi\alpha = 0. \tag{5}$$

Dacă integrăm în (3) de la § 26 pe conturul L, obținem

$$\Sigma^* = \int_L \Sigma \, ds = (\mu - \beta)\,\{\mathcal{F}(\zeta)\}_L = 2\pi i(\mu - \beta)\,\alpha. \tag{6}$$

Prin urmare

$$\mathcal{F}(\zeta) = \mathcal{F}^*(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\Sigma^*}{\mu - \beta}\log \zeta. \tag{7}$$

În cazul mai multor goluri mărginite de liniile închise (vezi § 16), reprezentarea precedentă se va înlocui prin următoarea

$$\mathcal{F}(\zeta) = \mathcal{F}^*(\zeta) + \sum \alpha_j \log(\zeta - \zeta_j), \tag{8}$$

ζ_j fiind puncte în interiorul marginilor L_j ale golurilor.

§ 28. Utilizarea transformărilor conforme

Vom considera transformarea

$$\zeta = f(\zeta), \quad \zeta = \rho\, e^{i\theta} \tag{1}$$

care reprezintă domeniul D mărginit de conturul exterior al plăcii pe interiorul cercului unitate $|\zeta| < 1$ avînd frontiera γ. De asemenea vom considera funcția complexă a lunecării $\mathcal{F}(\zeta)$ presupusă olomorfă în interiorul cercului γ, și condițiile la limită asociate prin (28) din § 23.

Variabila complexă (2) are pentru punctele situate pe frontiera γ expresia $\sigma = e^{i\theta}$, astfel încît condiția la limită se scrie

$$\psi - c_k = G(\sigma, \bar{\sigma}) \text{ pe } L_k. \tag{2}$$

Notăm că $\bar{\sigma} = 1/\sigma$.

În baza formulei de tip Cauchy (15) din § 21, această condiție conduce la formula

$$\psi - c_k = \operatorname{Re} \frac{\mathcal{F}(\zeta)}{i} - c_k \tag{3}$$

în care

$$\operatorname{Re}[\mathcal{F}(\zeta)/i] = \operatorname{Re}\left[c_k + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{G(\sigma, \bar{\sigma})}{\sigma - \zeta}\, d\sigma\right]. \tag{4}$$

iar simbolul Re apare definit în a doua relație din (6) de la § 26.

În cazul domeniului dublu conex, dacă se cunoaște reprezentarea acestuia pe un inel circular mărginit de cercurile γ_1 și γ_2, condițiile la limită se scriu astfel

$$\operatorname{Re} \frac{\mathcal{F}(\zeta)}{i} - G(\zeta, \bar{\zeta}) = c_1 \text{ pe } \gamma_1$$

$$= c_2 \text{ pe } \gamma_2, \tag{5}$$

c_1 și c_2 sînt constante reale dintre care una poate fi aleasă în mod arbitrar.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $G(\zeta,\overline{\zeta})$ este o funcție rațională, atunci $G(\sigma,1/\sigma)$ va fi rațională în raport cu σ iar integrala de contur din (3) va fi o funcție rațională de ζ calculabilă prin metoda reziduurilor. În general, dacă $f(\zeta)$ este analitică în interiorul sau exteriorul lui γ, continuă în interior și pe frontieră, avînd deci un număr finit de poli în domeniul mărginit de γ, integrala de contur (3) se calculează prin metoda reziduurilor.

Cu ajutorul funcțiilor de reprezentare se pot stabili expresiile tensiunilor. Astfel, deoarece conform (4) din § 18, proiecțiile unui vector pe axe de coordonate ortogonale și polare sînt corelate prin condiția

$$V_\rho + iV_\theta = e^{-iv}(V_x + iV_y) \tag{6}$$

avem, după trecere la termeni conjugați — vezi (6) din § 18 și (25) din § 23 —.

$$\sigma_{z\rho} - i\sigma_{z\theta} = (Q_\rho - iQ_\theta)/h = \frac{\zeta}{\rho}\frac{f'(\zeta)}{|f'(\zeta)|}\sum, \tag{7}$$

$\sum$ fiind dat de (3) din § 26

$$\sum = (\mu-\beta)\frac{\mathfrak{F}'(\zeta)}{f'(\zeta)} = (Q_x - iQ_y)/h. \tag{8}$$

În definitiv rezultă formulele de reprezentare

$$\sigma_{z\rho} - i\sigma_{z\theta} = (\mu-\beta)\frac{\zeta}{\rho|f'(\zeta)|}\mathfrak{F}'(\zeta) = (Q_\rho - iQ_\theta)/h. \tag{9}$$

§ 29. Utilizarea transformărilor conforme și seriilor de puteri

Vom considera o funcție de transformare de forma unei serii de puteri

$$\delta = f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n \tag{1}$$

și vom utiliza dezvoltarea în serie de puteri pentru funcția $G(x,y)$. În particular vom admite că se exprimă printr-un polinom de gradul doi

Scanned with OKEN Scanner

în variabilele carteziene

$$G = -2(Ax + By) + 4(Cx^2 + Dxy + Ey^2) = -$$

$$- [(A - iB)f + (A + iB)\bar{f}] + (C - iD - E)f^2 + \qquad (2)$$

$$+ (C + iD - E)\bar{f}^2 + 2(C + E)f\bar{f} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n \sigma^{-n}$$

În cele de mai sus intervin coeficienţii i

$$B_n = -(A - iB)\, a_n + \sum_{n=0}^{\infty} [(C - iD - E)\, a_{n-r}\, a_r + 2(C + E)\, a_{n+r}\, \bar{a}_r]. \qquad (3)$$

Vom calcula integrala care apare în (4) din § 28 :

$$\mathfrak{F}(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left[\sum_{n=0}^{\infty} B_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n \overline{\sigma}^n \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = i \sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta^n. \qquad (4)$$

S-a utilizat formula integrală a lui Cauchy — vezi (1) şi (14) din § 21 — sau teoria de tip Harnack — vezi (22) din § 21. Această formulă a fost stabilită pentru problema antiplană de R. M. Morris [1] pe o cale diferită. Ulterior I. G. Sokolnikoff [1] a dedus-o pentru aceeaşi problemă ca mai sus. În baza acestui procedeu se pot determina soluţiile problemei transversale.

Vom calcula rigidităţile D, D_x, D_y din (2), (4) de la § 25, ţinînd seama de transformarea conformă (1) şi de identitatea

$$f(\sigma)\overline{f(\sigma)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \sigma^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \sigma^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[b_n \sigma^n + \overline{b}_n \sigma^{-n} \right] \qquad (5)$$

în care intervin coeficienţii

$$b_n = \sum_{r=0}^{\infty} a_{n+r}\, \bar{a}_r. \qquad (6)$$

Scanned with OKEN Scanner

Se deduce

$$D = -\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty} n\,(B_n\bar{b}_n + \bar{B}_n b_n),$$

$$D_x = \frac{\pi}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} n\,(\bar{B}_n a_n - B_n\bar{a}_n), \tag{7}$$

$$D_y = -\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty} n\,(\bar{B}_n a_n + B_n\bar{a}_n).$$

§ 30. Formularea complexă a condițiilor la limită

Condiția (6) din § 23 conduce împreună cu (1) din § 26 la formula

$$w = \mathrm{Re}\,\mathfrak{F}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{w(\sigma,\bar{\sigma})}{\sigma-\zeta}\,\mathrm{d}\sigma. \tag{1}$$

Prin urmare, orice rezultat care se referă la (4) din § 28 poate fi transpus în cazul primei probleme fundamentale înlocuind $G(\sigma,\bar{\sigma})$ prin $w(\sigma,\bar{\sigma})$ iar c_k prin zero. De exemplu, în cazul unei variații liniare a deplasării, formulele (4) din § 29 se transcriu foarte ușor.

Condiția (7) din § 23 în care ținem seama de identitatea

$$w_{,x} + iw_{,y} = \mathrm{e}^{i\nu}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}n} + i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\right), \tag{2}$$

ν fiind unghiul între normală și axa Ox se transcrie, conform formulelor (1) din § 28, astfel

$$\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{-i\nu}\mathfrak{F}'(\zeta)\} = \mathrm{Re}\,\frac{\zeta\mathfrak{F}'(\zeta)}{\rho|f'(\zeta)|} = \vartheta(s). \tag{3}$$

Integrarea termenilor condiției (9) din § 23, de la 0 la s pe contur, conduce la altă condiție și anume:

$$f(s) = \int_0^s Q\,\mathrm{d}s = (\mu-\beta)\,h\,\mathrm{Re}\,[\mathfrak{F}(\zeta)/i]. \tag{4}$$

Conform relației (20) din § 23, rezultă (3) din § 28.

Scanned with OKEN Scanner

B. Exemple de rezolvare a problemei transversale

§ 31. Cîmp unidimensional de lunecare

Dacă lunecarea este caracterizată de un cîmp variabil în direcţia axei de coordonate Ox, ecuaţiile (14), (10) din § 23 se scriu astfel

$$w'' = 0, \qquad (\mu - \beta) h w' = Q. \tag{1}$$

Semnul prim corespunde derivării în raport cu variabila Ox. Pentru placa din figura 32 rezultă soluţia

$$w(x) = Qx/(\mu - \beta) h + w_0, \tag{2}$$

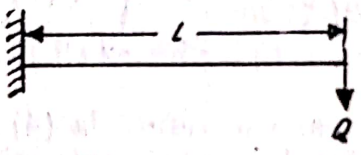


Fig. 32

w_0 reprezentînd săgeata plăcii în origină. Pentru $x = l$ rezultă săgeata $w = w(l)$ şi deci

$$w(x) = [w(l) - w(0)]\, x/l, \qquad Q = (\mu - \beta) w(h). \tag{3}$$

Tensiunile pe feţele laterale sînt

$$\sigma_{zz} = (\mu - \beta) w_{,x} = Q/h, \qquad \sigma_{xz} = (\mu + \beta) w_{,x} = (\mu + \beta) Q/(\mu - \beta) h. \tag{4}$$

§ 32. Lunecare într-o placă de formă circulară

Vom considera o placă avînd un contur circular de rază $r = R$. Alegem origina coordonatelor în centrul cercului, în acest caz fiind satisfăcute egalităţile (vezi (7), (18) din § 23) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial}{r \partial \theta} \tag{1}$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece, conform (11) și (17) din § 23,

$$\cos \nu = \cos(t, y) = \cos\theta = x/r = r_{,x} = \partial y/r\partial\theta,$$
$$\sin \nu = -\cos(t, x) = -\sin\theta = -y/r = -r_{,y} = \partial x/r\partial\theta. \tag{2}$$

Condiția la limită (6) din § 23 corespunzătoare primei probleme fundamentale se scrie

$$w = f(\theta) = \mathrm{Re}\sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta}. \tag{3}$$

Alegînd funcția armonică

$$w = \mathrm{Re}\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n \tag{4}$$

deducem

$$a_n = A_n/R^n = \alpha_n + i\beta_n. \tag{5}$$

Tensiunile din (3), § 23, au expresiile:

$$\sigma_{\substack{yz\\zy}} = (\mu \pm \beta)\,\mathrm{Re}\sum_{-\infty}^{\infty} ina_n\zeta^{n-1},$$
$$\sigma_{\substack{zx\\xz}} = (\mu \mp \beta)\sum_{-\infty}^{\infty} nr^{n-1}[\alpha_n\cos(n-1)\theta - \beta_n\sin(n-1)\theta] \tag{6}$$

sau

$$\sigma_{\substack{yz\\zy}} = -(\mu \pm \beta)\sum_{-\infty}^{\infty} nr^{n-1}[\alpha_n\cos(n-1)\theta + \beta_n\sin(n-1)\theta],$$
$$\sigma_{\substack{zx\\xz}} = (\mu \mp \beta)\sum_{-\infty}^{\infty} nr^{n-1}[\alpha_n\cos(n-1)\theta - \beta_n\sin(n-1)\theta]. \tag{7}$$

Tensiunile în secții circulare se vor scrie conform (1) astfel

$$\sigma_{\substack{z\rho\\\rho z}} = \sigma_{\substack{zx\\xz}}\cos\nu + \sigma_{\substack{zy\\yz}}\sin\nu = (\mu \mp \beta)\,\mathrm{Re}\sum_{-\infty}^{\infty} na_n r^{n-1}e^{in\theta} =$$
$$= (\mu \mp \beta)\sum_{-\infty}^{\infty} nr^{n-1}[\alpha_n\cos n\theta - \beta_n\sin n\theta]. \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog tensiunile în plane radiale au expresiile

$$\sigma_{\substack{z\theta \\ \theta z}} = \sigma_{\substack{zx \\ xz}} \cos(t, x) + \sigma_{\substack{zy \\ yz}} \cos(t, y) = (\mu \mp \beta) \frac{dw}{ds} =$$

$$= (\mu \mp \beta) \frac{\partial w}{r \partial \theta} = (\mu \mp \beta) \operatorname{Re} \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{n-1} i n e^{in\theta} = \tag{9}$$

$$= -(\mu \mp \beta) \sum_{-\infty}^{\infty} n r^{n-1} [\alpha_n \sin n\theta + \beta_n \cos n\theta].$$

Remarcăm că dacă $\beta_n = 0$, obținem un cîmp de tensiune care e considerat prin tensiuni în planele radiale $n\theta = k\pi$, $(k = 1,2)$ nule, ca în figura 33.

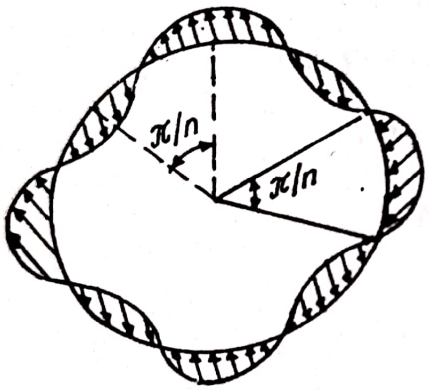


Fig. 33

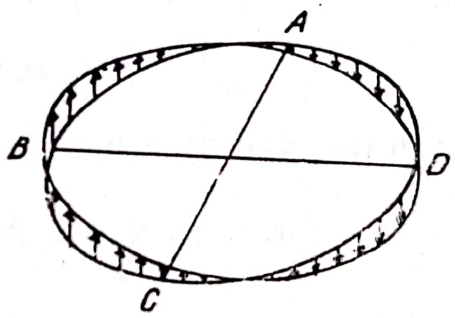


Fig. 34

În particular, pentru $n = 1$ obținem cazul unei plăci acționate pe un semicerc $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ al conturului din figura 34, de tensiuni tangențiale variind ca și funcția cos θ de la 0 la 1.

Pe celălalt semicerc al conturului apar tensiuni tangențiale variind de la 0 la — 1. Dacă reținem apoi placa situată în domeniul $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$,

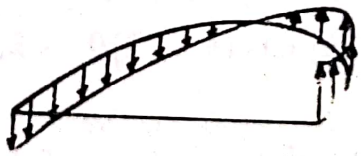


Fig. 35

constatăm că pe conturul ei drept din figura 35 nu apar tensiuni tangențiale și că poate fi considerată ca un caz de sine stătător.

Remarcăm că în acest caz avem

$$w = R(\alpha_1 \cos\theta + \beta_1 \sin\theta), \qquad \sigma_{z\rho} = (\mu - \beta) w/r. \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare încărcările pe conturul $r = R$ sînt proporționale cu săgețile. Se pot atunci aplica soluțiile obținute la cazul unei plăci în contact cu un masiv elastic, de exemplu pe o porțiune de contur ABC ca în figura 34, în restul conturului DA fiind încărcată cu sarcini exterioare.

În cazul problemei neomogene căreia i se asociază ecuația (4) din § 23 pentru $Z \neq 0$, $\ddot{w} = 0$, se poate construi soluția totală pornind de la o soluție particulară căreia îi adăugăm o soluție armonică prin procedeele expuse, cu condiții la limită modificate în concordanță cu perturbările aduse de soluția particulară.

Vom expune unele soluții obținute direct. Astfel, conform cu (2), avem

$$\theta_{,x} = -\sin\theta/r, \qquad \theta_{,y} = \cos\theta/r,$$

$$w_{,x} = w_{,r}\cos\theta - w_{,\theta}\sin\theta/r, \tag{11}$$

$$w_{,y} = w_{,r}\sin\theta + w_{,\theta}\cos\theta/r$$

și deci

$$\Delta w = \partial^2 w/\partial r^2 + \partial w/r\partial r + \partial^2 w/r^2\partial\theta^2. \tag{12}$$

Alegînd o soluție w_0 a ecuației (4) din § 23 și o soluție w_1 a ecuației (14) din § 23, obținem o soluție totală $w = w_0 + w_1$. Avem în general

$$w_1 = R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (R_m \cos m\theta + R'_m \sin m\theta) \tag{13}$$

în care

$$R_0 = A_0 + B_0 \ln r, \qquad R_m = A_m r^m + B_m r^{-m}. \tag{14}$$

Pentru R'_m se obțin expresii analoge. Pentru o încovoiere $\tau = p/h$ constantă obținem soluția

$$w_1 = -pr^2/4(\mu - \beta)h, \qquad w_0 = A_0 + B_0 \ln r. \tag{15}$$

În cazul unei plăci simplu rezemate, pe conturul $r = a$ al plăcii, deplasările totale se anulează

$$w = w_1 + w_0 = A_0 + B_0 \ln a - pa^2/4(\mu - \beta)h = 0 \tag{16}$$

și găsim soluția

$$w = W(1 - \rho^2), \qquad W = p(1 + \nu)/4(\mu - \beta)h, \qquad (\rho = r/a). \tag{17}$$

Scanned with OKEN Scanner

S-a impus condiția $B_0 = 0$ pentru ca deplasările să fie finite în centrul plăcii. Tensiunile tangențiale

$$\underset{zr}{\sigma_{rz}} = (\mu \pm \beta)\frac{\partial w}{\partial r}, \qquad \underset{z\theta}{\sigma_{\theta z}} = (\mu \pm \beta)\frac{\partial w}{r\partial \theta} \tag{18}$$

au expresiile

$$\sigma_{zr} = -pr^2/4ha, \qquad \sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z} = 0, \qquad \sigma_{rz} = (1+\beta/\mu)\sigma_{zr}/(1-\beta/\mu). \tag{19}$$

§ 33. Placă eliptică

Pentru un contur eliptic definit de ecuația

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \tag{1}$$

știm că normala la acesta formează cu axa coordonatelor Ox un unghi $\vartheta = (t,x)$ dat de condiția

$$\operatorname{tg}\vartheta = a^2y/b^2x = \cos(n, y)/\cos(n, x). \tag{2}$$

Prin urmare condiția (9) din § 23 se scrie astfel

$$b^2xw_{,x} + a^2yw_{,y} = Q. \tag{3}$$

Alegînd pentru w o expresie incluzînd funcții armonice, putem deduce diferite tipuri de încărcări g admisibile. De exemplu pentru

$$w = \frac{Axy}{a^2+b^2} + \frac{Bx}{b^2} + \frac{Cy}{a^2} \tag{4}$$

avem forțele

$$Q = Axy + Bx + Cy.$$

Variația lor apare în figura 36. Curbele $w = \text{const.}$ apar în figura 37, trasate continui sau întrerupt (după cum w are un sens sau altul).

Tensiunile maxime au expresiile

$$\begin{aligned} \underset{xz}{\sigma_{zx}} &= (\mu \mp \beta)\, Ay/(a^2+b^2) \quad \text{pentru } y = b \\ \underset{yz}{\sigma_{zy}} &= (\mu \mp \beta)\, Ax/(a^2+b^2) \quad \text{pentru } x = a. \end{aligned} \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul ecuației neomogene (4) din § 23 vom observa că aceasta, pentru cazul static, admite soluția

$$w = W(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2) \tag{6}$$

în care

$$W = a^2b^2p/2(\mu - \beta)(a^2 + b^2)h, \qquad p = -Zh. \tag{7}$$

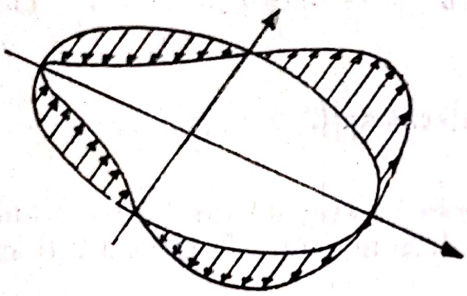


Fig. 36

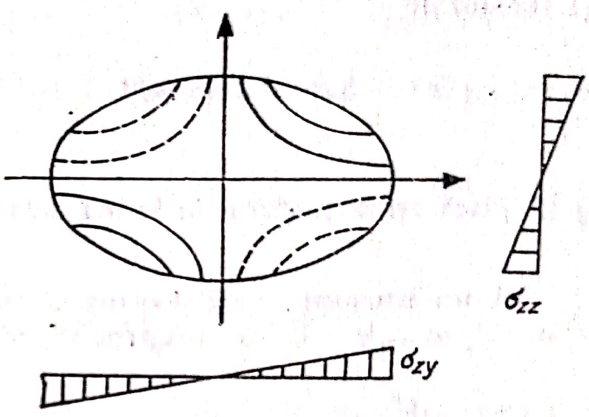


Fig. 37

Această soluție este nulă pe conturul (1) al elipsei. Utilizînd (2) rezultă

$$\cos(n, x) = dy/ds = b^2x/(a^4y^2 + b^4x^2)^{1/2}$$

$$\cos(n, y) = -dx/ds = a^2y/(a^4y^2 + b^4x^2)^{1/2} \tag{8}$$

și deci derivata normală a deplasării este

$$dw/dn = -2W(x^2b^2/a^2 + y^2a^2/b^2)/(a^4y^2 + b^4x^2)^{1/2} =$$

$$= -2W(a^4y^2 + b^4x^2)^{1/2}/a^2b^2. \tag{9}$$

Tensiunea tangențială pe contur este

$$\sigma_{zn} = (\mu - \beta)\, dw/dn = Z(a^4y^2 + b^4x^2)^{1/2}/(a^2 + b^2). \tag{10}$$

În dreptul axelor de coordonate această tensiune ia valorile

$$\sigma_{zx} = -ap/(1 + k^2)h, \qquad \sigma_{zy} = -k^2bp/(1 + k^2)h, \tag{11}$$

$(k = a/b)$ etc.

În cazul unei sarcini variind liniar

$$Z = -xp, \tag{12}$$

avem soluția de forma

$$w = (1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)\, xp/2\,(\mu - \beta)\,(3/a^2 + 1/b^2) \tag{13}$$

și tensiunile

$$\sigma_{zx} = -(a^2 - 3x^2 - k^2y^2)\, p/2\,(3 + k^2), \qquad \sigma_{zy} = -k^2xyp/(3 + k^2). \tag{14}$$

§ 34. Placă avînd conturul în formă de triunghi echilateral

Vom presupune că secțiunea transversală este mărginită de liniile $y = c \pm m\,x$, $y = 0$ ca în figura 38. Să considerăm atunci funcția auxiliară

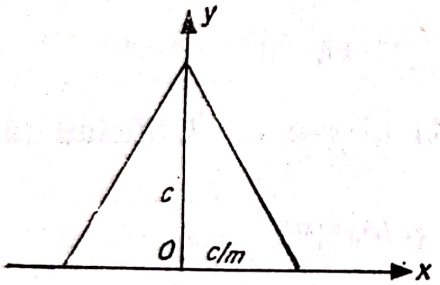


Fig. 38

$$\Psi = Ay\,\{(y - c)^2 - m^2\,x^2\} \tag{1}$$

care se anulează pe contur. Aplicînd operatorul lui Laplace deducem relația

$$\Delta\Psi = A[(6 - 2\,m^2)\,y - 4\,c] = -H. \tag{2}$$

Dacă luăm

$$G = -A\left[(6 - 2\,m^2)\left(a\,\frac{y^3}{6} + \frac{1 - a}{2}\,x^2y\right) - 2\,c\,(bx^2 + (1 - b)y^2)\right], \tag{3}$$

rezultă ecuația

$$\Delta G = H \tag{4}$$

iar

$$\psi = \Psi + G \tag{5}$$

este o funcție armonică.

Condițiile (27) și (29) din § 23 sînt prin construcție îndeplinite. Condiția (20) din § 23 trebuie să fie verificată de funcția G, furnizînd în mod implicit expresia funcției Q.

Scanned with OKEN Scanner

Admițind relațiile (25), (26), din § 23 avem

$$Q = (\mu - \beta)\, h\, A \{\cos \nu [(m^2 - 3)(ay^2 + (1 - a)\, x^2) + 4\, c\, (1 - b)\, y] + \sin \nu [(6 - 2\, m^2)\, (1 - a)\, xy - 4\, b\, c\, x]\}. \tag{6}$$

Prin urmare pe conturul $x = 0$ avem încărcarea

$$Q = 0. \tag{7}$$

Conturul $y = c \pm mx$ are cosinușii

$$\cos \nu = \pm m/\sqrt{1 + m^2}, \quad \sin \nu = 1/\sqrt{1 + m^2} \tag{8}$$

și deci, în cazul triunghiului echilateral ($m^2 = 3$), pe acest contur apare încărcarea

$$Q = (\mu - \beta)\, h\, A\, 2\, b\, c\, [\pm \sqrt{3}(1 - b)\, c/b + (3\, (1 - b)\, m/b - 1)\, x]. \tag{9}$$

Pentru $b = 3/4$, $A = 2\, Q_0/(\mu - \beta)\, h \sqrt{3\, c^2}$ avem

$$Q = Q_0, \quad \psi = A\left[y^3 - 3\, x^2\, y + c^2\, y + \frac{3c}{2}(x^2 - y^2)\right],$$

$$w = A\, [-x^3 + 3\, xy^2 + c^2\, x - 3\, cx\, y], \tag{10}$$

$$\sigma_{\substack{zx \\ xz}} = (\mu \mp \beta)\, \psi_{,y} = \frac{(\mu \mp \beta)\, 2\, Q_0}{(\mu - \beta)\sqrt{3\, c^2 h}}\, [-3(x^2 - y^2) + c^2 - 3\, cy],$$

$$\sigma_{\substack{zy \\ yz}} = -(\mu \mp \beta)\, \psi_{,x} = \frac{(\mu \mp \beta)\, 2\, Q_0}{(\mu - \beta)\sqrt{3}\, h\, c^2}\, [\sigma xy - 3\, cx].$$

Se constată că σ_{zy}, σ_{yz} se anulează pe lățimea $x = 0$ și în secțiunea $y = c/2$.

Scanned with OKEN Scanner

Obținem deci o soluție pentru placa trapezoidală din figura 39.

Pentru $b = 1$, $A = -Q_0/(\mu - \beta)\, 2\, h\, c$ avem

$$Q = Q_0\, x,\ \psi = \Psi + 2\, A\, c\, x^2 = A\,[y^3 - 3\, x^2\, y + c^2 y + 2\, c\,(x^2 - y^2)],$$

$$w = A[-\, x^3 + 3\, xy^2 + c^2 x + 2\, cxy],$$

$$\sigma_{\substack{zx \\ xz}} = -\frac{(\mu \mp \beta)\, Q_0}{(\mu - \beta)\, 2\, hc}\,[-3\,(x^2 - y^2) + c^2 - 4\, c\, y], \tag{11}$$

$$\sigma_{\substack{zy \\ yz}} = -\frac{(\mu \mp \beta)\ Q_0}{(\mu - \beta)\ 2hc}\,[\sigma xy - 4\, c\, x],$$

(vezi fig. 40).

Se constată că σ_{zy} și σ_{yz} se anulează pentru $y = 2\, c/3$ și obținem deci o soluție pentru placa trapezoidală din figura 41.

În cazul ecuației neomogene (4) din § 23, pentru forțe de inerție nule vom alege soluția

$$w = W\,((y - c)^2 - m^2\, x^2) \tag{12}$$

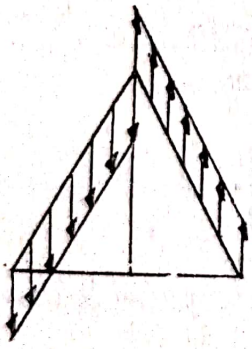


Fig. 39

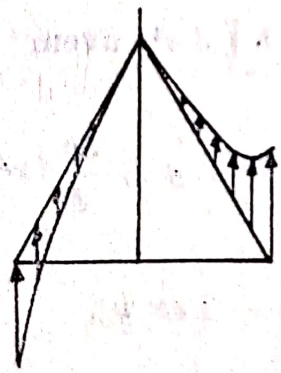


Fig. 40

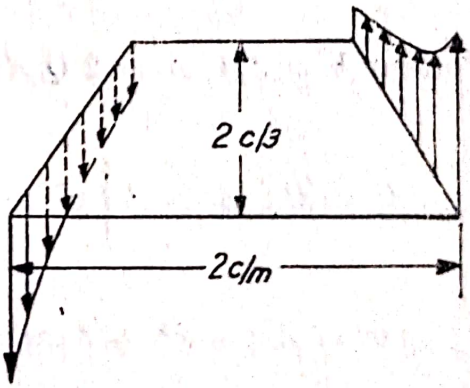


Fig. 41

care, conform (1), se anulează pe conturul triunghiului din figura 38. Această soluție satisface ecuația

$$w = 2\,(1 - m^2)\, W \tag{13}$$

și prin urmare

$$W = p/2\ \ (m^2 - 1)\ \ (\mu - \beta)\ \ h. \tag{14}$$

Scanned with OKEN Scanner

$p = -Zh$ reprezintă o încărcare uniformă.

Tensiunile tangențiale au expresiile

$$\sigma_{zx} = -m^2 px/(m^2-1)h, \quad \sigma_{zy} = p(y - c/2)/(m^2-1)h. \tag{15}$$

Soluții corespunzătoare unor încărcări variabile pot fi construite înlocuind în (12) W printr-o funcție de x și y.

§ 35. Placă dreptunghiulară

Vom considera conturul format din dreptele $x = \pm a, y = \pm b$. Condiția la limită (9) din § 23 se va scrie

$$(\mu - \beta) h w_{,x} = Q_x, \quad x = \pm a; \quad (\mu - \beta) h w_{,y} = Q_y, \quad y = \pm b. \tag{1}$$

Vom alege funcția

$$w = [Ax + By + C(x^2 - y^2)/2 + Dxy]/(\mu - \beta)h \tag{2}$$

pentru care avem

$$Q(\pm a, y) = A \pm Ca + Dy, \quad Q(x, \pm b) = B \mp Cb + Dx. \tag{3}$$

În figurile 42—45 sînt reprezentate variațiile lui Q corespunzătoare coeficienților A, B, respectiv C.

Vom da unele exemple de rezolvare a problemei transversale neomogene statice.

a) *Placă dreptunghiulară simplu rezemată.* Vom admite o sarcină transversală variind sinusoidal

$$Z = -(p/h) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b), \quad (m, n = 1, 2, \cdots) \tag{3'}$$

și condițiile la margine

$$w = 0 \text{ pentru } x = 0, a \text{ sau pentru } y = 0, b. \tag{4}$$

Soluția corespunzătoare este de forma

$$w = W \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar ecuația (4) din § 23 este satisfăcută pentru o deplasare maximă

$$W = p/(\mu - \beta)\, h\, \pi^2\, (m^2/a^2 + n^2/b^2). \tag{6}$$

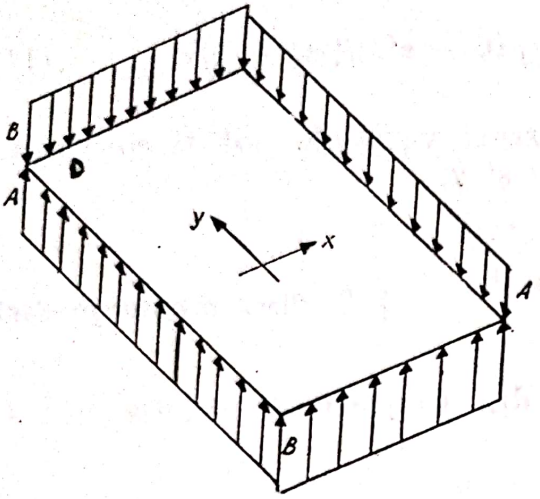


Fig. 42

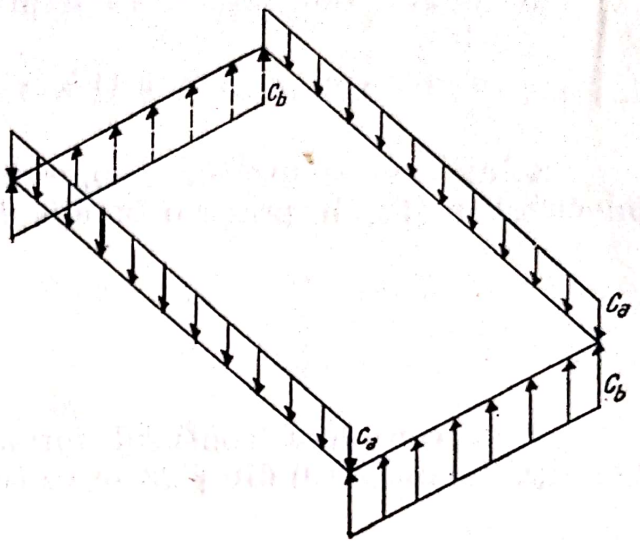


Fig. 43

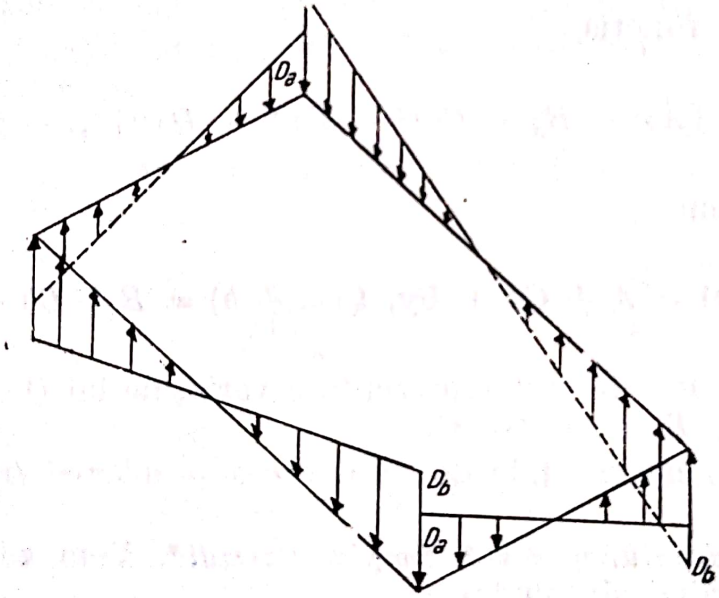


Fig. 44

Tensiunile (3) din § 23 au expresiile

$$\sigma_{\substack{xz\\zx}} = \sigma_{\substack{xz\\zx\,\max}} \cos(m\,\pi x/a) \sin(n\,\pi\, y/b),$$

$$\sigma_{\substack{xz\\zx}\,\max} = (\mu \pm \beta)\, m\, \pi\, W/a, \tag{7}$$

$$\sigma_{\substack{yz\\zy\,\max}} = \sigma_{\substack{yz\\zy}}\max, \sin(m\,\pi\, x/a) \cos(n\,\pi\, y/b) \quad \sigma_{\substack{yz\\zy\,\max}} = (\mu \pm \beta)\, n\, \pi\, W/b,$$

iar valorile lor maxime apar respectiv în mijlocul laturilor $x = 0$ sau $y = 0$.

În cazul unei încărcări de forma

$$Z = -\sum_{m,n=0}^{\infty}\sum p_{mn} \sin (m\,\pi\,x/a) \sin (n\,\pi\,y/b)/h, \tag{8}$$

vom aplica în scopul determinării coeficienților p_{mn} în raport cu funcția Z, identitățile

$$\int_0^b \sin (m\,\pi\,y/b) \sin (n\,\pi\,y/b)\,dy = 0,\ (n \neq r);\ = b/2,\ (n = r) \tag{9}$$

și deci

$$-\int_0^a \int_0^b Z \sin (m\,\pi\,x/a) \sin (n\,\pi y/b)\,dx\,dy = abp_{mn}\,4h. \tag{10}$$

Se găsește, conform relației (4) din § 23, soluția

$$w = \sum_{m,n=1}^{\infty}\sum \frac{p_{mn} \sin (m\,\pi\,x\,/\,a) \sin (n\,\pi\,y/b)}{\pi^2\,(\mu - \beta)\,h\,(m^2/a^2 + n^2/b^2)}. \tag{11}$$

În cazul în care $Z = -p$ = constant, rezultă din (10) $p_{mn} = 16\,p/\pi^2 mnh$, $(m,n = 1,3,5,\cdots);\ = 0,\ (m,n = 0,2,4,\cdots)$ (12)

și deci

$$w = \frac{16p}{\pi^4\,(\mu - \beta)\,h} \sum_{m,n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\sum \frac{\sin (m\,\pi\,x/a) \sin (n\,\pi\,y/b)}{mn\,(m^2/a^2 + n^2/b^2)}. \tag{13}$$

Deplasarea maximă are loc în centrul plăcii $x = a/2$, $y = b/2$ și este

$$w_{\max} = \frac{16p}{\pi^4\,(\mu - \beta)\,h} \sum_{m,n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\sum \frac{(-1)^{(m+n)/2-1}}{mn(m^2/a^2 + n^2/b^2)}. \tag{14}$$

Într-o primă aproximație, limitîndu-ne la primul termen, avem

$$w_{\max} = 16\ p\ a^2\ b^2/\pi^4\,(\mu - \beta)\,h(a^2 + b^2). \tag{15}$$

Notăm că pentru $\beta = 0$ avem $\mu = E/2(1 + \nu)$ în care E este modulul de elasticitate al lui Young iar $\nu = 1/3 - 1/5$. Tensiunile se calculează ca în (7).

În cazul unei sarcini uniform distribuite pe o suprafaţă dreptunghiulară de laturi u,v din interiorul plăcii, suprafaţă a cărui centru are coordonatele U, V faţă de mijlocul plăcii, aplicînd formula (10) găsim coeficienţii dezvoltării în serie ai încărcării $P = -Z\,uvh$

$$p_{mn} = \frac{4P}{abuv}\int_{\xi-u/2}^{\xi+u/2}\int_{\eta-v/2}^{\eta+v/2} \sin(m\,\pi\,x/a)\sin(n\,\pi\,y/b)\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \tag{16}$$
$$= \frac{16P}{\pi^2\,mnuv}\sin(m\,\pi\,\xi/a)\sin(n\,\pi y/b)\sin(m\,\pi\,x/2a)\sin(n\,\pi\,y/2b).$$

Remarcăm că pentru cazul în care u şi v tind la zero, rezultă coeficienţii în serie ai unei sarcini concentrate P.

$$p_{mn} = \frac{4P}{ab}\sin(m\,\pi\,y/a)\sin(n\,\pi y/b) \tag{17}$$

rezultînd conform relaţiei (11) deplasarea

$$w = \sum_{m,n=1,3,\ldots}^{\infty}\sum \frac{4P}{\pi^2(\mu-\beta)\,h\,(m^2/a^2 + n^2/b^2)ab}\sin(m\,\pi x/a)\sin(m\pi y/b)\cdot \tag{18}$$

Pentru $\xi = x = a/2, y = \eta = b/2$ rezultă

$$w_{\max} = \frac{4P}{\pi^2(\mu-\beta)\,hab}\sum_{m,n=1,3,\ldots}^{\infty}\sum 1/(m^2/a^2 + n^2/b^2). \tag{19}$$

În cazul plăcii pătrate, luîndu-se primii patru termeni ai seriei se găseşte valoarea aproximativă

$$w_{\max} = 0{,}01121\;\pi^2\;P/(\mu-\beta)\,h = 0{,}11053\;P/(\mu-\beta)h. \tag{20}$$

Rezultatul, independent de dimensiile plăcii, este datorit efectului important al armăturilor laterale, presupuse rigide în sensul plăcii.

Soluţii sub formă de serii simple se pot obţine luînd dezvoltări de forma

$$w = \sum_{m=1,\ldots}^{\infty} Y_m \sin(m\pi x/a), \tag{21}$$

Scanned with OKEN Scanner

Y_m'' fiind funcții numai de y. Vom descompune soluția totală w astfel

$$w = w_1 + w_2 \tag{22}$$

și admitem că w_1 reprezintă deplasarea unei fîșii uniform încărcate cu sarcina $Z = -p/h$, paralelă cu axa Ox și simplu rezemată. Rezultă

$$w_1 = -px\,(x-a)/2\,(\mu-\beta)h. \tag{23}$$

Sarcina p este sarcina totală a plăcii. Luînd w_2 în forma (21) și presupunînd din motive de simetrie $m = 1,3,5,\ldots$, deducem, conform ecuației omogene (14) din § 23, condiția

$$\sum_{m=1}^{\infty} (Y_m'' - m^2\pi^2 Y_m/a^2) \sin(m\pi x/a) = 0. \tag{24}$$

Ecuația (24) este satisfăcută dacă toți coeficienții funcțiilor trigonometrice sînt nuli, rezultînd astfel funcții de forma

$$Y = pa^2 (A_m \operatorname{ch}(m\pi y/a) + B_m \operatorname{sh}(m\pi y/a))/(\mu-\beta)h. \tag{25}$$

Vom anula din motive de simetrie a deplasării constantele B_m. Pe de altă parte, vom dezvolta funcția (23) în serie trigonometrică

$$w_1 = \frac{4pa^2}{\pi^3(\mu-\beta)h} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin(m\pi x/a). \tag{26}$$

Rezultă expresia soluției totale

$$w = \frac{pa^2}{(\mu-\beta)h} (4/\pi^3 m^3 + A_m \operatorname{ch}(m\pi y/a)) \sin(m\pi x/a),\ (m = 1,3,5,\ldots). \tag{27}$$

Impunînd condițiile la limitele $y = \pm b/2 : w = 0$, rezultă valorile constantelor

$$A_m = -4/\pi^3 m^3 \operatorname{ch} \alpha_m \tag{28}$$

pentru

$$\alpha_m = m\pi b/2a \tag{29}$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci

$$w = \frac{4pa^2}{(\mu-\beta)\,h\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^3}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}(2\alpha_m y/b)}{\operatorname{ch}\alpha_m}\right) \sin(m\pi x/a). \tag{30}$$

Deplasarea maximă se produce în centrul plăcii ($x = a/2, y = 0$) și este

$$w_{\max} = \frac{4pa^2}{(\mu-\beta)h^3} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^3}(1 - 1/\operatorname{ch}\alpha_m) = \tag{30'}$$

$$= \frac{pa^2}{8(\mu-\beta)h} - \frac{4pa^2}{(\mu-\beta)h\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^3 \operatorname{ch}\alpha_m}.$$

Primul termen corespunde soluției (23) pentru fîșia uniform încărcată. Ceilalți termeni au valori destul de mici pentru plăci pătrate.

Tensiunile tangențiale au expresiile

$$\underset{zx}{\sigma_{xz}} = (\mu \pm \beta)\frac{4pa}{(\mu-\beta)\,h\,\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^2}\left[1 - \frac{\operatorname{ch}(2\alpha_m y/b)}{\operatorname{ch}\alpha_m}\right] \cdot \cos(m\,\pi\,x/a) =$$

$$= \frac{\mu \pm \beta}{(\mu-\beta)h}\left[p\,(a/2 - x) - \frac{4pa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{\operatorname{ch}(2\alpha_m y/b)}{\operatorname{ch}\alpha_m} \cos(m\pi\,x/a)\right]$$

$$\underset{zy}{\sigma_{yz}} = -\frac{\mu \pm \beta}{\mu-\beta} \frac{4pa}{h\,\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \operatorname{sh}(2\alpha_m y/b) \sin(m\,\pi\,x/a)/\operatorname{ch}\alpha_m.$$

Pentru $x = a/2$ avem $\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 0$. Pentru $x = 0, x = a, y = 0$ avem valorile maxime

$$\underset{xz}{\sigma_{xz}} = \frac{\mu \pm \beta}{\mu-\beta} \frac{pa}{2h}\left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\ldots} 1/m^2 \operatorname{ch}\alpha_m\right]. \tag{33}$$

b) *Placă dreptunghiulară anizotropă.* În cazul ecuațiilor constitutive

$$\sigma_{zx} = \mu_x e_{zx}, \quad \sigma_{zy} = \mu_y e_{zy} \tag{34}$$

și pentru $\beta = 0$, se deduce ecuația diferențială

$$\sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y} = \mu_x w_{,xx} + \mu_y w_{,yy} = \rho\ddot{w} + Z. \tag{35}$$

Scanned with OKEN Scanner

Alegînd o încărcare de forma (8), (12) și presupunînd condițiile (4), se deduce soluția (8) în care

$$w = \sum_{mn=1,3,5,\ldots}^{\infty} a_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \tag{36}$$

iar

$$a_{mn} = \frac{16p}{\pi^4 h} \frac{1}{mn(m^2 \mu_x/a^2 + n^2 \mu_y/b^2)}. \tag{37}$$

Deoarece alegem o soluție de forma (31), (32) și încărcarea $Z = -p/h$, rezultă

$$w_1 = px(a-x)/2\mu_x h, \quad (38) \qquad \mu_y Y''_m - \frac{m^2\pi^2}{a^2} \mu_x Y_m = 0. \tag{39}$$

Rădăcinile ecuației caracteristice asociate celei din (39) sînt

$$\alpha = \pm \frac{m\pi}{a} \gamma, \qquad \gamma = \sqrt{\mu_x/\mu_y} \tag{40}$$

în care presupunem μ_x, $\mu_y > 0$. Prin urmare avem soluția totală

$$w = \frac{pa^2}{\mu_x h} \left[\frac{4}{\pi^3 m^3} + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} \gamma y \right] \sin \frac{m\pi}{a} x, (m = 1,3,5,\cdots) \tag{41}$$

pentru care are loc condiția (28) dacă notăm

$$\alpha_m = m\pi b\gamma/2a. \tag{42}$$

Se obțin rezultatele (30), (31), (33) pentru $\mu \pm \beta = \mu_x$.

§ 36. Placă inelară circulară

Vom considera funcția analitică

$$\mathfrak{F}(\zeta) = \alpha\zeta + \beta_0/\zeta. \tag{1}$$

Cu ajutorul componentelor reale și imaginare ale acestei funcții, construim funcția armonică

$$w = Ax + By + (Cx + Dy)/r^2 \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

și alegem reprezentarea polară $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Rezultă condițiile la limită

$$Q_{R_0} = (\mu - \beta)\, h w_{,r}|_{r=R_0} = (\mu - \beta)h\left[A\cos\theta + B\sin\theta - \frac{C\cos\theta + D\sin\theta}{R_0^2}\right], \tag{3}$$

$$Q_R = (\mu - \beta)h\, w_{,r}|_{r=R} = (\mu - \beta)h\left[A\cos\theta + B\sin\theta - \frac{C\cos\theta + D\sin\theta}{R^2}\right].$$

Impunînd condiția $Q_{R_0} = 0$ rezultă

$$C = AR^2, \quad D = BR^2, \quad Q_r = (\mu - \beta)h(1 - R^2/R^2_0)\,(A\cos\theta + B\sin\theta). \tag{4}$$

Variația lui Q_R poate fi urmărită în figura 45.

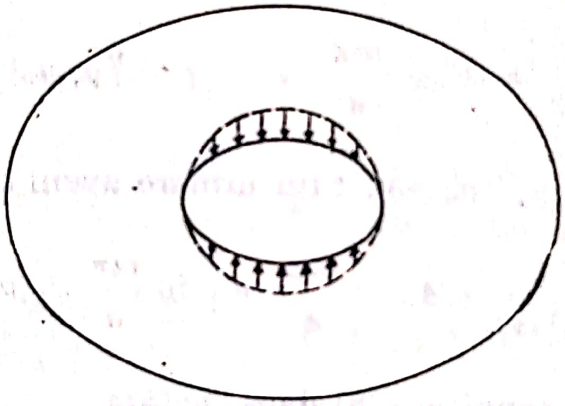


Fig. 45

Prin urmare, dacă pe conturul $r = R_0$ se dă o solicitare echivalentă unui cuplu

$$M_x = R_0^2 \int_0^{2\pi} Q_R \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = (\mu - \beta)\, h\,(R_0^2 - R^2)\,\pi B, \tag{5}$$

$$M_y = R_0^2 \int_0^{2\pi} Q_R \cos\theta \,\mathrm{d}\theta = (\mu - \beta)h(R_0^2 - R^2)\,\pi A$$

are loc cîmpul de deplasări

$$w = A(1 + R^2/r^2)\,(Ax + By). \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tensiunile au expresiile

$$\sigma_{\substack{zr\\rz}} = (\mu \mp \beta) w_{,r} = (\mu \mp \beta)(1 - R^2/r^2)\,(A\cos\theta + B\sin\theta),$$
$$\sigma_{\substack{z\theta\\\theta z}} = (\mu \mp \beta) w_{,\theta}/r = (\mu \mp \beta)(1 + R^2/r^2)\,(B\cos\theta - A\sin\theta). \tag{7}$$

Conturul $r = R_0$ poate fi exterior sau interior după cum $R_0 \gtrless R$. Dacă luăm

$$w = \alpha \log (r/R_0), \quad \mathfrak{F}(\zeta) = \alpha \log (\zeta/R_0) \tag{8}$$

deducem

$$w\,(R_0) = 0, \qquad w(R) = A \log (R/R_0)$$
$$Q_r = (\mu - \beta)\, hA/r = \frac{(\mu - \beta)h}{r} \frac{w(R)}{\log (R/R_0)}. \tag{9}$$

Rezultanta forțelor de încărcare pe conturul $r = \text{const.}$ este

$$Q = Q_r 2\pi r = \frac{2\pi (\mu - \beta)\, hw(R)}{\log (R/R_0)} \tag{10}$$

și deci este aceeași pentru orice r, fiind satisfăcută condiția de echilibru în sens transversal. Schema de încărcare este dată în figura 46.

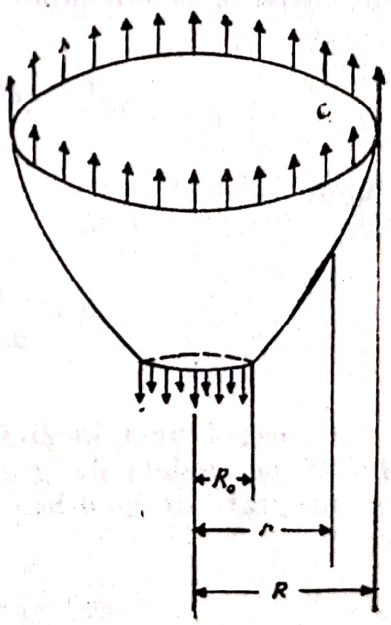


Fig. 46

Vom considera problema neomogenă, asociată ecuației (4) din § 23 și relațiile (12)—(19) din § 32. Vom considera de asemenea conturul $r = b < a$ al golului central al plăcii circulare acționat de tensiunile tangențiale $q = P/2\,\pi\, bh$, P fiind rezultanta acestora iar h înălțimea plăcii. Rezultă $B_0 \neq 0$, condiția (12) din § 32 și următoarea

$$\sigma_{zr} = q, \ (r = b) \tag{11}$$

sau

$$(\mu - \beta)\, B_0/b - pb/2h = q. \tag{12}$$

Rezultă soluția totală

$$w = \frac{pa^2}{4(\mu - \beta)h}\left((1 - \rho^2 + \frac{2b^2}{a^2}\left(1 + \frac{2hq}{bp}\right)\ln\rho\right) \tag{13}$$

pentru care apar tensiunile

$$\sigma_{zr} = \frac{p}{2hr^2}(b^2(1 + 2hq/bp) - r^2), \quad \sigma_{rz} = (1 + \beta/\mu)\,\sigma_{zr}/(1 - \beta/\mu), \sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z} = 0. \tag{14}$$

În cazul unei plăci circulare încărcată uniform de-a lungul unui inel de rază $r = a$ și grosime Δb cu o forță transversală $q = hZ = P/2\pi b\Delta b$, vom considera placa $r \leqslant b$ și placa $b < r \leqslant a$ cuplate între ele în regiunea $r = b$ astfel ca deplasările să fie aceleași în această regiune. Avem soluțiile, conforme cu (13) de mai sus și cu $(12)_2$ din § 32, în care luăm $p = 0$:

$$w = A, r \leqslant b\,; w = bq \ln \rho/(\mu - \beta), \ (b < r \leqslant a). \tag{15}$$

Deplasările w și tensiunile tangențiale vor fi aceleași pentru $r = b$ dacă

$$A + B \ln b = bq \ln (b/a)/(\mu - \beta) \tag{16}$$

de unde

$$w = \frac{bq}{\mu - \beta}\ln(b/a), \quad (b \leqslant r \leqslant a). \tag{17}$$

În cazul unei încărcări concentrice $dP = 2\pi bq\,db = hZ$ distribuită uniform pe inelele de grosime $dr = db$, în domeniul $0 \leqslant r \leqslant c$, avem prin integrare de la 0 la c

$$P = \pi c^2 q \tag{18}$$

iar în zona neîncărcată $c \leqslant r \leqslant a$

$$w = \frac{q}{\mu - \beta}\ln\rho \int_0^c b\,db = \frac{P}{2\pi(\mu - \beta)}\ln\rho. \tag{19}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $r = 0$ găsim din (17), (25), prin integrarea săgeții din mijlocul plăcii în urma înlocuirii lui q cu qdb

$$w = \frac{P}{2(\mu - \beta)} (\ln (c/a) - 1/2). \tag{20}$$

Pentru $r \geqslant c$ rezultă tensiunile tangențiale

$$\sigma_{zr} = P/2\,\pi r. \tag{21}$$

§ 37. Placă mărginită de o epitrohoidă

Vom utiliza transformarea conformă

$$\zeta = f(\zeta) = b(\zeta^n + a\zeta), \quad \zeta = \rho\sigma, \quad \sigma = e^{i\vartheta}, \tag{1}$$

n fiind un număr întreg supraunitar iar $b \geqslant 0$, $a \geqslant n$. Presupunem funcția G de forma dată în (2), § 29, în care reținem doar termenii liniari. Eventual admitem încărcarea condiționată de o tasare a conturului conform (5) din § 29. Vom aplica formulele (2), (3) din § 29,

$$\mathfrak{F}(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int_{\gamma} [(A - iB)b(\sigma^n + a\sigma) + (A + iB)b(\sigma^{-n} + a\sigma^{-1})]\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} +$$

$$+ \text{const.} = -i(A - iB)b(\zeta^n + a\zeta). \tag{2}$$

S-a anulat constanta de integrare, ceea ce e posibil deoarece domeniul e simplu conex. Formula (9) din § 28 conduce la efortul unitar complex

$$\sigma_{z\rho} - i\sigma_{z\theta} = -\frac{(\mu - \beta)\zeta i}{\rho\,|f'(\zeta)|}(A - iB)\,b\,(n\zeta^{n-1} + a) \tag{3}$$

în expresia căruia intervine modulul

$$|f'(\zeta)| = b\,[n^2\,\rho^{2n-2} + 2an\,\rho^{n-1}\cos(n-1)\,\theta + a\,]^{1/2}. \tag{4}$$

Pe conturul $\rho = 1$ rezultă tensiunile tangențiale

$$\sigma_{z\rho} = (\mu - \beta)\,[A\,(n\sin n\theta + a\sin\theta) - B\,(n\cos n\theta + a\cos\theta)]/\Delta, \tag{5}$$

$$\sigma_{z\theta} = (\mu - \beta)[\,+A\,(n\cos n\theta + a\cos\theta) + \beta\,(n\sin n\theta + a\sin\theta)]/\Delta.$$

S-a notat

$$\Delta = (n^2 + 2an\cos(n-1)\theta + a^2)^{1/2}. \tag{6}$$

Dacă $a > n$, conturul nu are puncte de rebrusment. În acest caz maximul funcţiilor (5) se află pe contur. Remarcăm că pentru $\cos(n-1)\theta = -1$ sau $\theta = (2k+1)\pi/(n-1)$ avem $\Delta = a-n$. Pentru $n = 1$, conturul este o epicicloidă.

Constantele (8) din § 29 au expresiile:

$$D = \frac{i}{4}\int_\gamma [(A - iB)(\sigma^n + a\sigma) -$$

$$- (A + iB)(\sigma^{-n} + a\sigma^{-1})] \cdot b^2 d(\zeta^n + a\zeta)(\overline{\zeta}^n + a\overline{\zeta}) =$$

$$= -\frac{b^3}{4}\int_0^{2\pi} [(A - iB)(\sigma^n + a\sigma) +$$

$$+ (A + iB)(\sigma^{-n} + a\sigma^{-1})] \cdot [(n\sigma^n + a\sigma)(\sigma^{-n} + a\sigma^{-1}) +$$

$$+ (\sigma^n + a\sigma)(-n\sigma^{-n} - a\sigma^{-1})](\sigma^{1-n} - \sigma^{n-1}).(1-\nu)\, a\, d\theta = 0,$$

$$D_x = -\frac{1}{4i}\int_0^{2\pi} [-i(A - iB)(\sigma^n + a\sigma) -$$

$$- i(A + iB)(\sigma^{-n} + a\sigma^{-1})] \cdot b^2 d[\sigma^n + a\sigma + \sigma^{-n} + a\sigma^{-1}] =$$

$$= -\pi b^2 (n + a^2) B,$$

$$D_y = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} [-i(A - iB) -$$

$$- i(A + iB)(\sigma^{-n} + a\sigma^{-1})] \cdot b^2 d(\sigma^n + a\sigma - \sigma^{-n} - a\sigma^{-1}) =$$

$$= \pi b^2 (n + a^2) A. \tag{7}$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 38. Placă avînd secțiunea transversală mărginită de o curbă în forma lemniscatei lui Booth

Vom utiliza reprezentarea

$$f(\zeta) = k\,\zeta/(\zeta^2 + a) \tag{1}$$

pentru $a > 1$, $k > 0$.

Din (3), (4), § 29, și (3), § 28, și pentru o formă liniară în x, y a funcției G din (2), § 28, va rezulta funcția

$$\mathfrak{F}(\zeta) = -\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[(A - iB)\frac{\sigma}{\sigma^2 + a} + (A + iB)\frac{\sigma^{-1}}{\sigma^{-2} + a}\right]\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \text{const.} =$$

$$= -\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(A - iB)\,\sigma(1 + a\sigma^2) + (A + iB)\sigma(\sigma^2 + a)}{(\sigma^2 + a)(1 + a\sigma^2)(\sigma - \zeta)}\,d\sigma + \text{const.} \tag{2}$$

Aplicînd metoda reziduurilor formulei precedente în care apar polii simpli $\sigma = \pm i\sqrt{a}$, (pentru $|\sigma| >> 1$ expresia de sub semnul integralei are ordinul de mărime σ^{-2}), deducem

$$\mathfrak{F}(\zeta) = -i(A_1 + A_2),$$

$$A_{\frac{1}{2}} = -\frac{R}{2\pi}\left\{\frac{(\sigma \mp i\sqrt{a})\,[(A - iB)\sigma(1 + a\sigma^2) + (A + iB)\,\sigma(\sigma^2 + a)]}{(\sigma^2 + a)(1 + a\,\sigma^2)(\sigma - \zeta)}\right\} =$$

$$= \mp\frac{R}{4\pi}\frac{A - iB}{i\sqrt{a} \mp \zeta}\,, \quad (\sigma = \pm i\sqrt{a}) \tag{3}$$

astfel că

$$\mathfrak{F}(\zeta) = -\frac{iR}{4\pi}(A - iB)\frac{\zeta}{a + \zeta^2}. \tag{4}$$

De asemenea, aplicînd formulele de reprezentare pentru tensiuni sub forma complexă (9) din § 28,

$$\sigma_{z\rho} - i\sigma_{z\theta} = (\mu - \beta)\frac{\zeta}{\rho\left|\dfrac{a - \zeta^2}{(a + \zeta^2)^2}\right|}\left\{-\frac{iR}{4\pi}(A - iB)\frac{\zeta}{a + \zeta^2}\right\} \tag{5}$$

se deduce, pentru $\rho = 1$, relația

$$\sigma_{z\rho} - i\sigma_{z\theta} = -\frac{iR}{4\pi}(\mu - \beta)(A - iB)\frac{1 + a(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)}{(a^2 + 1 - 2a\cos 2\theta)^{1/2}} =$$

$$= -\frac{R[B(1 + a\cos 2\theta) - Aa\sin 2\theta + i(A(1 + a\cos 2\theta) + Ba\sin 2\theta)]}{4\pi(a^2 + 1 - 2a\cos 2\theta)^{1/2}}. \quad (6)$$

Pentru $B = 0$ avem valorile maxime

$$\sigma_{z\theta} = \frac{RA(a+1)}{4\pi(a-1)}, \quad (\cos 2\theta = 1), \qquad \sigma_{z\rho} = \frac{RAa}{4\pi(a^2+1)^{1/2}}, \quad (\sin 2\theta = 1). \quad (7)$$

Pentru $A = 0$ avem valorile maxime

$$\sigma_{z\theta} = \frac{RBa}{4\pi(a^2+1)^{1/2}}, \quad (\sin 2\theta = 1),$$

$$\sigma_{z\rho} = -\frac{RB(a+1)}{4\pi(a-1)^{1/2}}, \quad (\cos 2\theta = 1). \quad (8)$$

C. Concentrarea tensiunilor în jurul golurilor

§ 39. Studiul soluțiilor în cazul domeniilor multiplu conexe

În cele ce urmează vom considera un domeniu dublu conex. Din formula de reprezentare (1) de la § 26, rezultă că w este uniformă dacă $\mathrm{Re}\,\mathfrak{F}(\zeta)$ este uniformă. În schimb funcția ψ ar putea fi multiformă, căpătînd în urma parcurgerii în sensul acelor de ceasornic a unei curbe închise L o creștere $2i\pi C$, C fiind o constantă reală. Asemenea creștere se produce în cazul unei funcții complexe de forma

$$\mathfrak{F}(\zeta) = w + i\psi = \mathfrak{F}^*(\zeta) + C\log\zeta, \quad (1)$$

 $\mathfrak{F}^*(\zeta)$ fiind o funcție olomorfă, uniformă în domeniul considerat.

Scanned with OKEN Scanner

Integrala de linie

$$\mathbf{Q}(L) = \int_L Q\, ds = (\mu - \beta)\, h \int_L d\psi \tag{2}$$

pe care o vom denumi efort de lunecare total pe L va avea atunci valoarea

$$\mathbf{Q}(L) = (\mu - \beta)\, h\, 2\pi C. \tag{3}$$

Din această formulă se determină C în funcție de $\mathbf{Q}(L)$ astfel că (1) se mai scrie astfel

$$\mathfrak{F}(\zeta) = \frac{\mathbf{Q}(L)}{2\pi(\mu - \beta)\, h} \log \zeta + \mathfrak{F}^*(\zeta). \tag{4}$$

În cazul unui cîmp omogen de tensiuni la infinit, va trebui ca σ_{xx} și σ_{xy} să fie constante la infinit și pentru aceasta va fi necesar ca $\mathfrak{F}^*(\zeta)$ să fie de forma

$$\mathfrak{F}^*(\zeta) = (\alpha + i\beta)\, \zeta + \mathfrak{F}_0(\zeta). \tag{5}$$

$\mathfrak{F}_0(\zeta)$ trebuie să admită, pentru ζ suficient de mare, o dezvoltare

$$\mathfrak{F}_0(\zeta) = a_0 + a_1 / \zeta + a_2 / \zeta^2 + \dots . \tag{6}$$

În cazul în care $\mathbf{Q}(L)$ este nul, conturul L al unui gol nefiind solicitat de forțe transversale, funcția $\mathfrak{F}(\zeta)$ va fi uniformă și continuă în întreg domeniul ocupat de placă.

În cazul unui domeniu cu r contururi închise L_j, $j = 1, 2, \dots r$, funcția $\mathfrak{F}(\zeta)$ va avea creșteri determinate pentru fiecare ciclu închis parcurs de-a lungul a cîte unui contur L_j. Vom nota prin c_j constantele care corespund cîte unui contur L_j. Vom nota prin L sau L_{r+1} conturul exterior al plăcii care include toate celelalte contururi L_j. Atunci funcția de reprezentare va avea expresia

$$\mathfrak{F}(\zeta) = \sum_{j=1}^{r} c_j \log(\zeta - \zeta_j) + \mathfrak{F}^*(\zeta),\ c_j = \frac{Q_j}{2\pi(\mu - \beta)\, h} \tag{7}$$

în care

$$c_j = Q_j / 2\pi(\mu - \beta)\, h, \quad Q_j = Q(L_j). \tag{8}$$

O simplificare importantă apare în cazul în care golul are dimensii foarte reduse față de dimensiile plăcii în planul median astfel încît cîmpul de lunecări să nu influențeze în mod sensibil concentrările de tensiune din vecinătatea golului. Atunci, dacă $\mathcal{F}_0(\zeta)$ va reprezenta soluția pentru placa fără gol iar $\mathcal{F}^*(\zeta)$ corecția pentru perturbările locale în zona golului, vom substitui în (2) din § 28 (în care luăm $c = 0$) funcția

$$\psi = \frac{\mathcal{F}^*(\zeta) - \overline{\mathcal{F}^*(\zeta)}}{2i} + \operatorname{Re}[\mathcal{F}_0(\zeta)/i]. \tag{9}$$

După înmulțire cu $ds/2i\pi(\sigma - \zeta)$, integrăm pe γ și ținînd seama de faptul că $\mathcal{F}^*(\zeta)$ este de forma (5), deducem formula

$$\mathcal{F}^*(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{G^0(\sigma,\overline{\sigma}) + G(\sigma,\overline{\sigma})}{\sigma - \zeta}\,d\sigma. \tag{10}$$

S-a notat

$$G^0(\sigma,\overline{\sigma}) = \operatorname{Re}(i\,\mathcal{F}_0(\zeta)). \tag{11}$$

G se va lua identic nul în cazul golului fără încărcări.

Prin aplicarea transformării conforme exteriorului unui gol pe interiorul cercului unitate, funcția de transformare va avea următoarea formă

$$\zeta = f(\zeta) = c(1/\zeta + e_1\zeta + e_2\zeta^2 + \ldots + e_n\zeta^n). \tag{12}$$

Funcția (7) va lua noua formă

$$\mathcal{F}(\zeta) = \frac{Q(L)}{2\pi(\mu - \beta)h}\log\zeta + (\alpha + i\beta)\frac{c}{\zeta} + \mathcal{F}^*(\zeta) \tag{13}$$

în care

$$\mathcal{F}^*(\zeta) = \sum_0^\infty a_n\zeta^n \tag{14}$$

este o funcție olomorfă de variabile ζ în interiorul cercului unitate. Substituind expresiei (13) în condiția la limită (9) în care termenii sînt dezvoltați în serii infinite de puteri, se obține un sistem de ecuații algebrice care permite determinarea coeficienților a_n.

Dacă $f(\zeta)$ este o funcție rațională de ζ, se poate arăta că se poate determina funcția $\mathcal{F}^*(\zeta)$ din (10). Dacă această funcție nu este rațională, ecuația menționată se poate reduce la o ecuație de tip Fredholm care poate fi rezolvată.

Scanned with OKEN Scanner

Cu ajutorul soluțiilor $\mathcal{F}^*(\zeta)$ se determină funcția din (4), iar apoi stabilim tensiunile care apar în (9), § 28, în urma separării părții reale și imaginare.

O formulă care permite o determinare directă a tensiunilor poate fi obținută impunînd condiția ca și în (9), § 28, $\sigma_{z\rho} = Q_\rho^0 / h$ pe contur (sau $=0$) ceea ce revine la condiția pe contur

$$\zeta \mathcal{F}^{*\prime}(\zeta) + \bar{\zeta}\, \bar{\mathcal{F}}^{*\prime}(\zeta) + 2H(\zeta, \bar{\zeta}) = 0. \tag{15}$$

S-a notat

$$H(\zeta, \bar{\zeta}) = \operatorname{Re} \zeta\, \mathcal{F}_0'(\zeta). \tag{16}$$

$\mathcal{F}_0(\zeta)$ corespunde plăcii fără gol. Rezultă atunci analog ca mai sus formula

$$\mathcal{F}'(\zeta) = \frac{i}{\pi\zeta} \int_L \frac{H(\sigma, \bar{\sigma})}{\sigma - \zeta}\, d\sigma. \tag{17}$$

Formula (9) din § 28 devine

$$\sigma_{z\rho} - i\sigma_{z\theta} = (\mu - \beta) \frac{\zeta}{\rho |f'(\zeta)|} \frac{i}{\pi\zeta} \int_L \frac{H(\sigma, \bar{\sigma})}{\sigma - \zeta}\, d\sigma + (\sigma_{z\rho} - i\sigma_{z\theta})^0. \tag{18}$$

§ 40. Cîmp cilindric de lunecare

Vom presupune o lunecare constantă $Q_x^0 = Q$, $Q_y^0 = 0$ în orice punct al plăcii, pentru care corespund deplasările din (2), § 31. Pentru acestea rezultă tensiunile la infinit și funcția complexă de reprezentare

$$\sigma^0 = \sigma_{zx}^0 = Q/h, \quad \mathcal{F}_0(\zeta) = \zeta \sigma_0/(\mu - \beta). \tag{1}$$

Constanta de integrare din ultima relație a fost luată identic nulă.

În funcție de forma golului se poate stabili expresia funcției $\mathcal{F}^*(\zeta)$ din (13), § 39. Remarcăm că pentru o transformare

$$\zeta = f(\zeta) = R(1/\zeta + \Sigma c_n \zeta^n) \tag{2}$$

în care $n > 0$, avem

$$G^0(\sigma, \bar{\sigma}) = -\frac{R\sigma^0}{2(\mu-\beta)i}(\sigma^{-1} + \Sigma c_n \sigma^n - \sigma - \Sigma c_n \sigma^{-n}),$$

$$\mathfrak{F}^*(\zeta) = \frac{R\sigma^0}{\mu-\beta}(\zeta - \Sigma c_n, \zeta^n), \mathfrak{F}(\zeta) = \frac{R\sigma^0}{\mu-\beta}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right). \tag{3}$$

Din (9), § 28, rezultă

$$\sigma_{z\rho} - i\sigma_{z\theta} = \frac{\zeta - \zeta^{-1}}{\rho N}\sigma^0 = \frac{(1-\rho^{-2})\cos\theta + i(1+\rho^{-2})\sin\theta}{N}\sigma^0,$$

$$N = |\Sigma n c_n \zeta^{n-1} - \zeta^{-2}|^{1/2} = [(\Sigma n c_n \rho^{n-1} \cos(n-1)\theta - \rho^{-2}\cos 2\theta)^2 +$$

$$+ (\Sigma n c_n \rho^{n-1} \sin(n-1)\theta + \rho^{-2}\sin 2\theta)^2]^{1/2} \tag{4}$$

și deci, pentru $\rho = 1$, avem $\sigma_{z\rho} = 0$. De asemenea decurge formula

$$\sigma_{z\theta} = -K\sigma_0,$$

$$K = 2\sin\theta/N$$

unde

$$N = [(\Sigma n c_n \cos(n-1)\theta - \cos 2\theta)^2 + (\Sigma n c_n \sin(n-1)\theta + \sin 2\theta)^2]^{1/2}, \tag{5}$$

K reprezentînd coeficientul de concentrare a tensiunii. Valoarea sa maximă va fi notată k_m.

a) *Gol eliptic.* Vom utiliza reprezentarea conformă (5) din § 19 a exteriorului golului eliptic de contur $x^2/p^2 + y^2/q^2 = 1$ pe interiorul cercului unitate $\rho = |\zeta| = 1$ din planul ζ. Se deduce

$$N = (m^2 - 2\rho^{-2} m\cos 2\theta + \rho^{-4})^{1/2}, \quad K = 2\sin\theta/N,$$

$$N = [m^2 - 2m\cos 2\theta + 1]^{1/2}, \; K_m = \pm\frac{2}{1+m}, \; \left(\theta = \pm\frac{\pi}{2}\right). \tag{6}$$

Pentru $p/q = 3$ rezultă $m = 1/2$ iar $K_m = 1{,}33$. În figura 47 apare variația lui K.

b) *Gol circular.* Pentru $m = 0$ obținem din formulele precedente

$$N = \rho^{-2}, \; K = 2\sin\theta, \; K_m = 2.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) *Tăietură de-a lungul axei Ox.* Pentru $m = 1$ decurge cazul unei tăieturi de lungime $2p$ pe axa Ox și avem

$$N = (1 - 2\,\rho^{-2}\cos 2\theta + \rho^{-4})^{1/2},\ K = \sin\theta\sqrt{\frac{2}{1-\cos 2\theta}},$$

$$K_m = \pm 1, \left(\theta = \pm\frac{\pi}{2}\right). \tag{7}$$

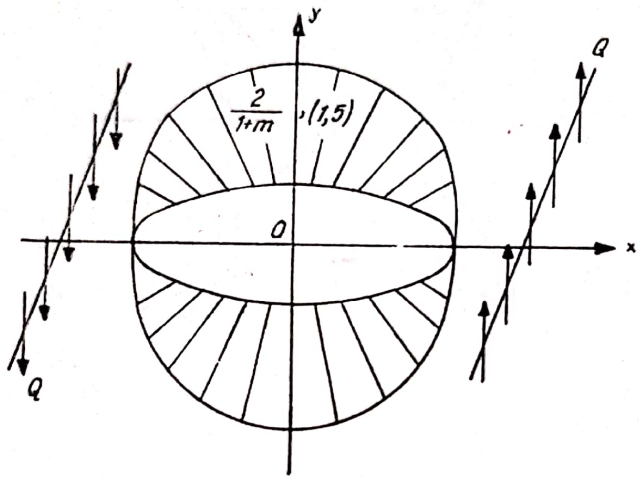


Fig. 47

Prin urmare tăietura nu produce concentrarea de tensiune. Dacă însă ea este așezată în sensul axei Oy, ($m = -1$), tensiunea poate crește indefinit.

d) *Gol în formă de pătrat.* Pentru transformarea conformă (13) din § 19, în care reținem doi termeni ai dezvoltării în serie

$$f(\zeta) = R(1/\zeta - \zeta^3/6) \tag{8}$$

și luăm $R = 3a/5$, a fiind latura pătratului, intervin rotunjiri ale colțurilor $r = R/10 = 0{,}069$. Rezultă coeficienții

$$N = [(\rho^2/2 + \rho^{-2})^2\cos^2 2\theta + (\rho^2/2 - \rho^{-2})^2\sin^2 2\theta]^{1/2}$$

$$K = 4\sin\theta/(1 + 8\cos^2 2\theta)^{1/2},$$

$$K_m = 2\sqrt{2} = \pm 2{,}82,\ (\theta = \pm\pi/4,\ \pm 3\pi/4), \tag{9}$$

$$K = \pm 4/3 = \pm 1{,}33,\ (\theta = \pm\pi/2)$$

a căror variație este reprezentată în figura 48.

Scanned with OKEN Scanner

e) *Gol în formă de pătrat cu diagonalele în sensul axelor de coordonate.* Utilizînd reprezentarea (20) din § 19, în care luăm $r=R$ și reținem doar primii doi termeni

$$f(\zeta) = R(1/\zeta + \zeta^3/6), \tag{10}$$

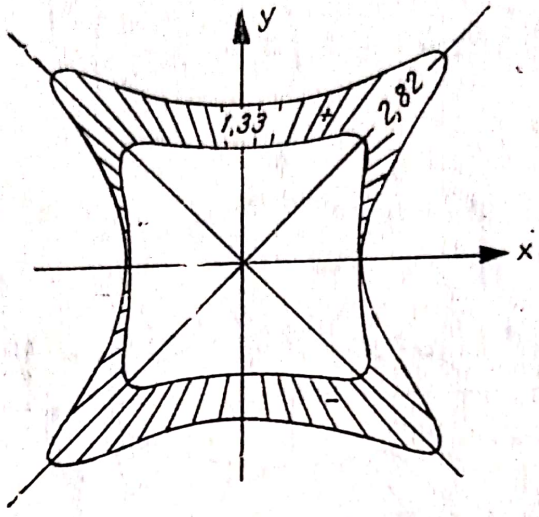


Fig. 48

rezultă

$$N = [(\rho^2/2 - \rho^{-2})^2 \cos^2 2\theta + (\rho^2/2 + \rho^{-2})^2 \sin^2 2\theta]^{1/2},$$

$$K = 4 \sin\theta/(1 + 8 \sin^2 2\theta)^{1/2},\ K_m = \pm 4,\ (\theta = \pm \pi/2), \tag{11}$$

$$K = \pm 2\sqrt{2}/3 = \pm 1{,}884/2\ (\theta = \pm \pi/4).$$

Variația apare în figura 49.

f) *Gol triunghiular.* Pentru reprezentarea (19) din § 19, în care luăm $c = R$, reținem primii doi termeni

$$f(\zeta) = R\,(1/\zeta + \zeta^2/3)^2\,. \tag{12}$$

Rezultă valorile

$$N = |-\zeta^{-2} + 2\zeta/3| = [(2\rho^2/3 - \rho^{-2})^2 \cos^2 2\theta + (2\rho^2/3 + \rho^{-2})^2 \sin^2 2\theta]^{1/2}$$

$$K = 6 \sin\theta/[1 + 24 \sin^2 2\theta]^{1/2},\ K_m = \pm 6. \tag{13}$$

Unghiul $\theta = -\pi/2$ în spațiu ζ corespunde unghiului ϑ din spațiul z, astfel că

$$ire^{i\vartheta} = -R(1/3 - i),\ \mathrm{tg}\vartheta = -3,\ \vartheta = 108^\circ\,30',$$

Scanned with OKEN Scanner

Variația lui K apare în figura 50.

g) *Gol dreptunghiular cu raportul laturilor* $K = a/b = 3{,}2$. Pentru reprezentarea (14) din § 19 în care reținem primii trei termeni

$$f(\zeta) = k(1/\zeta + 0{,}5\zeta - 0{,}125\ \zeta^3 - 0{,}038\ \zeta^5). \qquad (14)$$

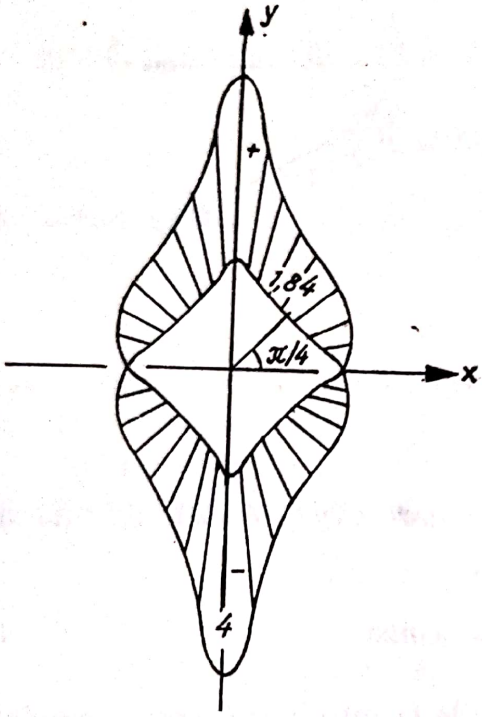


Fig. 49

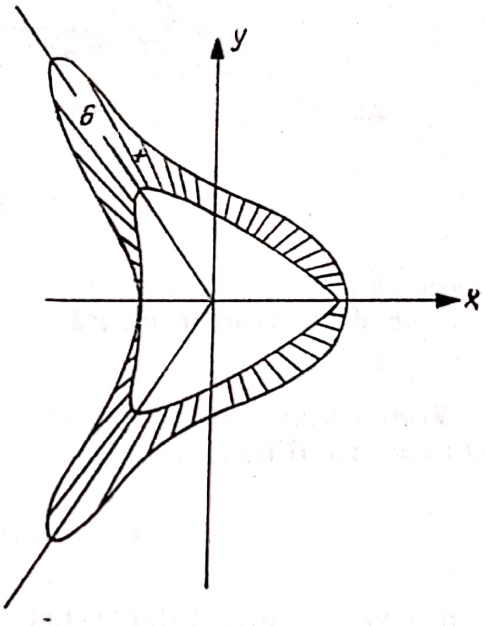


Fig. 50

rezultă

$$N = \{[0{,}5 - (0{,}375\ \rho^2 + \rho^{-2})\cos 2\theta - 0{,}19\ \rho^4 \cos 4\theta]^2 +$$

$$+ [-(0{,}375\ \rho^2 - \rho^{-2})\ \sin 2\theta - 0{,}19\ \rho^4 \sin 4\theta]\}^{1/2},$$

$$K = 2 \sin \theta/\{[0{,}5 - 1{,}375 \cos 2\theta - 0{,}19 \cos 4\theta]^2 + [+ 0{,}625 \sin 2\theta -$$

$$- 0{,}19 \sin 4\theta]^2\}^{1/2}, \qquad (15)$$

$$K = 1{,}89, (\theta = \pm \pi/2); \quad K_m = \pm 11{,}9, \quad (\theta = \pm 32^0).$$

Scanned with OKEN Scanner

Maximul corespunde vîrfului dreptunghiului. Variația lui apare în figura 51.

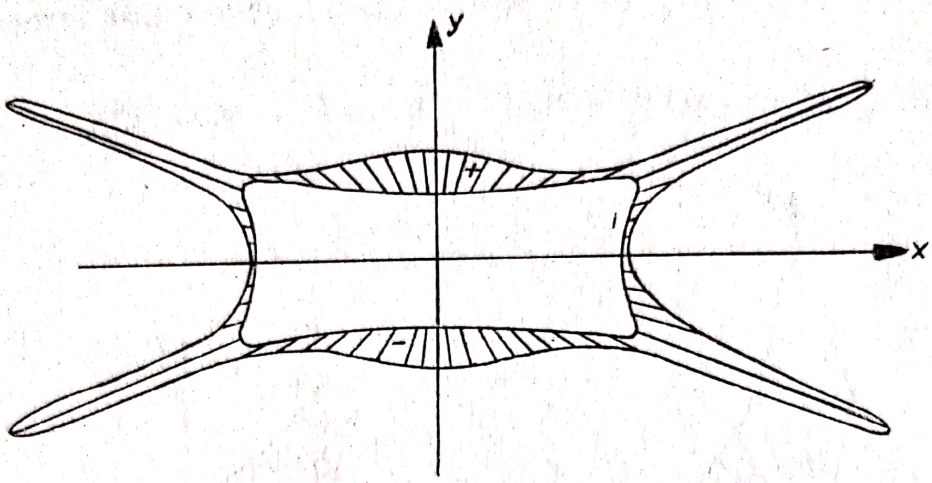


Fig. 51

§ 41. Cîmp de lunecare compusă

Vom presupune că într-un punct oarecare există forțele de lunecare constante, în direcțiile x, y

$$Q_x = \text{const.}, \quad Q_y = \text{const.} \tag{1}$$

pentru care corespund deplasările, tensiunile la infinit și funcția complexă de reprezentare

$$w(x, y) = (x\sigma_x^0 + y\sigma_y^0)/(\mu - \beta), \quad \sigma_x^0 = \sigma_{zx}^0 = Q_x/h, \quad \sigma_y^0 = \sigma_{zy}^0 = Q_y/h,$$
$$\mathfrak{F}_0(\zeta) = (\sigma_x^0 - i\sigma_y^0)\zeta/(\mu - \beta). \tag{2}$$

Procedînd analog ca în cazul lunecării cilindrice, se pot studia diferite cazuri de concentrare a tensiunilor pentru transformările conforme de tipul (2) de la § 40. Se deduce

$$G^0(\sigma, \bar{\sigma}) = -\frac{R}{2(\mu - \beta)i}\{(\sigma_x^0 - i\sigma_y^0)(\sigma^{-1} + \Sigma c_n \sigma^n) - (\sigma_x^0 + i\sigma_y^0)(\sigma + \Sigma c_n \sigma^{-n})\},$$

$$\mathfrak{F}_0^*(\zeta) = \frac{R}{\mu - \beta}\{(\sigma_x^0 + i\sigma_y^0)\zeta - (\sigma_x^0 - i\sigma_y^0)\Sigma c_n \zeta^n\}, \tag{3}$$

$$\mathcal{F}(\zeta) = \frac{R}{\mu - \beta}\left\{(\sigma_x^0 - i\sigma_y^0)\frac{1}{\zeta} + (\sigma_x^0 + i\sigma_y^0)\,\zeta\right\},$$

$$\sigma_z\rho - i\sigma_{z\theta} = [(\sigma_x^0 + i\sigma_y^0)\,\zeta - (\sigma_x^0 - i\sigma_y^0)\,/\,\zeta]/\rho N =$$

$$= [(\sigma_x^0 + i\sigma_y^0 - (\sigma_x^0 - i\sigma_y^0)\,\rho^{-2})\cos\theta + (\sigma_x^0 + i\sigma_y^0 + (\sigma_x^0 - i\sigma_y^0)\rho^{-2})\,i\sin\theta]]/\rho N,$$

N avînd expresia din (4) de la § 40. Pentru $\rho = 1$ avem $\sigma_{z\rho} = 0$ iar

$$\sigma = \sigma_{z\theta} = -(K\sigma_x^0 + L\sigma_y^0), \tag{4}$$

K avînd valoarea dată în (5), § 40, sau

$$L = 2\cos\theta/N. \tag{5}$$

Prin urmare L se poate deduce din rezultatele paragrafului precedent în care N este determinat.

a) *Gol eliptic.* Pe lîngă cele stabilite în cazul lunecării cilindrice se deduc valorile coeficienților:

$$L = 2/(1 - m),\ K = 0,\ (\theta = 0,\ \pi);$$

$$L = 0,\ K = 2/(1 + m),\ (\theta = \pi/2), \tag{6}$$

$$\sigma = 0,\ (\mathrm{tg}\,\theta = -\sigma_y^0/\sigma_x^0).$$

Pentru $m = 1/2$ rezultă respectiv (vezi figura 52).

$$L = \pm 4,\ K = 0,\ (\theta = 0,\ \pi);$$

$$L = 0,\ K = \pm 4/3 = \pm 1{,}33,\ (\theta = \pi/2) \tag{7}$$

Pentru $\sigma_x^0 = 0$ maximul tensiunii este dat de valorile $\theta = 0,\ \pi$; $\sigma = -4\sigma_y^0$.

Pentru cerc ($m = 0$) tensiunile maxime au loc pentru $\mathrm{tg}\,\theta = \sigma_x^0/\sigma_y^0$ și este

$$\sigma = \mp 2\sqrt{\sigma_x^{02} + \sigma_y^{02}}. \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

b) *Gol în formă de pătrat.* Reprezentarea (8) din § 40 și valorile N, K din (9), § 40, se asociază cu următoarele expresii ale coeficientului L:

$$L = 4\cos\theta/(1 + 8\cos^2 2\theta)^{1/2},$$

$$L = \pm 2{,}82, \quad (\theta = \pm \pi/4); \quad L = 0, \quad (\theta = \pi/2); \tag{9}$$

$$L = \pm 4/3 = \pm 1{,}33, \quad (\theta = 0, \pi).$$

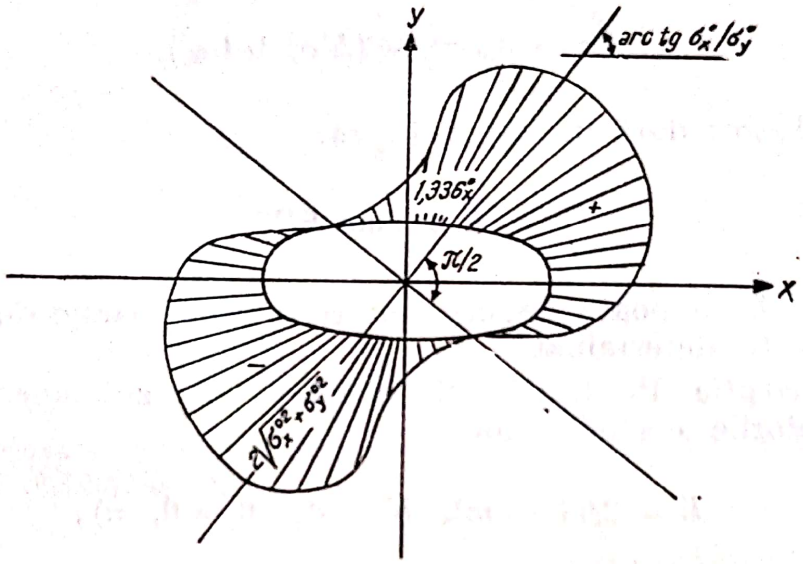


Fig. 52

Tensiunea maximă are loc pentru $\theta = \pi/4$ și deci apare în colțurile pătratului

$$\sigma = \mp\, 2{,}82\,(\sigma_x^0 + \sigma_y^0). \tag{10}$$

În mijlocul laturilor paralele cu axa Ox sau Oy, tensiunea la valorile

$$\sigma = \mp\, 1{,}33 \cdot \sigma_x^0 \text{ sau } \sigma_y^0. \tag{11}$$

Variația tensiunilor este dată în figura 53.

c) *Gol triunghiular.* Conform relației (12) și (13) din § 40 avem

$$L = 6\cos\theta/(1 + 24\sin^2 2\theta)^{1/2}$$

$$L = \pm 6, \quad K = 0, \quad \sigma = -6\,\sigma_y^0, \quad (\theta = 0, \pi); \tag{12}$$

$$L = 0, \quad K = \pm 6, \quad \sigma = -6\ \sigma_x^0. \quad (\theta = \pm \pi/2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = \sigma^0$ maximul are loc pentru $\theta = 0$.
Pentru $\theta = \pm \pi/4$, $\sigma_x^0 = -0{,}85(\sigma_x^0 \pm \sigma_y^0)$.

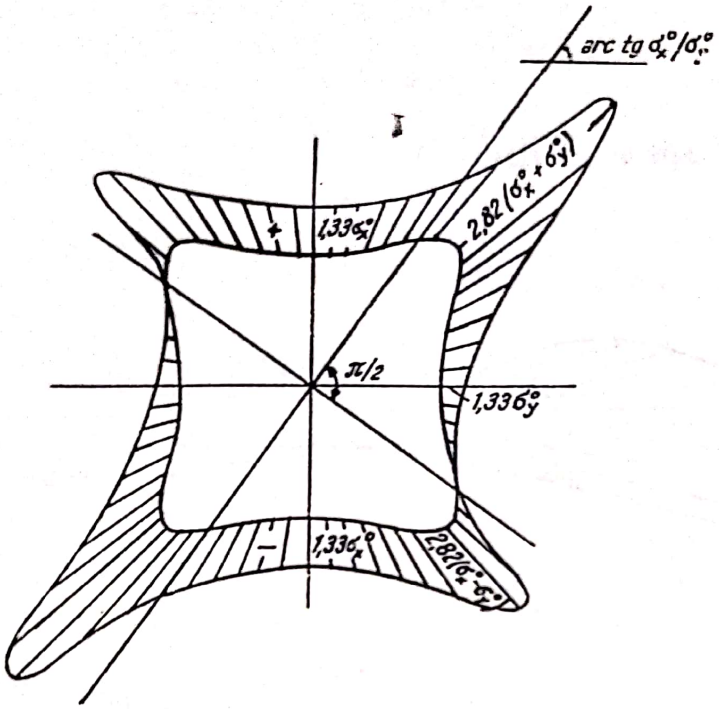


Fig. 53

Variația apare în figura 54.

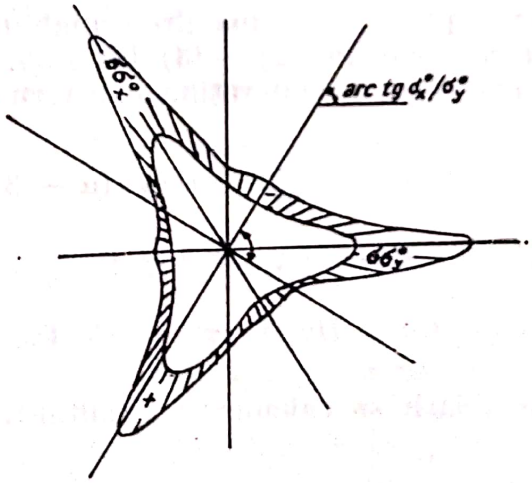


Fig. 54

d) *Gol dreptunghiular cu raportul laturilor* $k = a/b = 3$. Conform relațiilor (14) și (15) din § 40 se calculează valorile

$L = 0$, $(\theta = \pm \pi/2)$; $L = \pm 1{,}89$, $(\theta = 0, \pi)$; $L = 5{,}05$, $(\theta = \pm 32°)$. (13)

Pentru $\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = \sigma^0$ rezultă tensiunile

$$\begin{aligned} \sigma &= -16{,}95\,\sigma^0, \quad (\theta = 32^\circ) \\ &= -6{,}85\,\sigma^0, \quad (\theta = -32^\circ). \end{aligned} \tag{14}$$

Variația apare în figura 55.

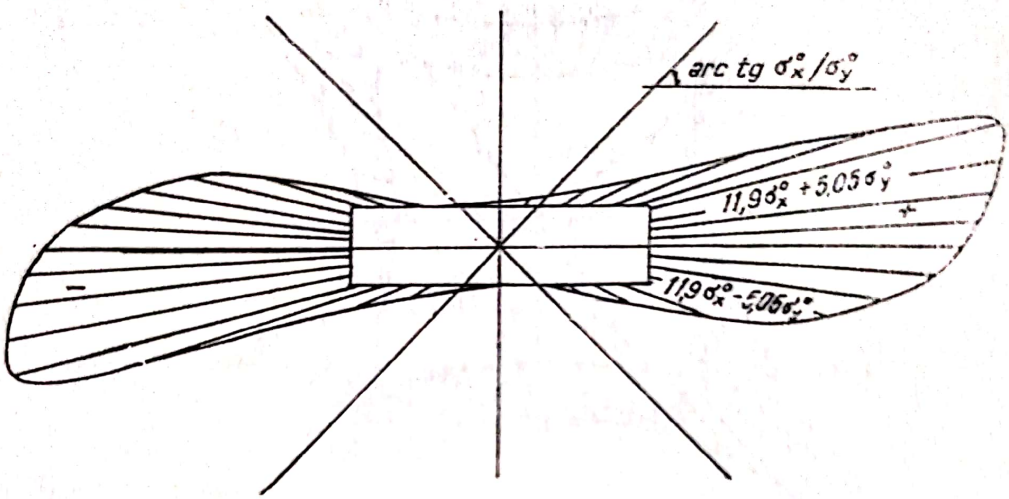


Fig. 55

§ 42. Placă dreptunghiulară avînd un gol

Vom considera o placă de formă dreptunghiulară supusă eforturilor de lunecare conform relațiilor (1) — (3) din § 35. Deoarece cazul unor eforturi constante a fost studiat, vom reține doar termenii avînd coeficienții C și D

$$\begin{aligned} w &= [C(x^2 - x^2)/2 + Dxy]/(\mu - \beta)\,h, \\ Q(\pm a, y) &= \pm Ca + Dy, \quad Q(x, \pm b) = \mp Cb + Dx, \\ \sigma_x^{0\pm} &= (\pm Ca + Dy)/h, \quad \sigma_y^{0\pm} = (\mp Cb + Dx)/h. \end{aligned} \tag{1}$$

Cu ajutorul acestor relații se calculează rezultantele pe contur

$$T = T_x = \int_{-b}^{b} Q(\pm a, y)\,dy = 2Cab = -T_y = -\int_{-a}^{a} Q(x, \pm b)\,dx, \tag{2}$$

$$M = M_x = \int_{-b}^{b} Q(\pm a, y)\,y\,dy = 2Db^3/3, \quad M_y = \int_{-a}^{a} Q(x, \pm b)\,x\,dx = 2Da^3/3.$$

Conform acestor relații, decurg expresiile constantelor și funcțiilor de reprezentare

$$C = T/2ab, \quad D = 3M/2b^3,$$

$$\sigma_x^{0\pm} = \pm\frac{T}{2bh} + \frac{3My}{2b^3h} = \frac{l}{b}\left(\pm\,\sigma^0 + \frac{y}{a}\,\sigma^1\right), \tag{3}$$

$$\sigma_y^{0\pm} = \frac{l}{a}\left(\mp\,\sigma^0 + \frac{y}{b}\,\sigma^1\right), \quad \mathfrak{F}_0(\zeta) = 2(\sigma^0 - i\sigma^1)\zeta^2/(\mu - \beta)$$

în care

$$\sigma^0 = T/A, \quad \sigma^1 = 3aM/b^2A, \quad A = 2Ch, \quad l = \sqrt{ab}. \tag{4}$$

Rezultă, aplicînd transformările (2) din § 40 și eliminînd constantele de integrare,

$$G^0(\sigma, \bar{\sigma}) = \frac{iR^2}{(\mu - \beta)\,l}\{(\sigma^0 - i\sigma^1)(\sigma^{-1} + \Sigma c_n\sigma^n)^2 - (\sigma^0 + i\sigma^1)(\sigma + \Sigma c_n\sigma^{-n})^2\},$$

$$\mathfrak{F}^*(\zeta) = \frac{2R^2}{(\mu - \beta)\,l}\{(\sigma^0 + i\sigma^1)\zeta^2 - (\sigma^0 - i\sigma^1)(\Sigma c_m c_n\zeta^{m+n} + 2\sum_2 c_n\sigma^{n-1})\}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{F}(\zeta) = \frac{2R^2}{(\mu - \beta)\,l}[(\sigma^0 - i\sigma^1)\zeta^2 + (\sigma^0 + i\sigma^1)/\zeta^2], \sigma_{z\rho} - i\sigma_{z\theta} = \frac{4R}{Nl}\{[(\sigma^0 + i\sigma^1)\rho -$$

$$- (\sigma^0 - i\sigma^1)/\rho]\cos 2\theta + i[(\sigma^0 + i\sigma^1)\rho + (\sigma^0 - i\sigma^1)/\rho]\sin 2\theta\}.$$

N are expresia (4) din § 40. Pentru $\rho = 1$ avem $\sigma_{z\rho} = 0$ iar

$$\sigma_{z\theta} = -(K\sigma^0 + L\sigma^1), \tag{6}$$

$$K = \frac{8R}{Nl}[\sigma^0 \sin 2\theta + \sigma^1 \cos 2\theta].$$

Notăm că golul este presupus a fi situat în centrul plăcii unde acțiunea lunecărilor este minimă.

a) *Gol eliptic.* Pentru o elipsă de semiaxe p și q avem $R = (p + q)/2$ iar

$$\begin{aligned} K &= 8R(\sigma^0 \sin 2\theta + \sigma^1 \cos 2\theta)/l(m^2 - 2n \cos 2\theta + 1)^{1/2}, \\ &= 8R\sigma^1/l(m - 1) = 2{,}128\ \sigma^1, \quad (\theta = 0, \pi), \\ &= -8R\sigma^1/l(m + 1) = -0{,}708\ \sigma^1, \quad (\theta = \pm \pi/2), \\ &= \pm 1{,}65\sigma^0 + 0{,}95\sigma^1, \quad (\theta = \pm \pi/3), \\ &= \pm 1{,}92\sigma^0, \quad (\theta = \pm \pi/4). \end{aligned} \tag{7}$$

În paranteze apar valorile pentru $p/q = 3$, $m = 1/2$, $p/l = 1/5$, $R/l = 0{,}133$. Variația este reprezentată în figurile 56.

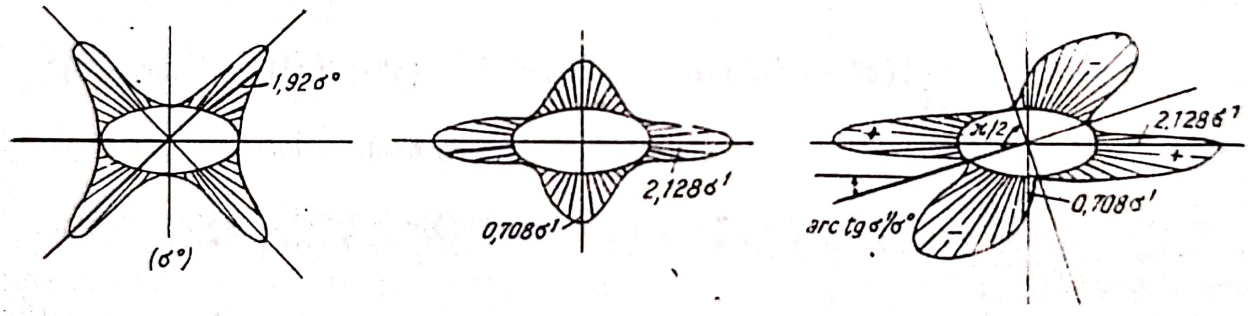


Fig. 56

b) *Gol circular.* Pentru $m = 0$ avem, în cazul concret considerat,

$$\begin{aligned} K &= 1{,}06\sigma^1, \quad (\theta = 0, \pi), \\ &= -1{,}06\sigma^1, \quad (\theta = \pm \pi/2), \\ &= \pm 0{,}92\sigma^0 + 0{,}53\sigma^1, \quad (\theta = \pm \pi/3), \\ &= \pm 1{,}06\sigma^\circ, \quad (\theta = \pm \pi/4). \end{aligned} \tag{8}$$

 Variația apare în figura 57.

c) *Gol în formă de pătrat.* a fiind latura pătratului, vor rezulta următoarele expresii ale coeficientului K:

$$K = \frac{16 \cdot 3a}{5l} \frac{\sigma^0 \sin 2\theta + \sigma^1 \cos 2\theta}{(1 + 8\cos^2 2\theta)^{1/2}}$$

$$= 3{,}2 \frac{a}{l} \sigma^1, \quad (\theta = 0, \pi),$$

$$= -3{,}2 \frac{a}{l} \sigma^1, \quad (\theta = \pm \pi/2), \tag{9}$$

$$= \pm 9{,}6 \frac{a}{l} \sigma^0, \quad (\theta = \pm \pi/4).$$

Variația este dată în figura 58.

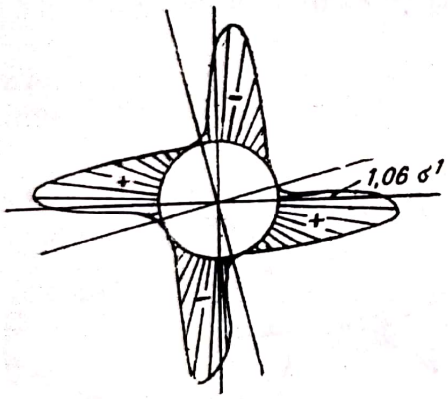


Fig. 57

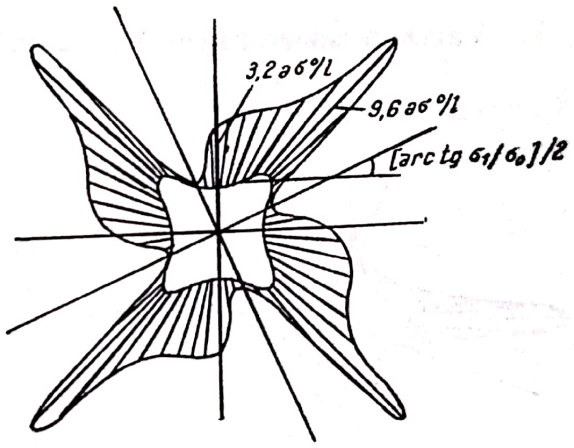


Fig. 58

d) *Gol pătratic cu diagonalele paralele cu axele coordonate.* Conform relațiilor (10) și (11) din § 40, avem valorile date mai jos și reprezentate în figura 59;

$$K = \frac{16 \cdot 3a}{5l} \frac{\sigma^0 \sin 2\theta + \sigma^1 \cos 2\theta}{(1 + 8\sin^2 2\theta)^{1/2}}$$

$$= 9{,}6 \frac{a}{l} \sigma^1, \quad (\theta = 0, \pi),$$

$$= -9{,}6 \frac{a}{l} \sigma^1, \quad (\theta = \pm \pi/2), \tag{10}$$

$$= \pm 3{,}2 \frac{a}{l} \sigma^0, \quad (\theta = \pm \pi/4).$$

e) *Gol triunghiular.* Din relațiile (12) și (13) de la § 40 deducem

$$K = \frac{8 \cdot 3c}{2l} 3 \frac{\sigma^0 \sin 2\theta + \sigma^1 \cos 2\theta}{(1 + 24 \sin^2 2\theta)^{1/2}} \tag{11}$$

deoarece $R = 3c/2 \cdot c$ este înălțimea triunghiului. Rezultă valorile

$$K = 36 \frac{c}{l} \sigma^1, \quad (\theta = 0, \pi),$$

$$= -36 \frac{c}{l} \sigma^1, \quad (\theta = \pm \pi/2), \tag{12}$$

$$= 5{,}1 \sigma^0, \quad (\theta = \pm \pi/4).$$

Variația apare în mod separat pentru σ_0 și σ_1 în figurile 60.

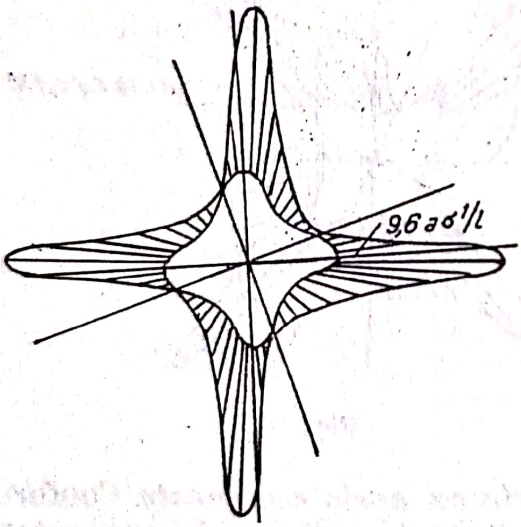


Fig. 59

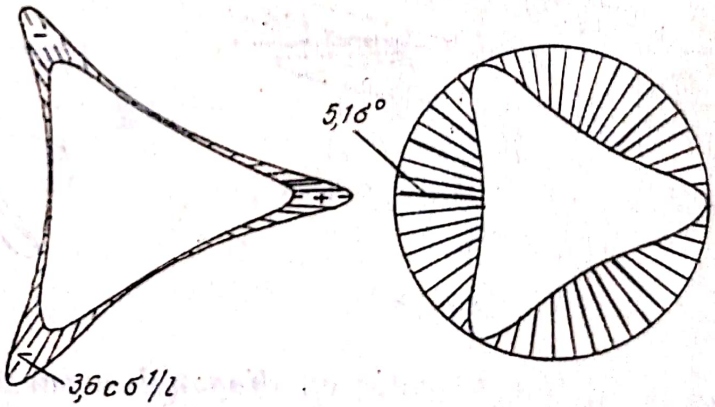


Fig. 60

§ 43. Placă triunghiulară cu gol interior

Conform rezultatelor din § 34, pentru o placă cu contur în formă de triunghi echilateral, fără gol interior, supusă la forțe de lunecare Q constante, egale dar se semn contrar pe două laturi, apar deplasările

$$w_0 = A[-x^3 + 3x(y + c/3)^2 + c^2 x - 3cx(y + c/3)] =$$

$$= A[-x^3 + 3xy^2 - cxy + c^2 x/3] \tag{1}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care

$$A = 2Q/(\mu - \beta)\, h\sqrt{3}\, c^2. \tag{2}$$

Origina coordonatelor o presupunem în centrul de greutate al plăcii, axa de coordonate x fiind paralelă cu o latură iar axa Oy trecînd printr-un vîrf al triunghiului. Tensiunile respective sînt

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= (\mu - \beta)\, A[-3(x^2 - (y + c/3)^2) + c^2 - 3c(y + c/3)], \\ \sigma_{zy} &= (\mu - \beta)\, A[6x(y + c/3) - 3cx]. \end{aligned} \tag{3}$$

Datorită prezenței unui gol în centrul geometric (originea axelor de coordonate) avînd dimensiuni mult mai mici decît ale plăcii se poate de asemenea stabili soluția respectivă. Se corectează soluția pentru placa plină

$$\mathfrak{F}_0(z) = A[-\zeta^3 + ic\zeta^2/2 + c^2\zeta/3] \tag{4}$$

prin considerarea transformărilor (2) din § 40. Rezultă, conform relațiilor (12)—(14) din § 39, funcțiile

$$\begin{aligned} G^0(\sigma, \overline{\sigma}) &= i\frac{A}{2}\Big\{-R^3[(\sigma^{-1} + \Sigma c_n \sigma^n)^3 - (\sigma + \Sigma c_n \sigma^{-n})^3] + \\ &+ ic\frac{R^2}{2}[(\sigma^{-1} + \Sigma c_n \sigma^n)^2 - (\sigma + \Sigma c_n \sigma^{-n})^2] + \\ &+ \frac{4}{3} c^2 R[\sigma^{-1} + \Sigma c_n \sigma^n - \sigma - \Sigma \overline{c}_n \sigma^{-n}]\Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^*(\zeta) &= A\Big\{-R^3[\zeta^3 + 3c_1\zeta - (\Sigma c_n \zeta^n)^3 - 3\zeta^{-1}(\Sigma c_n \zeta^n)^2 - 3\sum_3 c_n \zeta^{n-2}] + \\ &+ ic\frac{R^2}{2}[\zeta^2 - (\Sigma c_n \zeta^n)^2 - 2\sum_2 c_n \zeta^{n-1}] + c^2\frac{R}{3}[\zeta - \Sigma c_n \zeta^n]\Big\}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\zeta) &= A\Big\{-R^3\Big[\zeta^3 + 3c_1\Big(\zeta + \frac{1}{\zeta}\Big) + \frac{1}{\zeta^3}\Big] + \\ &+ ic\frac{R^2}{2}\Big(\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2}\Big) + \frac{c^2 R}{3}\Big(\zeta + \frac{1}{\zeta}\Big)\Big\}, \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\sigma_{z\rho} - i\sigma_{z\theta} = (\mu - \beta)\, A\{-3R^2(\zeta^3 + c_1(\zeta - 1/\zeta) - 1/\zeta^3) +$$
$$+ iR(\zeta^2 - 1/\zeta^2) + c^2(\zeta - 1/\zeta)/3\}/\rho N =$$
$$= \frac{2\sigma^0}{\sqrt{3}\, c^2 \rho N}\{-3R^2[(\rho^3 - 1/\rho^3)\cos 3\theta + c_1(\rho - 1/\rho)\cos\theta] -$$
$$- cR(\rho^2 - 1/\rho^2)\sin 2\theta + c^2(\rho - 1/\rho)\cos\theta/3 +$$
$$+ i[-3R^2((\rho^3 + 1/\rho^3)\sin 3\theta + c_1(\rho + 1/\rho)\sin\theta) +$$
$$+ cR(\rho^2 + 1/\rho^2)\cos 2\theta + c^2(\rho + 1/\rho)\sin\theta/3]\}.$$

N are expresia (4) din § 40 iar $\sigma^\circ = Q/h$. Pentru $\rho = 1$ avem

$$\sigma_{z\rho} = 0\ ,\quad \sigma_{z\theta} = -K\sigma^0, \tag{6}$$

Se notează

$$K = 2\ [-6k^2\ (\sin 3\theta + c_1 \sin\theta) + 2\ k\cos 2\theta + 2\sin\theta/3]/\sqrt{3}\ N,\ k = R/c. \tag{7}$$

a) *Gol eliptic* ($c_1 = m$). În cazul din figura 61 avem

$$K = \frac{2[-6\,k^2(\sin 3\theta + m\sin\theta) + 2k\cos 2\theta + 2\sin\theta/3]}{\sqrt{3}\ (m^2 - 2\ m\cos 2\theta + 1)^{1/2}} = 4k/\sqrt{3}(1-m),$$
$$(\theta = 0,\pi) \tag{8}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\pm(2/3 + 6\,k^2(1-m)) + k}{(m^2 - m + 1)^{1/2}},\quad (\theta = \pm\pi/3).$$

Pentru $p/c = 5$ rezultă $k = 0{,}133$ şi valorile K din tabel pentru elipsă ($m = 1/2$), tăietură ($m = 1$) şi cerc ($m = 0$).

Tablou

Valorile K

θ \ m	1/2	1	0	− 1/2
0,π	0,616	∞	0,308	0,103
±π/2	0,35 / −0,84	0,24 / −0,71	0,58 / −1,20	1,29 / −2,54
±π/3	0,45 / −0,10	0,36 / −0,05	0,41 / −0,11	0,48 / −0,13

Scanned with OKEN Scanner

În figura 62 apare variația lui K pentru $m = -1/2$. Valorile reduse se datoresc tensiunilor scăzute din zona centrală a triunghiului. Într-adevăr, pentru placa plină avem în origină

$$\sigma_{zz} = 0{,}386\ \sigma_0\ ,\quad \sigma_{xy} = 2{,}31\ \sigma_0. \tag{9}$$

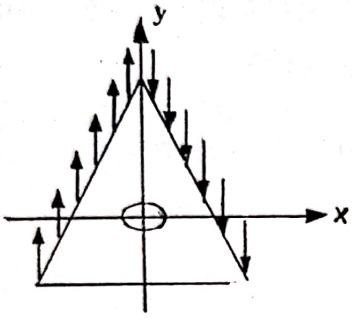


Fig. 61

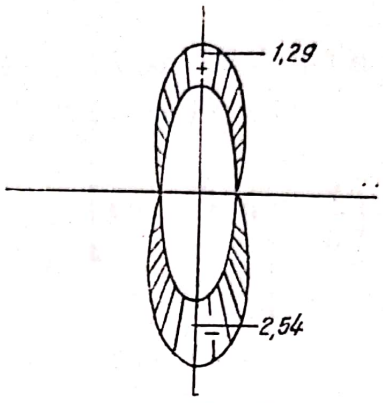


Fig. 62

b) *Gol în formă de pătrat* ($c_1 = 0$, $R = 3a/5$, $k = 3a/5c$). Avem

$$K = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{2}{3}\sin\theta + 2\ k\cos 2\theta - 6\ k^2 \sin 3\theta}{(1 + 8\ \cos^2 2\theta)^{1/2}} = 4k/\sqrt{3} = 0{,}28,\ (\theta = 0,\ \pi),$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pm (2/3 + 6k^2) - 2k}{3} = \begin{matrix} 0{,}20 \\ -\ 0{,}38 \end{matrix},\ (\theta = \pm \pi/2), \tag{10}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} [\pm (2/3 - 6\ k^2) + 2k] = \begin{matrix} 0{,}935, \\ -\ 0{,}400, \end{matrix},\ (\theta = \pm \pi/4).$$

Pentru $a/c = 1/5$ rezultă $k = 3/25 = 0{,}12$ și valorile K din paranteze.

Variația apare în figura 63.

c) *Gol în formă de pătrat cu diagonalele paralele cu axele coordonate* ($k = 3a/5c$)

$$K = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)\sin\theta + 2k\ \cos 2\theta - 6k^2\ \sin 3\theta}{(1 + 8\ \sin^2 2\theta)^{1/2}} = 4k/\sqrt{3} = 0{,}28,\ (\theta = 0,\ \pi),$$

$$= 2[\pm (2/3 + 6\ k^2) - 2k]/\sqrt{3} = \begin{matrix} 0{,}6 \\ -\ 0{,}14 \end{matrix},\ (\theta = \pm \pi/2), \tag{11}$$

$$= 2[\pm (2/3 - 6\,k^2) + 2k]/3\sqrt{3} = \begin{matrix} 0{,}31 \\ -\ 0{,}133 \end{matrix},\ (\theta = \pm \pi/4).$$

Scanned with OKEN Scanner

Valorile din paranteze corespund numărului $k = 0{,}12$.

Variația apare în figura 64.

d) *Gol triunghiular.* ($R = 3\gamma/2$, $c_1 = 0$, $k = 3\gamma/c$, γ = înălțimea golului). Intervine coeficientul

$$K = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2 \sin \theta/3 + 2k \cos 2\theta - 6k^2 \sin 3\theta}{(1 + 24 \sin^2 2\theta)^{1/2}} = 4k/\sqrt{3} = 0{,}28\,, \ (\theta = 0, \pi),$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\pm\left(\frac{2}{3} + 6k^2\right) - 2k\right] = \begin{matrix} -0{,}6 \\ -1{,}14 \end{matrix}\,, \ (\theta = \pm \pi/2). \tag{12}$$

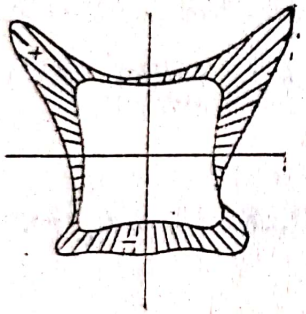


Fig. 63

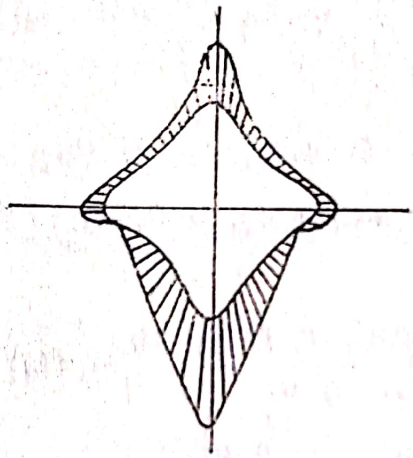


Fig. 64

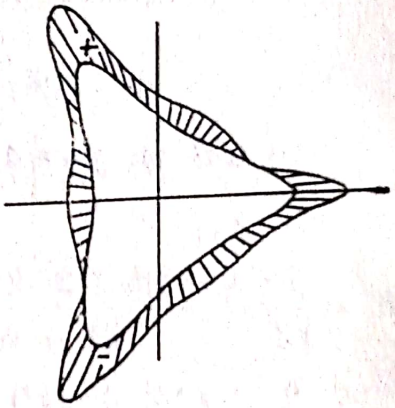


Fig. 65

Valorile din paranteze corespund raportului $k = 0{,}12$. În figura 65 se poate urmări variația lui k.

§ 44. Plăci cu gol circular consolidat de o nervură

Se consideră cazul unei plăci cu gol circular de rază R_s al cărui contur este consolidat de o nervură de asemenea circulară de rază interioară $r = R_0 = R$. Eventual nervura este compusă din s inele concentrice din materiale diferite $k_1, \cdots, k_s$. Vom alege origina coordonatelor în centrul golului ca în figura 66. Vom nota prin R_{j-1}, R_j razele interioară și exterioară a inelului k_j.

Vom presupune că diametrul $2k$ al golului este foarte mic față de dimensiunile în plan ale plăcii și că golul este situat la o distanță suficient de mare de marginea exterioară a plăcii. În această situație vom putea considera placa practic nelimitată atunci cînd studiem perturbările locale datorită golului, astfel cum se va arăta în cele ce urmează.

Scanned with OKEN Scanner

Utilizînd coordonatele polare, ecuația (9) din § 28 se va scrie astfel

$$(\mu - \beta)h \ \mathrm{Re} \frac{\zeta}{R} \mathfrak{F}'(\zeta) = Q \tag{1}$$

în care, conform relației (12) din § 39,

$$\mathfrak{F}(\zeta) = \mathfrak{F}_0(\zeta) + \mathfrak{F}_0^*(\zeta). \tag{2}$$

$\mathfrak{F}_0(\zeta)$ reprezintă soluția pentru placa plină, exprimată cu ajutorul unui polinom de grad $m+1$:

$$\mathfrak{F}_0(\zeta) = C \sum_{k=1}^{m+1} A_k \zeta^k / R^k \tag{3}$$

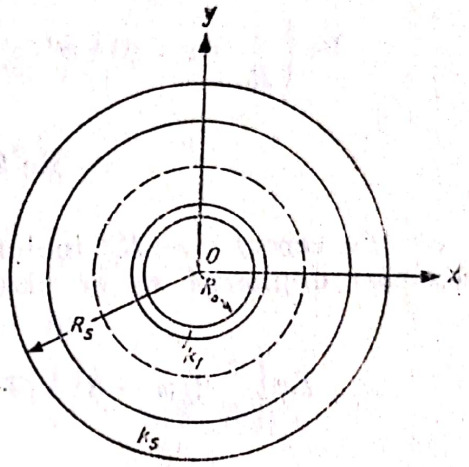


Fig. 66

în care în general A_k sînt constante complexe cunoscute prin rezolvarea problemei la limită pentru placa plină încărcată pe conturul exterior. De la o anumită distanță de la marginea golului, presupus suficient de mic, cîmpul de tensiune descris de (3), corespunzător plăcii pline, coincide aproape exact cu cel real.

Presupunînd conturul golului încărcat cu forțe tăietoare de rezultante nule, funcția $\mathfrak{F}^*(\zeta)$ care descrie perturbarea datorită prezenței golului va trebui să aibe forma

$$\mathfrak{F}^*(\zeta) = C \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k R^k / \zeta^k + C\alpha \log \zeta \tag{4}$$

astfel că pentru distanțe radiale $r = |\zeta|$ suficient de mari, efectul acestor perturbări descrește foarte mult. În cazul mai multor inele vom înlocui funcția (4) prin

$$\mathfrak{F}_j^*(\zeta) = C \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k^{(j)} R^k / \zeta^k + C\alpha_j \log \zeta. \tag{5}$$

Coeficienții sînt în general complecși, exceptînd α și $\alpha^{(j)}$ care se presupun reali.

Determinarea soluțiilor se va face pentru următoarele condiții la limită:

Pe conturul golului $r = R$ acţionat de forţele $Q = Q_0$ care intervin în (1) are loc condiţia

$$\operatorname{Re}\left\{(\mu - \beta)\, h \frac{\delta}{R} \mathfrak{F}'(\delta)\right\}_1 = Q_1. \tag{6}$$

Pe cercurile $r = R_j$ care mărginesc inelele, forţele şi deplasările $w = w_j = \operatorname{Re} \mathfrak{F}_j(\delta)$ trebuie să fie egale

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\delta}{R}[(\mu - \beta)\, h\, \mathfrak{F}'(\delta)]_j\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{\delta}{R}[(\mu - \beta)\, h\, \mathfrak{F}'(\delta)]_{j+1}\right\},$$

$$\operatorname{Re} \mathfrak{F}_j(\delta) = \operatorname{Re} \mathfrak{F}_{j+1}(\delta). \tag{7}$$

Pe cercul $r = R_0$, inelul transmite forţele transversale plăcii şi are aceleaşi deplasări ca şi placa pe acest contur

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\delta}{R}[(\mu - \beta)\, h\, \mathcal{F}'(\delta)]\right\}_s = \operatorname{Re}\left\{\frac{\delta}{R}[(\mu - \beta) h\, \mathfrak{F}'(\delta)]\right\},$$

$$\operatorname{Re} \mathfrak{F}_s(\delta) = \operatorname{Re} \mathfrak{F}(\delta). \tag{8}$$

Avem deci $1 + 2s$ condiţii pentru determinarea coeficienţilor deplasărilor.

În cazul în care conturul golului $r = R$ este liber, rezultă sistemul algebric

$$\operatorname{Re}\,[k(A_k n^k - \alpha_k n^{-k}) + \delta_{k0}\alpha]_1 = 0,$$

$$\operatorname{Re}\, ik\,(A_k n^k + \alpha_k n^{-k}) = 0,$$

$$\operatorname{Re}\,\{(\mu - \beta)h\,[k(A_k n^k - \alpha_k n^{-k}) + \delta_{k0}\alpha]\}_j =$$

$$= \operatorname{Re}\,\{(\mu - \beta)h\,[k(A_k n^k - \alpha_k n^{-k}) + \delta_{k0}\alpha]\}_{j+1},$$

$$\operatorname{Re}\,\{(\mu - \beta)\, i\, h\, k(A_k n^k + \alpha_k n^{-k})\}_j =$$

$$= \operatorname{Re}\,\{(\mu - \beta)\, i\, h\, k(A_k n^k + \alpha_k n^{-k})\}_{j+1},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\{A_k n^k + \alpha_k n^{-k} + \delta_{k0}\,\alpha \log R\}_j = \\
&= \operatorname{Re}\{A_k n^k + \alpha_k n^{-k} + \delta_{k0}\,\alpha \log R\}_{j+1}, \qquad (9)\\
&\operatorname{Re} i\{A_k n^k - \alpha_k n^{-k}\}_j = \operatorname{Re} i\{A_k n^{k+1} - \alpha_k n^{-k}\}_{j+1},\\
&\operatorname{Re}\{(\mu-\beta)\,h\,[k(A_k n_s^k - \alpha_k n^{-k}) + \delta_{k0}\,\alpha]\}_s = \\
&= \operatorname{Re}\{(\mu-\beta)\,h\,[kA_k(n^k - \alpha_k n^{-k}) + \delta_{k0}\,\alpha]\}_{s+1},\\
&\operatorname{Re}\{(\mu-\beta)\,h\,k(A_k n^k + \alpha_k n^{-k})\}_s\, i = \\
&= \operatorname{Re}\{(\mu-\beta)\,k\,h(A_k n^k + \alpha_k n^{-k})\}_{s+1}\, i,\\
&\operatorname{Re}\{A_k n^k + \alpha_k n^{-k} + \delta_{k0}\,\alpha \log R\}_s = \\
&= \operatorname{Re}\{A_k n^k + \alpha_k n^{-k} + \delta_{k0}\,\alpha \log R\}_{s+1},\\
&\operatorname{Re} i\{A_k n_s^k - \alpha_k n_s^{-k}\} = \operatorname{Re} i\{A_k n^k - \alpha_k n^{-k}\}_{s+1},
\end{aligned}$$

în care

$$n_j = R_j/R,\ (R_1 = R). \qquad (10)$$

Pentru determinarea tensiunilor utilizăm reprezentarea complexă (9) din § 28

$$\sigma_{sr} - i\sigma_{s\theta} = \left\{\frac{\mu-\beta}{r}\sum k\left(A_k\frac{\delta^k}{r^k} - \alpha_{-k}\frac{r^k}{\delta^k}\right) + \alpha\right\}_j \text{ (pentru } R_j \leqslant r \leqslant R_{j+1}). \qquad (11)$$

a) *Cîmp cilindric de lunecare.* Vom considera o placă dreptunghiulară cu un gol circular consolidat cu un inel dintr-un material diferit acționată de forțe de lunecare constante $Q = \sigma_0 h$ aplicate pe marginile $x = 0, l$ și încastrată pe marginea $x = l$. Soluția stabilită mai jos este exactă pentru o placă avînd dimensiuni foarte mari în raport cu raza R. Conform relației (2) din § 31 avem deplasarea pentru placa plină

$$w = \frac{\sigma_0}{\mu-\beta}(x - l) \qquad (12)$$

Scanned with OKEN Scanner

iar

$$\mathfrak{F}_0(\zeta) = \frac{\sigma_0}{\mu - \beta}(\zeta - l). \tag{13}$$

Din (6)—(9) rezultă în cazul plăcii cu o nervură simplă: pentru nervură

$$\mathfrak{F}_1(\zeta) = K\frac{\sigma_0}{\mu - \beta}\left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta} - \frac{l}{R}\right), \quad (R_1 = R \leqslant r < R_2) \tag{14}$$

pentru placă

$$\mathfrak{F}(\zeta) = \frac{\sigma_0}{\mu - \beta}\left(\zeta - \frac{\alpha}{\zeta} - l\right), \quad (R_2 \leqslant R), \tag{15}$$

în care

$$K = 2/L^+, \ \alpha = KR_2^2\, L^-/2, \ L^{\pm} = \pm(1 + R^2/R_2^2) + (1 - R^2/R_2^2)\, mn,$$

$$m = (\mu - \beta)_1/(\mu - \beta), \ n = h_1/h. \tag{16}$$

Într-adevăr, (6) se verifică identic. Condițiile (8) devin

$$[(\mu - \beta)h]_1\, K(R_2 - R^2/R_2) = (\mu - \beta)h\,(R_2 + \alpha/R_2),$$

$$K(R_2 + R^2/R_2) = R_2 - \alpha/R_2. \tag{17}$$

Rezultă tensiunile:
în nervură

$$\sigma_{z\theta} = m\frac{K\sigma_0}{r}(\zeta - R^2/\zeta), \qquad (R \leqslant r \leqslant R_2); \tag{18}$$

în placă

$$= \frac{\sigma_0}{r}\left(\zeta + \frac{\alpha}{\zeta^2}\right), \quad (R_2 \leqslant R). \tag{19}$$

Descompunînd partea reală și imaginară rezultă:

Scanned with OKEN Scanner

în nervură

$$\sigma_{zr} = mK(1 - R^2/r^2)\cos\theta \cdot \sigma_0, \qquad \sigma_{z\theta} = -mK(1 + R^2/r^2)\sin\theta \cdot \sigma_0; \tag{20}$$

în placă

$$\sigma_{zr} = (1 + \alpha/r^2)\cos\theta \cdot \sigma_0, \qquad \sigma_{z\theta} = -(1 - \alpha/r^2)\sin\theta \cdot \sigma_0. \tag{21}$$

Valorile maxime care apar în nervură și placă sînt

$$\sigma_{z\theta} = -2m\,K\sigma_0, \quad (r = R, \quad \theta = \pm\pi/2)$$

$$= \pm(1 + \alpha/R_2^2)\,\sigma_0, \quad (r = R_2, \quad \theta = \pm\pi/2). \tag{22}$$

În figurile 67 apare variația tensiunilor.

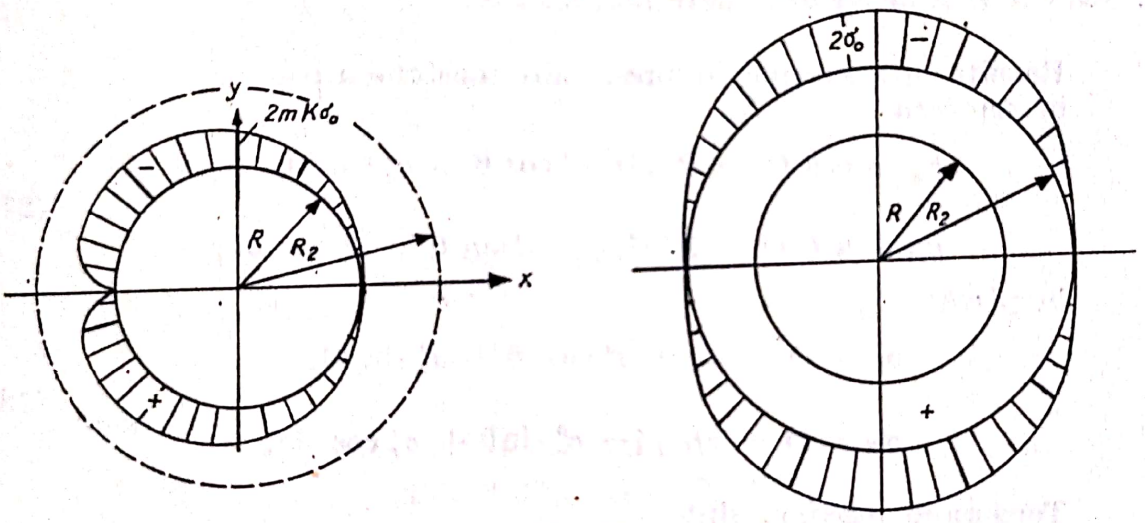


Fig. 67

Impunînd condiția ca valorile maxime din nervură și placă să fie egale, va trebui ca $\alpha = 0$ sau $L^- = 0$. Rezultă valoarea optimală a rigidității

$$mn = \frac{1 + R^2/R_2^2}{1 - R^2/R_2^2}. \tag{23}$$

Pentru ca tensiunea maximă în nervură să fie egală cu tensiunea maximă din placă (pentru $\alpha = 0$), va trebui ca

$$m = 1/2K = L^+/4 = (1 + R^2/R_2^2)/2. \tag{24}$$

În general însă m este impus de cerințele practice și nu putem uzual folosi și ultima condiție.

Se constată că, datorită nervurii, tensiunile radiale cresc, în timp ce tensiunile radiale scad.

b) *Cîmp de lunecare compus în placa avînd un gol consolidat de o nervură.* Corespunzător relațiilor (2) din § 41 intervin funcțiile de reprezentare:

în nervură

$$\mathcal{F}(\zeta) = \frac{K}{\mu - \beta}\left\{\sigma_x^0\left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta}\right) - i\,\sigma_y^0\left(\zeta - \frac{R^2}{\zeta}\right)\right\} \tag{25}$$

în placă

$$\mathcal{F}(\zeta) = \frac{1}{\mu - \beta}\left\{\sigma_x^0\left(\zeta - \frac{\alpha}{\zeta}\right) - i\,\sigma_y^0\left(\zeta + \frac{\alpha}{\zeta}\right)\right\} \tag{26}$$

în care K și α au valorile date mai înainte.

Rezultă următoarele expresii ale tensiunilor:

în nervură

$$\begin{aligned}\sigma_{zr} &= mK\,(1 - R^2/r^2)\,(\sigma_x^0 \cos\theta + \sigma_y^0 \sin\theta),\\ \sigma_{z\theta} &= mK\,(1 + R^2/r^2)\,(-\sigma_x^0 \sin\theta + \sigma_y^0 \cos\theta);\end{aligned} \tag{27}$$

în placă

$$\begin{aligned}\sigma_{zr} &= (1 + \alpha/r^2)\,(\sigma_x^0 \cos\theta + \sigma_y^0 \sin\theta),\\ \sigma_{z\theta} &= (1 - \alpha/r^2)\,(-\sigma_x^0 \sin\theta + \sigma_y^0 \cos\theta).\end{aligned} \tag{28}$$

Tensiunile maxime sînt

$$\begin{aligned}\sigma_{z\theta} &= -2mK\sqrt{\sigma_x^{02} + \sigma_y^{02}},\ (\operatorname{tg}\theta = \sigma_x^0/\sigma_y^0,\ r = R),\\ &= (1 - \alpha/R_2^2)\sqrt{\sigma_x^{02} + \sigma_y^{02}},\ (\operatorname{tg}\theta = (\sigma_x^0/\sigma_y^0)^{\pm 1},\ r = R_2).\end{aligned} \tag{29}$$

Variația apare în figura 68.

Valorile optimale se stabilesc ca mai înainte.

c) *Placa dreptunghiulară cu gol consolidat.* Pentru soluțiile (1) și (4) din § 42, avem:

în nervură

$$\mathcal{F}(\zeta) = \frac{2K}{(\mu - \beta)\,l}\left\{\sigma^0 - \left(\zeta^2 + \frac{R^4}{\zeta^2}\right) - i\,\sigma^1\left(\zeta^2 - \frac{R^4}{\zeta^2}\right)\right\} \tag{30}$$

Scanned with OKEN Scanner

în placă

$$\mathcal{F}(\zeta) = \frac{2}{(\mu - \beta)\, l}\left\{\sigma^0\left(\zeta^2 - \frac{\alpha}{\zeta^2}\right) - i\,\sigma^1\left(\zeta^2 + \frac{\alpha}{\zeta^2}\right)\right\} \tag{31}$$

Avem condițiile la limită

$$\begin{aligned} mnK\,(R_2^2 - R^4/R_2^2) &= R_2^2 + \alpha/R_2^2, \\ K\,(R_2^2 + R^4/R_2^2) &= R_2^2 - \alpha/R_2^2, \end{aligned} \tag{32}$$

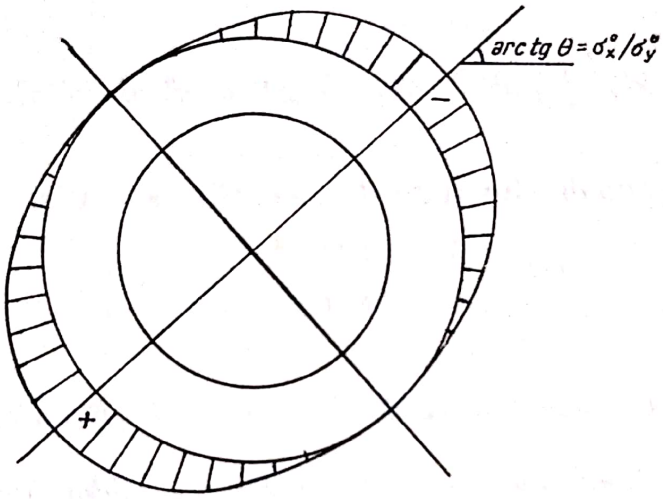


Fig. 68

de unde

$$\begin{aligned} K &= 2/L^+, \qquad \alpha = KR_2^4 L^-/2, \\ L^\pm &= \pm\,(1 + R^4/R_2^4) + mn\,(1 - R^4/R_2^4). \end{aligned} \tag{33}$$

Rezultă tensiunile :

în nervură

$$\begin{aligned} \sigma_{zr} &= 4\,mK\frac{r}{l}\left(1 - \frac{R^4}{r^4}\right)(\sigma^0 \cos 2\theta + \sigma^1 \sin 2\theta), \\ \sigma_{z\theta} &= 4m\,K\frac{r}{l}\left(1 + \frac{R^4}{r^4}\right)(-\,\sigma^0 \sin 2\theta + \sigma^1 \cos 2\theta); \end{aligned} \tag{34}$$

în placă

$$\sigma_{zr} = \frac{4r}{l}\left(1 + \frac{\alpha}{r^4}\right)(\sigma^0 \cos 2\theta + \sigma^1 \sin 2\theta),$$

$$\sigma_{z\theta} = \frac{4r}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{r^4}\right)(-\sigma^0 \sin 2\theta + \sigma^1 \cos 2\theta). \tag{35}$$

Tensiunile maxime sînt

$$\sigma_{z\theta} = -8\, m \frac{K}{l} R \sqrt{\sigma^{02} + \sigma^{12}}, \quad (\operatorname{tg}\theta = (\sigma_x^0 / \sigma_y^0)^{\pm 1}, r = R),$$

$$= 4\,(1 \mp \alpha/R_2^4) \frac{R_2}{l} \sqrt{\sigma^{02} + \sigma^{12}}, \quad (\operatorname{tg}\theta = \sigma_x^0/\sigma_y^0,\ \sigma_y^0/\sigma_x^0,\ r = R_2). \tag{36}$$

Valorile optimale sînt date de condițiile $\alpha = 0$ și

$$mn = \frac{1 + (R/R_2)^4}{1 - (R/R_2)^4}, \quad (\alpha = 0) \tag{37}$$

respectiv

$$m = l/2kR = lL^+/4 \quad R = l(1 + R^4/R_2^4)/2R. \tag{38}$$

d) *Placă triunghiulară cu gol circular consolidat.* Pentru încărcarea constantă pe două laturi considerată în § 34 și § 43, rezultă soluțiile :

în nervură

$$\mathfrak{F}(\zeta) = A\left[-A_3\left(\zeta^3 + \frac{R^6}{\zeta^3}\right) + iA_2\frac{c}{2}\left(\zeta^2 - \frac{R^4}{\zeta^2}\right) + A_1\frac{c^2}{3}\left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta}\right)\right]; \tag{39}$$

în placă

$$\mathfrak{F}(\zeta) = A\left[-\zeta^3 + \frac{\alpha_3}{\zeta^3} + \frac{ic}{2}\left(\zeta^2 + \frac{\alpha_2}{\zeta^2}\right) + \frac{c^2}{3}\left(\zeta - \frac{\alpha_1}{\zeta}\right)\right]. \tag{40}$$

A este dat de relația (2) din § 43 în care $Q = h\sigma_0$.

Impunînd condițiile la limită (6) și (9) din § 44 rezultă relațiile

$$mn\, A_n\left(R_2^n - \frac{R^{2n}}{R_2^n}\right) = R_2^n + \alpha_n/R_2^n,$$

$$A_n\left(R_2^n + \frac{R^{2n}}{R_2^n}\right) = R_2^n - \frac{\alpha_n}{R_2^n}, \quad (n = 1,\ 2,\ 3), \tag{41}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$A_n = 2/L_n^+, \qquad \alpha_n = K_n R_2^{2n} L_n^-/2, \qquad L_n^{\pm} = \pm\left(1 + \frac{R^{2n}}{R_2^{2n}}\right) + mn\left(1 - \frac{R^{2n}}{R_2^{2n}}\right). \tag{42}$$

Rezultă tensiunile:

în nervură

$$\begin{matrix}\sigma_{zr}\\ \sigma_{z\theta}\end{matrix} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}\left\{\mp 3A_3\left(\frac{r}{c}\right)^2\left[1 \mp \left(\frac{R}{r}\right)^6\right]\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 3\theta - A_2\frac{r}{c}\left[1 \mp \left(\frac{R}{r}\right)^4\right]\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2\theta \pm \right. \tag{43}$$

$$\left. \pm A_1\frac{1}{3}\left(1 \mp \left(\frac{R}{r}\right)^2\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \theta\right\}$$

în placă

$$\begin{matrix}\sigma_{zr}\\ \sigma_{z\theta}\end{matrix} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}\left\{\mp 3\left(\frac{r}{c}\right)^2\left[1 \mp \frac{\alpha_3}{r^6}\right]\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 3\theta - \frac{r}{c}\left(1 \mp \frac{\alpha_2}{r^4}\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2\theta \pm \right. \tag{44}$$

$$\left. \pm \frac{1}{3}\left(1 \mp \frac{\alpha_1}{r^2}\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \theta\right\}.$$

Tensiunile $\sigma_{z\theta}$ la marginea $r = R_2$ a plăcii sînt mai mari în sensul tangențial decît în lipsa golului.

§ 45. Problema transversală neomogenă

În cazul în care placa are o neomogeneitate variind continuu în sensul axelor Ox și Oy din planul median, modulii λ, μ și β fiind variabili, ecuațiile (2) din § 11 și (4) din § 23 trebuie înlocuite prin următoarele

$$(\mu - \beta)\,\Delta w + (\mu - \beta)_{,x}\,w_{,x} + (\mu - \beta)\,w_{,y} = \rho\ddot{w} + Z. \tag{1}$$

Ecuația (1) este de tipul ecuațiilor (5) din § 22 pentru care sînt satisfăcute condițiile (6) din § 22 și următoarele

$$w = P, \quad 2(a + c) = -[\log(\mu - \beta)]_{,x}, \quad 2(b + d) = [\log(\mu - \beta)]_{,y}. \tag{2}$$

Nu insistăm asupra procedeelor de rezolvare ce se asociază acestor formulări, ele putînd fi dezvoltate pe linia rezultatelor menționate în § 22. Menționăm posibilitatea aplicării metodelor iterative dezvoltate în lu-

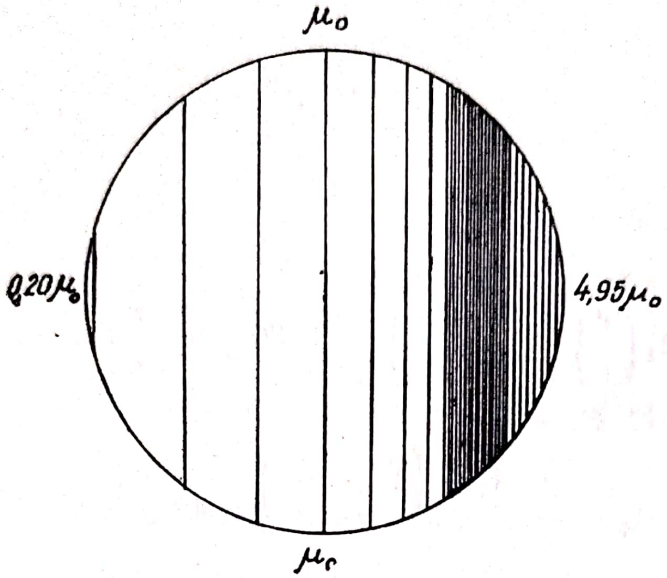


Fig. 69

crarea citată*) în cadrul problemei mediane cu ajutorul căreia se poate de exemplu studia cazul din figura 69 al discului circular cu modulul λ constant, β nul iar μ variind în sensul axei Ox.

*) M. Mișicu, Cr. Teodosiu [1].

Scanned with OKEN Scanner

Problema mediană

CAPITOLUL IV

Problema mediană formulată şi rezolvată în acest capitol de autor se referă la cîmpul elastic de tensiuni şi deformaţii care are un caracter median, în sensul că el este caracterizat complet prin valorile luate de funcţiile respective într-un plan denumit median. Corpurile în care intervine o asemenea solicitare sînt de exemplu :

— plăcile plane solicitate pe conturul marginal de forţe în planul median ;

— masivele prizmatice solicitate în mod uniform de-a lungul generatoarelor conturului prizmatic.

Deoarece ne referim la teoria elasticităţii tensionale şi anume pentru efecte de polarizare inerţială sau cuplaj de tip polar, corpurile considerate se pot presupune de tip structural reticular sau situate pe piloţi.

Problema mediană comportă, după cum se va arăta, atît un cîmp de tensiuni şi deformaţii plan, cît şi un cîmp adiţional transversal compatibil cu cel precedent cu care se asociază în mod natural în cadrul problemelor studiate. Implicit, rezultatele obţinute se reduc la cele stabilite în cadrul teoriei clasice a elasticităţii şi anume la problema plană pe care o vom denumi de tip Almansi.

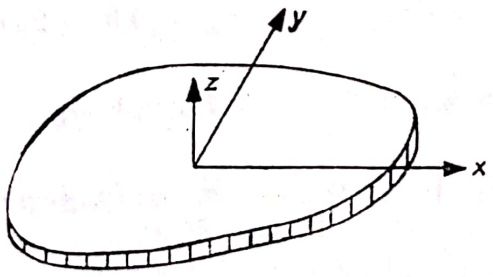


Fig. 70

Aplicarea teoriei funcţiilor de variabilă complexă şi a transformărilor conforme conduce la extinderea procedeului întrevăzut de S. A. Ciaplîghin [1] şi L.N.G. Filon [1] şi studiat de G. V. Kolosov [1], N. I. Muskhelişvili [3], [4], A. C. Stevenson [1], I. N. Vekua [1], [2], G. N. Savin [1]—[5] şi alţii.

În figura 70 apare conturul corpului considerat în problema plană şi modul de alegere al axelor de coordonate.

Scanned with OKEN Scanner

A. Formulările generale ale problemei mediane

§ 46. Ecuațiile fundamentale ale problemei mediane

Vom admite următorul cîmp de deplasări

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y), \qquad w = zW(x, y) \tag{1}$$

pentru care componentele tensorului deformației și ale vectorului rotației sînt următoarele

$$e_{xx} = u_{,x}, \quad e_{yy} = v_{,y}, \quad e_{xy} = (v_{,x} + u_{,y})/2, \quad e_{zx} = zW_{,x}/2,$$

$$e_{zy} = zW_{,y}/2, \quad e_{zz} = W, \tag{2}$$

$$\omega_{xy} = \omega = (v_{,x} - u_{,y})/2, \quad \omega_{yz} = zW_{,y}/2, \quad \omega_{zx} = -zW_{,x}/2.$$

Funcția dilatării are expresia

$$\theta = u_{,x} + v_{,y} + W. \tag{3}$$

Ecuațiile (1) din § 11 corespunzătoare mobilității elastice de tip polar, fără efecte termice, sînt :

$$\sigma_{xx} = \lambda\theta + 2\mu u_{,x}, \qquad \sigma_{yy} = \lambda\theta + 2\mu v_{,y},$$

$$\sigma_{\substack{xy \\ yx}} = \mu(u_{,y} + v_{,x}) \pm \beta(v_{,x} - u_{,y}),$$

$$\sigma_{\substack{zx \\ xz}} = (\mu \mp \beta)\, zW_{,x}, \qquad \sigma_{\substack{yz \\ zy}} = (\mu \pm \beta)\, zW_{,y}, \tag{4}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\theta + 2\mu W = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + 2(1 + \nu)\,\mu W.$$

Ecuațiile de echilibru se reduc la următoarele

$$(\lambda + \mu + \beta)\theta_{,x} + (\mu - \beta)\,\Delta u \equiv (\lambda + 2\mu)\theta_{,x} - 2(\mu - \beta)\,\omega_{xy,y} = \rho\ddot{u} + X,$$

$$(\lambda + \mu + \beta)\theta_{,y} + (\mu - \beta)\,\Delta v \equiv (\lambda + 2\mu)\theta_{,y} + 2(\mu - \beta)\,\omega_{xy,x} = \rho\ddot{v} + Y, \tag{5}$$

$$(\mu - \beta)\,\Delta W = \rho\ddot{W} + P.$$

Scanned with OKEN Scanner

S-a presupus următoarea formă a forțelor de volum

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y), \quad Z = zP(x, y). \tag{6}$$

Δ reprezintă operatorul lui Laplace în planul median (x, y) —vezi relația (5) de la § 23.

În cele ce urmează vom restrînge studiul la cazul static și fără forțele de volum. Ecuațiile (4), (5) din § 11 se scriu astfel

$$\Delta\vartheta = \rho\ddot{\vartheta}/(\lambda + 2\mu) = 0 \tag{7}$$

și

$$\Delta\omega = \rho\ddot{\omega}/(\mu - \beta) = 0, \quad \Delta W = \rho\ddot{W}/(\mu - \beta) = 0. \tag{8}$$

Funcția

$$\vartheta = \theta - W \tag{9}$$

este dilatarea mediană. Deoarece termenii inerțiali dispar, ϑ, w și W sînt funcții armonice.

§ 47. Interpretarea fizică a soluțiilor problemei mediane

Soluțiilor (1) din § 46 corespund următoarele restricții asupra distorsiunilor din placă

$$u_{,z} = v_{,z} = 0 \tag{1}$$

și

$$w(x, y, 0) = 0, \quad w_{,zz} = 0. \tag{2}$$

Restricțiile (1) impun condiția ca secțiunile plane inițial normale la suprafața mediană să rămînă după deformare plane și normale la aceeași suprafață. Restricțiile (2) corespund condițiilor ca particulele situate pe suprafața mediană să rămînă după deformare pe aceasta, în timp ce particulele situate în plane paralele cu suprafața mediană să se deplaseze în sens transversal conform unei legi liniare în raport cu z.

Corespunzător diferitelor particularizări aduse soluțiilor (1) din § 46, pot fi puse în evidență următoarele cazuri:

a) *Cîmp plan de deplasări și deformații.* Dacă $W = 0$, atunci nu apar tensiuni tangențiale pe suprafețele laterale și transversale

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0, \quad (z = h/2). \tag{3}$$

În schimb apar tensiuni normale în toate direcţiile, inclusiv pe suprafeţele laterale

$$\sigma_{zz} = \lambda\vartheta, \quad (\vartheta = u_{,x} + v_{,y}). \tag{4}$$

Acest cîmp elastic de deplasări şi tensiuni poate fi interpretat în modul următor :

α) Deplasările transversale w sînt împiedicate de existenţa unor armături transversale (etrieri) care preiau tensiunile normale transversale.

Fig. 71

β) Deplasările transversale w sînt împiedicate de elemente în contact laterale care permit alunecările între placă şi ele fără apariţie de tensiuni tangenţiale.

Remarcăm că rezultantele tensiunilor tangenţiale aplicate pe secţiunile transversale sînt nule $\int \sigma_{zx}\, dz = \int \sigma_{zy}\, dz = 0$. Datorită autoechilibrării tensiunilor σ_{zz} aplicate pe cele două suprafeţe laterale, se poate considera că placa nu este încărcată lateral de forţe transversale neechilibrate. În cazul plăcilor subţiri, datorită marii apropieri între suprafeţele laterale, se poate considera în mod aproximativ că tensiunile acestea se anihilează reciproc sau, în alţi termeni, se neglijează.

b) *Placă fără încărcări normale transversale.* Impunînd condiţia ca tensiunea normală aplicată pe suprafeţele laterale să fie nulă,

$$\sigma_{zz} = \lambda\vartheta + (\lambda + 2\mu)\, W = 0 \tag{5}$$

rezultă următoarea formă a funcţiei W :

$$W = -\lambda\vartheta/(\lambda + 2\mu), \tag{6}$$

iar ecuaţiile de mobilitate (4) din § 46 devin

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda^*\vartheta + 2\mu u_{,x}, \ldots, \\ \underset{zy}{\sigma_{yz}} &= -(1 \pm \beta/\mu)\, z\lambda^*\vartheta_{,y}/2, \\ \underset{zx}{\sigma_{xz}} &= -(1 \pm \beta/\mu)\, z\lambda^*\vartheta_{,x}/2. \end{aligned} \tag{7}$$

Scanned with OKEN Scanner

S-a notat

$$\lambda^* = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu) = E\nu/(1 - \nu^2). \tag{8}$$

Aşadar, datorită restricţiilor (1) şi (2), apar pe suprafeţele laterale anumite tensiuni tangenţiale a căror natură poate fi considerată de exemplu ca mai jos.

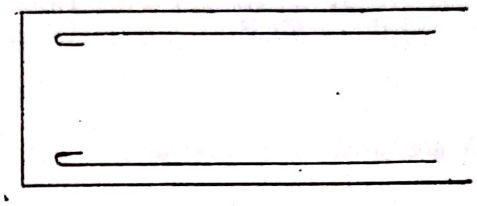


Fig. 72

α) Placa se află în contact pe suprafeţele laterale cu două corpuri care provoacă restricţii (1) şi (2), preluînd totodată tensiuni tangenţiale prin frecare. Aceste corpuri au mişcări libere în sens transversal (sînt flexibile) şi deci nu preiau tensiunile σ_{zz}.

β) Placa posedă armături paralele cu suprafaţa mediană în zonele suprafeţelor laterale care preiau tensiuni normale dar nu pot prelua tensiunile σ_{zz} (fig. 72).

c) *Cîmp median de deplasări şi deformaţii.* Corespunzător condiţiilor 1) şi (2) putem presupune următoarele:

α) Tensiunile tangenţiale pe contur sînt date şi provin de exemplu din cîmpul de tensiuni transversal al unei alte plăci. Placa problemei mediane este presupusă subţire, înzestrată cu etrieri care preiau forţele normale aplicate pe suprafeţele laterale. În acelaşi timp se va presupune că rezultanta tensiunilor tangenţiale pe suprafeţele laterale $\sigma^{\pm} = \sigma(\pm h/2)$ echilibrează acţiunea tensiunilor notate σ' ale cîmpului transversal definit în (4), § 46,

$$\sigma^+_{xz} - \sigma^-_{xz} = \sigma'_{xz} = (\mu + \beta)' w'_{,x} \qquad \sigma^+_{yz} - \sigma^-_{yz} = \sigma'_{yz} = (\mu + \beta)' w'_{,y}. \tag{9}$$

Cantitatea $(\ )'$ se referă la placa avînd un cîmp transversal de tensiuni. Rezultă corelaţia

$$W = (\mu + \beta)' w'/(\mu + \beta) h. \tag{10}$$

β) Placa este armată cu etrieri şi armături longitudinale astfel că tensiunile normale şi tangenţiale pe suprafeţele laterale sînt preluate integral. În acest caz funcţiile (1) din § 46 trebuie determinate în baza unor condiţii la limită corespunzătoare.

Scanned with OKEN Scanner

Remarcăm că în acest caz funcţia W sau w sau încărcările σ_{xz}, σ_{yz} pe feţele laterale ale plăcii sînt date. În alţi termeni, condiţiile la limită sînt date atît pe conturul plăcii (pentru tensiunile sau deplasările mediane) cît şi pe feţele laterale (σ_{xz}, σ_{yz} sau w fiind compatibile cu condiţiile diferenţiale pentru tensiuni şi deplasări).

d) *Placă în contact elastic pe feţele laterale.* Presupunem că tensiunile normale σ_{zz} pe feţele laterale ale plăcii sînt preluate de alte două corpuri în contact cu placa care se deformează conform ipotezei lui Winkler $\sigma_{zz} = Kw(\pm h/2) = \pm KhW/2$, K fiind un coeficient de tasare cunoscut. Atunci avem $\lambda\vartheta + (\lambda + 2\mu) W = KhW/2$ şi deci $W = -\lambda\vartheta/(\lambda + 2\mu - Kh/2)$.

§ 48. Condiţiile la limită ale problemei mediane

În cadrul primei probleme fundamentale vom considera condiţiile la limită pe linia C de contur (în planul $z = 0$ pentru deplasări)

$$u = u\ (s),\quad v = v\ (s),\quad w^+ = w^+\ (s), \tag{1}$$

s fiind măsura arcului pe C iar indicele $+$ corespunzînd valorilor în punctele $z = h/2$ ale funcţiilor.

În cadrul celei de-a doua probleme fundamentale la limită vom considera condiţiile

$$\begin{aligned} T_x &= \sigma_{xx} \cos \nu + \sigma_{xy} \sin \nu, \\ T_y &= \sigma_{yx} \cos \nu + \sigma_{yy} \sin \nu, \\ T_z &= \sigma_{zx} \cos \nu + \sigma_{zy} \sin \nu, \end{aligned} \tag{2}$$

ν reprezentînd unghiul între normala n la elementul de contur pe C şi axa x.

Reamintim că prin integrare pe linia de contur se obţin, conform ecuaţiilor constitutive (4) din § 46, condiţiile integrale

$$\begin{aligned} \int_C T_x\, ds &= -\int_D \sigma_{xz,z}\, dxdy = k\int_C W \sin \nu \cdot ds \\ \int_C T_y\, ds &= -\int_D \sigma_{yz,z}\, dxdy = -k\int_C W \cos \nu \cdot ds \\ \int_C T_z\, ds &= -\int_D \sigma_{zz,z}\, dxdy = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

 D este domeniul interior liniei C iar $k = (\mu + \beta)/(\mu - \beta)$.

Scanned with OKEN Scanner

În baza acestor relații generale vom specifica forma condițiilor la limită pentru diferitele cazuri menționate în § 47.

a) *Cîmp plan de deplasări și deformații.* Vom considera primele două condiții din (1) sau (2).

b) *Placă fără încărcări normale transversale.* Idem.

c) *Cîmp median de deplasări și deformații.* α) Idem. β) Vom considera toate cele trei condiții din 1) sau 2). În locul celei de-a treia condiții din 1) putem lua

$$\frac{dw}{dn} = f(s). \tag{4}$$

§ 49. Cîmpul elastic tensional în jurul unui punct

Deoarece în rezolvarea problemlor la limită ale problemei mediane joacă un rol important cunoașterea variației tensiunilor, vor fi expuse în cele ce urmează o serie de proprietăți care permit descrierea cîmpului elastic tensional în jurul unui punct.

Fie o suprafață de normală n (x, y) situată în planul median. Atunci tensiunile pe această suprafață au proiecțiile pe axe date în (2), § 48. Proiecția pe normală n a tensiunilor va fi

$$T_\nu = T_x \cos \nu + T_y \sin \nu. \tag{1}$$

Componenta normală a tensiunilor se mai scrie astfel

$$\sigma_\nu = \sigma_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\nu + \sigma_{(xy)} \sin 2\nu, \tag{2}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2)$$

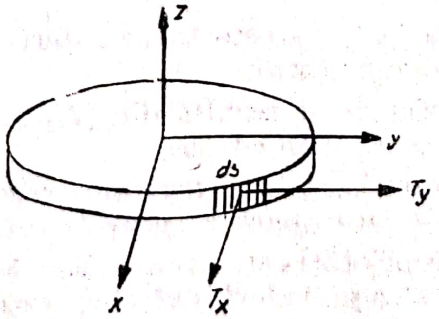


Fig. 73

(vezi fig. 73) iar componenta tangențială are expresia

$$\tau_\nu = T_x \sin \nu - T_y \cos \nu = \tau_{\nu s} + \sigma_{[xy]}. \tag{3}$$

În această expresie intervine tensiunea tangențială provenită din componentele simetrice ale tensorului tensiunii

$$\tau_{\nu s} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\nu - \sigma_{(xy)} \cos 2\nu. \tag{4}$$

Componenta normală are o formă analogă formei pătratice

$$2\Omega(\xi, \eta) = \xi^2 \sigma_{xx} + 2\xi\eta\sigma_{(xy)} + \eta^2 \sigma_{yy} \tag{5}$$

căreia i se asociază suprafața tensiunilor $2\Omega(\xi, \eta) = c^2$, având centrul în originea coordonatelor. Se mai constată că această componentă nu depinde de componenta antisimetrică $\sigma_{[xy]}$ și deci se poate enunța următoarea proprietate :

I. *Componenta normală maximă a unei stări asimetrice de tensiune, verificînd condiția* $\partial\Sigma_\nu/\partial\nu = 0$ *este determinată doar de cîmpul simetric de tensiune, planele pe care aceasta acționează fiind reciproc ortogonale și formînd unghiurile* $\nu = \theta_\sigma$, $\theta_\sigma + 90°$; θ_σ *este dat de relația :*

$$\operatorname{tg} 2\theta_\sigma = 2\sigma_{(xy)}/(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}). \tag{6}$$

(Pentru $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, $\sigma_{xy} = 0$ avem o nedeterminare, orice direcție fiind principală $\theta_\sigma = 0/0$.)

Pe aceste plane, denumite plane principale ale tensiunii, apar tensiunile normale și tangențiale

$$\sigma = \sigma_1, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma^2_{(xy)}}, \quad \tau_\nu = -\sigma_{[xy]}. \tag{7}$$

Demonstrația relației (7) se efectuează derivînd în raport cu ν termenii din (2) și anulînd rezultatul.

Următoarea proprietate ce rezultă din $(7)_2$ aduce o precizare asupra situației care apare în teoria asimetrică.

II. *Componenta antisimetrică a tensiunii este o tensiune tangențială constantă, egală cu aceea care apare în planele principale.*

În baza acestei proprietăți este atunci clar că poziția planelor pe care tensiunea tangențială atinge valori extreme este determinată doar de componentele simetrice ale tensiunii, condiția de extrem pentru (3) fiind, ca și în teoria simetrică,

$$\frac{\partial \tau_\nu}{\partial \nu}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\nu + 2\sigma_{(xy)} \sin 2\nu = 0. \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Acest rezultat și (6) conduc la următoarea proprietate :

III. *Tensiunea tangențială este maximă în planele formînd cu axa x unghiurile* $\nu = \theta_\tau$, $\theta_\tau + 90°$, θ_τ *verifică relația* $\operatorname{tg} 2\theta_\tau = -1/\operatorname{tg} 2\theta_\sigma$ *și deci aceste plane sînt situate la 45° față de planele principale, poziția lor fiind determinată de starea simetrică de tensiune.*

În planele unde tensiunea tangențială e minimă sau maximă, componenta normală și componenta tangențială a tensiunii, au, respectiv, valorile

$$\sigma_{\nu\tau} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2 = (\sigma_1 + \sigma_2)/2, \qquad \tau_{\nu\max} = \tau_{\nu s\max} + \sigma_{[xy]}. \tag{9}$$

S-a utilizat notația

$$\tau_{\nu s\max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma^2_{(xy)}} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \tag{10}$$

care corespunde tensiunii tangențiale maxime provenită din componentele simetrice ale tensorului tensiunii.

Revenind la formula tensiunii normale (2) și tangențiale (3), se observă că, în ipoteza că axele de coordonate coincid cu cele principale, aceste formule se mai scriu astfel

$$\sigma_\nu = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\nu, \qquad \tau_\nu = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\nu. \tag{11}$$

Corespunzător acestora, obținem construcția lui Mohr modificată din figura 74 în spațiul (σ, τ).

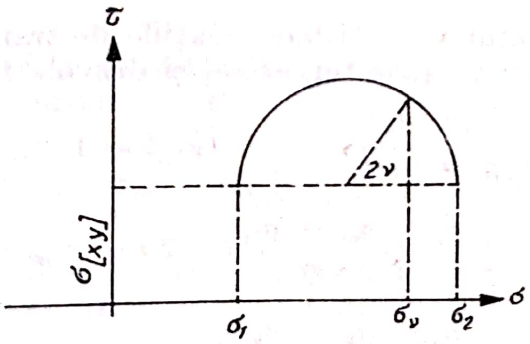


Fig. 74

Deoarece între α și θ_σ există relația $\nu = \theta_\sigma$ sau $\theta_\sigma + 90°$, rezultă formulele

$$\begin{matrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\end{matrix} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\theta_\sigma, \qquad \sigma_{xy} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\theta_\sigma + \sigma_{[xy]}. \tag{12}$$

Scanned with OKEN Scanner

Notăm că dacă $\sigma_3 = \sigma_{zz} = 0$, atunci cîmpul median de tensiune se scindează într-un cîmp plan și un cîmp transversal. În general tensiunile tangențiale maxime simetrice din planul (x, y) satisfac egalitățile

$$\tau_1^s = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_2^s = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \sigma_3^s = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}. \tag{13}$$

Tensiunile tangențiale σ_{zx}, σ_{zy} au componenta pe suprafața de normală n

$$\sigma_{z\nu} = \sigma_{zx} \cos \nu + \sigma_{zy} \sin \nu \tag{14}$$

care este maximă pentru $\partial \sigma_{z\nu}/\partial \nu = 0$. Se obține atunci rezultatul următor.

IV. *Tensiunea tangențială transversală este maximă în planul care face cu axa x unghiul* $\nu = \theta_\tau$ *dat de relația*

$$\operatorname{tg} \theta_\tau = \sigma_{zy}/\sigma_{zx} \tag{15}$$

iar valoarea maximă este

$$\tau_z = \sqrt{\sigma_{zx}^2 + \sigma_{zy}^2}. \tag{16}$$

Vom numi planul respectiv, *planul principal transversal*. Pentru mai multă claritate vom preciza sensul proprietăților menționate, considerînd o transformare de coordonate dată de o rotație în jurul originii de unghi α. Astfel, un vector în planul median de coordonate ξ, η se transformă conform relațiilor

$$\zeta = \xi' \cos 2\nu - \eta' \sin \nu, \quad \eta = \xi' \sin \nu + \eta' \cos \nu \tag{17}$$

și deci tensiunile definind vectorul $(\sigma_{zx}, -\sigma_{zy})$ se transformă în modul următor

$$\sigma'_{zx} = \sigma'_{zx} \cos \nu + \sigma'_{zy} \sin \nu, \quad \sigma'_{zy} = -\sigma_{zx} \sin \nu + \sigma_{zy} \cos \nu. \tag{18}$$

Tensorul tensiunii va satisface relațiile de transformare scrise respectiv sub formă concentrată tensorială și dezvoltată

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \sigma_{\gamma\delta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta}, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

$$\sigma'_{xx} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\nu - \sigma_{(xy)} \sin 2\nu,$$

$$\sigma'_{yy} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\nu - \sigma_{(xy)} \sin 2\nu, \tag{19}$$

$$\sigma'_{xy} = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin 2\nu + \frac{\sigma_{xy} - \sigma_{yx}}{2} + \frac{\sigma_{xy} + \sigma_{yx}}{2} \cos 2\nu,$$

$$\sigma'_{yx} = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin 2\nu - \frac{\sigma_{xy} - \sigma_{yx}}{2} + \frac{\sigma_{xy} + \sigma_{yx}}{2} \cos 2\nu.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din cele de mai înainte decurg următoarele legi de transformare

$$\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + 2i\sigma'_{(xy)} = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{(xy)})\, e^{2i\nu},$$

$$2(\sigma'_{xx} - i\sigma'_{yy}) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} - (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{(xy)})\, e^{2i\nu},$$

$$\Omega(\zeta, \eta) = \sigma'_{xx}\xi'^2 + \sigma'_{yy}\eta'^2 + 2\sigma'_{(xy)}\xi'\eta' = \sigma_{xx}\xi^2 + \sigma_{yy}\eta^2 + 2\sigma_{(xy)}\xi\eta, \tag{20}$$

$$\sigma'_{xy} - \sigma'_{yx} = \sigma_{xy} - \sigma_{yx}.$$

Se constată că suma tensiunilor normale, forma Ω şi componenta antisimetrică a tensiunii sînt invarianţi. Aceste rezultate se pot obţine şi direct pe baza studiului variaţiei tensiunilor şi cuplelor de tensiune în spaţiu.

Conform relaţiilor (7) şi (20) rezultă că dacă N_1, N_2 sînt tensiuni normale principale, au loc relaţiile

$$\sigma_2 - \sigma_1 = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{(xy)})\, e^{2i\nu}, \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \tag{21}$$

deoarece în acest caz $\sigma'_{(xy)} = 0$.

Mai observăm că $\sigma_{[xy]}$ este un invariant faţă de transformările axelor de coordonate.

§ 50. Funcţii de tensiune

Conform ecuaţiilor constitutive (4) din § 46, ecuaţiile de echilibru static formulate în tensiuni se scriu astfel

$$(\sigma_{xx} + (\mu + \beta)\, W)_{,x} + \sigma_{xy,y} = 0, \quad \sigma_{yx,x} + (\sigma_{yy} + (\mu + \beta)\, W)_{,y} = 0. \tag{1}$$

Vom putea atunci utiliza reprezentarea tensiunilor care apar conform cu descompunerile (11) din § 46 :

$$\sigma_{xx0} = F_{,yy} - G_{,xy} - (\mu + \beta)\, W, \sigma_{xy0} = -F_{,xy} + G_{,xx},$$

$$\sigma_{yy0} = F_{,xx} + G_{,xy} - (\mu + \beta)\, W, \sigma_{yx0} = -F_{,xy} - G_{,yy},$$

$$\sigma_{zz0} = \nu[\Delta F - 2(\mu + \beta)\, W] + 2\mu W, \quad \sigma_{xx1} = \mathfrak{X}_{,x}, \quad \sigma_{xy} = \mathfrak{X}_{,y}, \quad X = \tag{2}$$

$$= \Delta\mathfrak{X}, \quad \sigma_{yx1} = \mathfrak{Y}_{,x}, \quad \sigma_{yy} = \mathfrak{Y}_{,y}, \quad Y = \Delta\mathfrak{Y}, \quad \sigma_{zz1} = \nu(\mathfrak{X}_{,x} + \mathfrak{Y}_{,y}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Condițiile (5) din § 15, conform ecuațiilor (4), § 46 și celor precedente, se reduc la următoarele:

$$\begin{aligned} 2(1-\nu)[(1+\nu)\,\Delta F-(\mu+\beta)\,W]_{,y} &= (1+\nu)\,(1-\mu/\beta)\,G_{,x} \\ 2(1-\nu)[(1+\nu)\,\Delta F-(\mu+\beta)\,W]_{,x} &= -(1+\nu)\,(1-\mu/\beta)\,G_{,y}. \end{aligned} \tag{3}$$

Funcția ΔW satisface ultima ecuație din (8), § 46, și deci derivînd ecuațiile (3) respectiv cu x și y și adunînd rezultă

$$(1+\nu)\,\Delta\Delta F=0. \tag{4}$$

Derivînd ecuațiile din (3) cu x și y apoi scăzînd, rezultă armonicitatea funcției G:

$$\Delta G=0. \tag{5}$$

§ 51. Reprezentarea soluțiilor problemei mediane cu ajutorul funcțiilor de variabilă complexă

În scopul reprezentării soluțiilor teoriei statice și fără forțe de masă cu ajutorul unei funcții potențiale de deplasare sub formă complexă, vom utiliza funcțiile auxiliare

$$f=(\lambda+2\mu)\,\vartheta+2i(\mu-\beta)\,\omega,\quad U=u+iv. \tag{1}$$

Conform ecuațiilor (5) și (3) din § 46, vor avea loc condițiile

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}[f-(\lambda+\mu+\beta)\,W]=0, \tag{2}$$

ζ reprezintă variabila complexă $x+iy$.

Prin integrare rezultă expresia funcției auxiliare

$$f=f(\zeta)+(\lambda+\mu+\beta)\,W. \tag{3}$$

Deoarece

$$2\frac{\partial U}{\partial\zeta}=\vartheta+2i\omega=\frac{1}{2}\left[\frac{f(\zeta)+\overline{f(\zeta)}-2(\lambda+\mu+\beta)\,W}{\lambda+2\mu}+\frac{f(\zeta)-\overline{f(\zeta)}}{\mu-\beta}\right], \tag{4}$$

rezultă, printr-o nouă integrare, formulele de reprezentare pentru deplasări

$$\mu W = (\varkappa + 1)\ \mathrm{Re}\ \pi'(\zeta)$$
$$2\mu U = \varkappa\varphi(\zeta) - \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} - \overline{\pi(\zeta)} - \zeta\overline{\pi'(\zeta)}. \tag{5}$$

S-a notat

$$f(\zeta) = \frac{2(\varkappa+1)}{k+1}\varphi'(\zeta),\ \varkappa = \frac{\lambda+3\mu-\beta}{\lambda+\mu+\beta},\ k = \frac{\mu+\beta}{\mu-\beta}. \tag{6}$$

Dacă $\pi(\zeta) = 0$, atunci $w = 0$ iar reprezentarea (5) se reduce la cea de tip Kolosov-Musheliṣvili. Reprezentările date permit stabilirea condiţiilor de analiticitate ale deplasărilor. De exemplu, dacă funcţiile $\varphi(\zeta)$ şi $\pi(\zeta)$ sînt analitice în domeniul în care se definesc, atunci deplasările sînt analitice în acelaşi domeniu*.

§ 52. Reprezentări complexe pentru tensiuni

Vom introduce tensori complecşi ai tensiunilor

$$T_{\beta\gamma} = \frac{\partial\zeta_\beta}{\partial x_\delta}\frac{\partial\zeta_\gamma}{\partial x_\varepsilon}\sigma_{\delta\varepsilon},\ (\beta,\ldots,\varepsilon = 1,2 \text{ sau } = x,y) \tag{1}$$

ale cărui componente sînt următoarele:

$$T_{xx} = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + i(\sigma_{xy} + \sigma_{yx}),\ T_{yy} = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} - i(\sigma_{xy} + \sigma_{yx}),$$
$$T_{xy} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + i(\sigma_{yx} - \sigma_{xy}),\ T_{yx} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} - i(\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) = \overline{T}_{xy}, \tag{2}$$
$$T_z = \sigma_{zz} = \nu\ \mathrm{Re}\ T_{xy} + 2(1+\nu)\mu W.$$

Într-un mod analog se exprimă şi alte mărimi ca de exemplu

$$T_{xz} = \sigma_{xz} + i\sigma_{yz},\ T_{yz} = \sigma_{xz} - i\sigma_{yz} = \overline{T}_{xz},\ T_{zz} = \sigma_{zz},\ T_{zx} = \sigma_{zx} + i\sigma_{zy},$$
$$E_{xx} = 2\frac{\partial U}{\partial\zeta} = u_{,x} - v_{,y} + 2(u_{,y} + v_{,x}) = \overline{E}_{yy}, \tag{3}$$
$$E_{xy} = \frac{\partial U}{\partial\zeta} + \frac{\partial\overline{U}}{\partial\overline{\zeta}} = \theta = u_{,x} + v_{,y},\ 2i\omega = \frac{\partial U}{\partial\zeta} - \frac{\partial\overline{U}}{\partial\overline{\zeta}}.$$

* O funcţie de variabile reale x, y este analitică într-un domeniu dat dacă în jurul fiecărui punct al acestui domeniu poate fi dezvoltată în serie de puteri întregi pozitive de $(x-x_0)$, $(y-y_0)$. O funcţie de variabilă complexă $\zeta = x+iy$ olomorfă într-un domeniu dat e analitică dacă e dezvoltabilă în serie în raport cu puterile pozitive întregi dacă în jurul unui punct arbitrar $\zeta_0 = x_0 + i\,y_0$ şi este totodată analitică în x, y.

Scanned with OKEN Scanner

Cu ajutorul ecuaţiilor de mobilitate (4) din § 46, rezultă

$$T_{xx} = 4\mu \frac{\partial U}{\partial \bar{\zeta}} = -2[\zeta(\overline{\varphi''(\zeta)} + \overline{\pi''(\zeta)}) + \overline{\psi'(\zeta)}],$$

$$T_{xy} = 2(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{\zeta}}\right) - 2\beta\left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{\zeta}}\right) + 2\lambda W =$$

$$= 2[\varepsilon\varphi'(\zeta) + \overline{\varphi'(\zeta)} - \delta(\pi'(\zeta) + \overline{\pi'(\zeta)})],$$

$$T_{xx} = 2(1+\delta)\,\overline{z\pi''(\zeta)}/k,\quad T_{xz} = 2(1+\delta)\,\overline{z\pi''(\zeta)}, \tag{4}$$

$$T_{zz} = 2\nu\,\mathrm{Re}[(1+\varepsilon)\,\varphi'(\zeta) - 2\delta\pi'(\zeta)] + 2(1+\nu)(\varkappa+1)\,\mathrm{Re}\,\pi'(\zeta) =$$

$$= 2\mathrm{Re}[(1+\varepsilon)\,\nu\varphi'(\zeta) + (\varkappa+1+2\nu(1-\gamma))\,\pi'(\zeta)].$$

S-a notat

$$\gamma = \frac{\beta}{\mu}\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu+\beta} = \frac{\beta}{\mu}\frac{\varkappa+1}{2},\quad \delta = \frac{\varkappa-1}{2} + \gamma,\quad \varepsilon = 1-2\gamma,\quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}. \tag{5}$$

Tensiunile efective mediane orientate paralel cu planul median pot fi mai uşor exprimate cu ajutorul relaţiilor

$$\sigma_{xx} + i\sigma_{xy} = \frac{1}{2}(T_{xx} + T_{yz}),\quad \sigma_{yy} + i\sigma_{yz} = \frac{1}{2}(T_{yx} - T_{xz}). \tag{6}$$

Tensiunile pe un element de suprafaţă de normală n (2) din § 48, se pot de asemenea scrie sub formă complexă conform cu (11) din § 23 şi (2) din § 26 şi conform notaţiilor $\mathrm{Re}\,F = (F+\overline{F})/2$, $\mathrm{Im}\,F = (F-\overline{F})/2i$:

$$T_x + iT_y = \frac{i}{2}\left[T_{xx}\frac{d\bar{\zeta}}{ds} - T_{xy}\frac{d\zeta}{ds}\right].$$

$$T_z = \mathrm{Re}\,i\frac{d\bar{\zeta}}{ds}\,T_{xz}^{+},\quad \left(f^{+} = f\left(\frac{h}{2}\right)\right) \tag{7}$$

sau, aplicînd (4) şi relaţiile de forma $\frac{d\zeta}{ds}\varphi'(\zeta) = \frac{d\varphi(\zeta)}{ds}$,

$$T_x + iT_y = -i\left[\frac{d\mathfrak{F}}{ds} + (1+\delta)\,\zeta\frac{d}{ds}\overline{(\pi'(\zeta) - \pi'(\zeta))}\right],$$

$$T_z = -i(1+\delta)\frac{h}{k}\frac{d\mathfrak{G}}{ds}, \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru

$$\mathcal{F} = \varepsilon\varphi(\zeta) + \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} - (1+2\delta)\,\pi(\zeta) - \zeta[\delta\overline{\pi'(\zeta)} - (1+\delta)\,\pi'(\zeta)], \tag{9}$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2}\left[\pi'(\zeta) - \overline{\pi'(\zeta)}\right].$$

Substituind expresia care apare în a doua reprezentare din (7) în prima reprezentare, rezultă

$$T_x + iT_y + \frac{2\zeta}{h}\,T_z = -\,i\,\frac{d\mathcal{F}}{ds} \tag{10}$$

pentru

$$T_z = T_z^+ = T\left(\frac{h}{2}\right). \tag{11}$$

O formulare mai avantajoasă sub raportul rezolvării a condițiilor la limită este următoarea. Fie N proiecția pe normala exterioară n a elementului de linie a conturului, a tensiunilor aplicate pe acesta iar T proiecția tensiunilor pe tangenta la elementul de contur. Presupunem că această proiecție este orientată spre stînga atunci cînd privim în direcția pozitivă a normalei n. Avem deci (conform (2) din § 30 și (11) din §23)

$$N - iT = T_x\cos\nu + T_y\sin\nu + i(T_x\sin\nu - T_y\cos\nu) = (T_x - iT_y)e^{i\nu} =$$

$$= \sigma_{xx}\cos^2\nu + \sigma_{yy}\sin^2\nu + 2\sigma_{(xy)}\cos\nu\sin\nu + i[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin\nu\cos\nu +$$

$$+ \sigma_{xy}\sin^2\nu - \sigma_{yx}\cos^2\nu]. \tag{12}$$

ν este unghiul făcut (vezi (2) din § 30) de normala la contur n cu axa Ox, unghiul măsurat începînd de la această axă. Conform acestei convenții vom avea $d\zeta = ie^{i\nu}\,ds$, $ds = rd\nu$. Utilizînd relațiile trigonometrice

$$2\cos^2\nu = 1 + \cos 2\nu,\quad 2\sin^2\nu = 1 - \cos 2\nu, \tag{13}$$

pentru o regrupare a termenilor din (12) mai rezultă formula

$$2(N - iT) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + i(\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) - (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{(xy)})\,e^{2i\nu} = \overline{T}_{xy} + \overline{T}_{xx}\,e^{2i\nu}. \tag{14}$$

În ultimul membru apar tensiunile complexe definite în (2).

Remarcăm că $(7)_2$ se mai scrie astfel :

$$T_z = \operatorname{Re} e^{-iv}\, T_{zx}^{+}. \tag{15}$$

Această condiție corespunde acțiunii de forfecare pe contur în sensul propriu, și anume prin tăierea plăcii cu două cuțite (fig. 75).

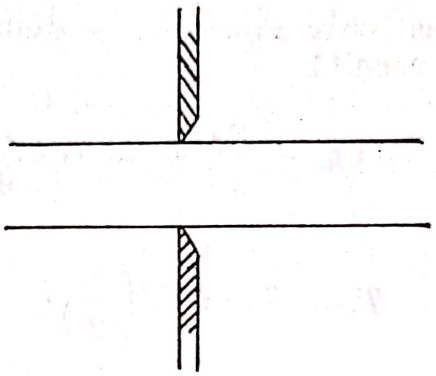


Fig. 75

§ 53. Vector și moment principal

Într-o serie de probleme cum ar fi cele relative la corpuri cu goluri interioare, apare necesitatea determinării rezultantelor încărcărilor pe contur prin integrarea condițiilor la limită.

Vom considera vectorul format cu ajutorul integralei

$$\begin{aligned} X + iY &= \int_A^B \left[[T_x + iT_y + 2\zeta \frac{k}{h} T_z \right] ds = -i\mathfrak{F}(\zeta) \Big|_A^B, \\ Z &= \int_A^B T_z\, ds = -(1+\delta)\frac{ih}{2k} \varphi \Big|_A^B, \end{aligned} \tag{1}$$

în care s-au utilizat relațiile (8) și (10) din § 52. $( ) \Big|_A^B$ reprezintă creșterea funcțiilor din interiorul parantezei între punctele A și B situate pe curba de integrare. Acest vector este numit în teoria clasică a elasticității *vectorul principal al tensiunii*. El este aplicat pe arcul AB și anume pe partea sa dreaptă dacă luăm ca sens de parcurgere sensul de la A la B. În alți termeni el este situat pe partea arcului corespunzătoare normalei pozitive (fig. 76).

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a efectua integrarea, vom presupune A fix iar $B\,(x)$ mobil

$$i(X + iY + \text{const.}) = \mathfrak{F}(x, y),\ i(Z + \text{const.}) = (1 + \delta)\frac{h}{k}\mathcal{G}(x, y). \quad (2)$$

Vom mai considera integrala

$$\mathfrak{M} = \int_A^B (xT_y - yT_x)\,ds = \int_A^B ds\ \mathrm{Re}\, i\zeta(T_x - iT_y) \quad (3)$$

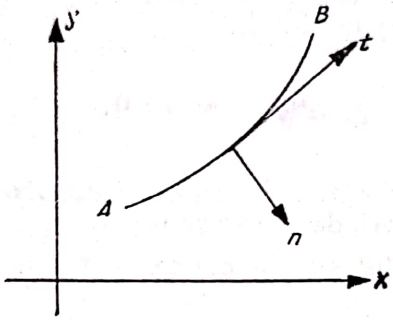


Fig. 76

care reprezintă *momentul principal al tensiunilor* calculat în origina coordonatelor. Pentru a efectua integrarea, vom aplica (7), (8) din § 52 și vom obține

$$\mathfrak{M} = \mathrm{Re}\,\{\chi(\zeta) - \zeta\psi(\zeta) - \zeta\bar{\zeta}[\varphi'(\zeta) - \delta\pi'(\zeta) + (1 + \delta)\,\overline{\pi'(\zeta)}]\} + \mathfrak{N}\,(A, B) \quad (4)$$

în care

$$\chi(\zeta) = \int \psi(\zeta)\,d\zeta, \quad (5)$$

$$\mathfrak{N}\,(\zeta) = \mathrm{Re}\int_A^B \bar{\zeta}\,d\zeta[(1 - \varepsilon)\,\varphi'(\zeta) + (1 + \delta)\,(\pi'(\zeta) + \overline{\pi'(\zeta)})].$$

Pentru interpretarea mărimii $\mathfrak{N}$ vom aplica relațiile

$$\int_C (\ )\,d\zeta = i\int_C (\cos\nu + i\sin\nu)(\ )\,ds = 2i\int_D \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}(\ )\,dx\,dy$$

în care am ținut seama de (11) din § 23. Va decurge egalitatea conformă cu (4) din § 52, relativă la un ciclu complet pe o curbă închisă

$$\mathfrak{N} = 2\,\mathrm{Re}\,i\int_D [(1 - \varepsilon)\,\varphi'(\zeta) + (1 + \delta)\,\bar{\zeta}\,\overline{\pi''(\zeta)}]\,dx\,dy = \quad (6)$$

$$= \int_D [\sigma_{xy} - \sigma_{yx} + \frac{2}{h}(y\sigma_{xz}^{+} - x\sigma_{yz}^{+})]\,dx\,dy.$$

S-a notat

$$\sigma^+ = \sigma\left(\frac{h}{2}\right). \tag{7}$$

Prin urmare $\mathfrak{N}$ este de natura rezultantei momentelor provenite din efectele de polarizare sau cuplaj precum și din acțiunea tensiunilor tangențiale aplicate pe fețele laterale. Remarcăm că dacă integralele din (4) sînt luate pe o linie închisă, rezultă condiția de echilibru aplicată plăcii situate în interiorul acelei linii

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{N} = 0. \tag{8}$$

§ 54. Determinarea funcțiilor de reprezentare în cazul domeniului simplu conex

Vom utiliza definițiile date în § 16 și ne vom limita la domeniul simplu conex. Vom deduce condițiile pe care trebuie să le îndeplinească două sisteme de funcții de reprezentare

$$\begin{aligned} &\Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta), \quad \Psi(\zeta) = \psi'(\zeta), \quad \Pi(\zeta) = \pi'(\zeta) \\ &\Phi^*(\zeta), \qquad\quad \Psi^*(\zeta), \qquad\quad \Pi^*(\zeta) \end{aligned} \tag{1}$$

pentru ca tensiunile să fie unic determinate. Conform ecuațiilor (4) din § 52 se stabilesc următoarele:

T_{xy} este o funcție determinată dacă

$$\begin{aligned} &\Phi^*(\zeta) = \Phi(\zeta) + Ci, \quad \Pi^*(\zeta) = \Pi(\zeta) + Di, \\ &(1-\gamma)\,\mathrm{Im}\,C = \delta\,\mathrm{Im}\,D, \; (-1+\varepsilon)\,\mathrm{Re}\,C = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Pentru $D \neq 0$, C este o constantă imaginară, iar pentru $D = 0$, C este o constantă reală. În această situație, T_{xx} este o funcție determinată dacă

$$\Psi^*(\zeta) = \Psi(\zeta). \tag{3}$$

Este clar că T_{xx} este de asemenea determinată. Vom rezulta următoarele nedeterminări ale funcțiilor de reprezentare

$$\varphi^*(\zeta) = \varphi(\zeta) + C\,i\zeta + a, \quad \pi^*(\zeta) = \pi(\zeta) + iD\zeta + c, \quad \psi^*(\zeta) = \psi(\zeta) + b. \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci reprezentarea deplasărilor (5) din § 51 suferă următoarea nedeterminare compatibilă cu un cîmp elastic de tensiuni determinat

$$W^* = W + \frac{\varkappa + 1}{\mu} \operatorname{Re} i D,$$
$$2\mu U^* = 2\mu U + i(\varkappa C + \overline{C}) z + \varkappa a - \overline{b} - c. \tag{5}$$

Vom presupune în continuare că deplasările sînt unic determinate. Pentru aceasta va trebui să fie verificate următoarele condiții

$$\operatorname{Re} iD = 0, \quad C = 0, \quad \varkappa a - \overline{b} - c = 0. \tag{6}$$

Dată fiind arbitrarietatea ce rezultă în alegerea constantelor, apare oportun de a indica unele condiții adiționale ce permit precizarea lor completă fără a afecta generalitatea rezultatelor. Astfel, în cazul în care deplasările sînt determinate, de exemplu în cadrul primei probleme la limită fundamentale, analizînd nedeterminările (6) rezultă că putem impune următoarele condiții de determinare:

$$\varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \pi(0) = 0$$

două din condițiile: (7)

$$\operatorname{Im} \pi'(0) = 0.$$

În cazul în care tensiunile sînt determinate — de exemplu în cazul celei de-a doua probleme fundamentale la limită, deoarece constantele a,b,c sînt arbitrare iar C, D satisfac condițiile din (2), atunci

$$\varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \pi(0) = 0$$
$$\operatorname{Im} \varphi'(0) = \gamma K, \quad \pi'(0) = 0, \tag{8}$$

K fiind o constantă nedeterminată și luînd o valoare mărginită. Prin urmare, pentru $\gamma = 0$ putem efectiv determina valoarea

$$\operatorname{Im} \varphi'(0) = 0.$$

Notăm $\operatorname{Im} f = (f - \overline{f})/2i$.

În cazul condiției la limită pentru funcțiile $\mathfrak{F}$ și $\mathfrak{G}$ din (9), § 52, anulînd termenii dependenți de constantele din (4) se deduce

$$\varepsilon C - \overline{C} = \delta(D - \overline{D}), \quad D + \overline{D} = 0, \quad \varepsilon a + \overline{b} = (1 + 2\delta) c. \tag{9}$$

Vom putea atunci impune condițiile

$$\operatorname{Im} \varphi'(0) = \gamma K, \quad \operatorname{Re} \pi'(0) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

două din condițiile :

$$\varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \pi(0) = 0, \tag{10}$$

K este o constantă nedeterminată care ia valori mărginite. Într-adevăr, două dintre constantele a,b,c, sînt arbitrare iar pentru $\gamma = 0$ putem fixa valoarea

$$\operatorname{Im} \varphi'(0) = 0.$$

§ 55. Formulele de reprezentare în cazul domeniilor multiplu conexe

Vom ține seama de elementele generale expuse în § 16. În primul rînd vom utiliza (4) din § 52 care ne arată că expresiile

$$4 \operatorname{Re}\{((1+\varepsilon)/2)\,\Phi(z) - \delta\,\Pi(z)\} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$$

$$(1+\delta)\,h\,\Pi'(z)/k = \sigma_{zx} + i\sigma_{zy} - 2\{z\,[\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Pi'(z)}] + \overline{\Psi(z)}\} = \tag{1}$$

$$= \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + i(\sigma_{xy} + \sigma_{yx})$$

sînt uniforme odată cu tensiunile în planul median și tensiunile tangențiale transversale. Se deduce că $\Phi'(z)$, $\Pi'(z)$ și $\Psi(z)$ sînt uniforme și deci $\Phi(z)$ și $\Pi(z)$ admit termeni multiformi de tip logaritmic.

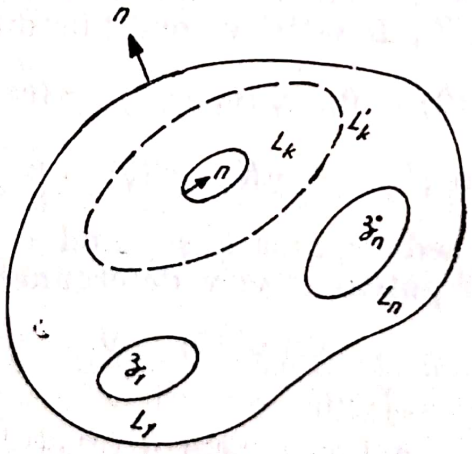


Fig. 77

Fie atunci conturul L_k' care conține alt contur L_k pe care îl vom parcurge în sensul acelor de ceasornic (fig. 77). Fie $F_k = iB_k + \delta P_k/((1+\varepsilon)/2)$ creșterea funcției $\Phi(z)$ și P_k creșterea funcției $\Pi(z)$ în urma parcurgerii unui ciclu pe un cerc foarte mic de centru z_k în interiorul lui L_k, B_k fiind o constantă reală.

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama de aceste convenții, vom considera funcțiile

$$\Phi^*(\zeta) = \Phi(\zeta) + \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \log(\zeta - \zeta_k),$$

$$\Pi^*(\zeta) = \Pi(\zeta) + \sum_{k=1}^{n} \Pi_k \log(\zeta - \zeta_k), \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

în care

$$\Phi_k = \frac{F_k}{2\pi i} = \frac{B_k}{2\pi} + \frac{\delta}{1 - \gamma/2}\Pi_k, \quad \Pi_k = \frac{P_k}{2\pi i}. \tag{3}$$

Este clar că prin parcurgerea unui ciclu închis în jurul lui ζ_k, funcțiile $\Phi^*(\zeta)$, $\Pi^*(\zeta)$ nu prezintă nici o creștere deoarece termenii logaritmici au creșterile egale și de semn contrar cu cei ai funcțiilor de reprezentare $\Phi(\zeta)$ și $\Pi(\zeta)$. Așadar funcțiile din (2) sînt olomorfe și uniforme în D.

Prin integrare rezultă funcțiile

$$\varphi(\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi(\zeta)\, d\zeta + \text{const.} = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k [(\zeta - \zeta_k)\log(\zeta - \zeta_k) - (\zeta - \zeta_k)],$$

$$\pi(\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Pi(\zeta)\, d\zeta + \text{const.} = \sum_{k=1}^{n} \Pi_k [(\zeta - \zeta_k)\log(\zeta - \zeta_k) - (\zeta - \zeta_k)], \tag{4}$$

ζ_0 fiind coordonata complexă a unui punct arbitrar fix al domeniului D.

Integralele care apar în ultimele formule reprezintă funcții complexe avînd creșterile $2\pi i\, \varphi_k$, $2\pi i\, \pi_k$, (φ_k și π_k fiind constante) rezultate prin parcurgerea unui ciclu închis. Atunci, aplicînd procedeul de uniformizare dat mai sus vom alege dezvoltările

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} \begin{matrix}\Phi \\ \Pi\end{matrix}(\zeta)\, d\zeta = \sum \frac{\varphi_k}{\pi_k} \log(\zeta - \zeta_k) + \text{ funcție uniformă.} \tag{5}$$

Cu ajutorul formulelor (4) vor rezulta descompunerile

$$\begin{matrix}\varphi \\ \pi\end{matrix}(\zeta) = \zeta \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_k}{\Pi_k} \log(\zeta - \zeta_k) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k \log(\zeta - \zeta_k) + \varphi^*(\zeta)}{p_k \qquad\qquad \pi_*(\zeta)} \tag{6}$$

în care

$$f_k = \varphi_k - \zeta_k \Phi_k, \quad p_k = \pi_k - \zeta_k \Pi_k \tag{7}$$

sînt constante complexe iar $\varphi^*(\zeta)$ și $\pi^*(\zeta)$ funcții olomorfe.

Scanned with OKEN Scanner

Vom mai recurge la formulele de reprezentare (4) din §52 care ne arată, în baza multiformităţilor descrise de (2), că $\Psi(\zeta)$ este olomorfă şi deci

$$\psi(\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Psi(\zeta)\, d\zeta = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \log(\zeta - \zeta_k) + \psi^*(\zeta). \tag{8}$$

ψ_k sînt constante complexe iar $\psi^*(\zeta)$ este o funcţie olomorfă. Integrala funcţiei $\psi(\zeta)$ definită în (5) din § 53 are forma

$$\varkappa(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \{\psi_k \zeta \log(\zeta - \zeta_k) + \varkappa_k \log(\zeta - \zeta_k) + \varkappa^*(\zeta)\}. \tag{9}$$

$\varkappa_k$ sînt constante complexe iar $\varkappa^*(\zeta)$ o funcţie olomorfă.

O dată cu acestea vom analiza consecinţele care decurg din ipoteza că deplasările sînt uniforme. În baza formulelor de mai sus şi conform formulei (5) din § 51 deducem următoarele formule de creştere prin parcurgerea unui ciclu închis :

$$\begin{aligned} \{\mu W\}_{L_k'} &= 2\pi(\varkappa + 1)\,\mathrm{Re}\, i \sum_{k=1}^{n} \Pi_k, \\ \{2\mu U\}_{L_k'} &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \{(\varkappa + 1)\Phi_k \zeta + \varkappa f_k + \overline{\Psi}_k - p_k\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Valorile dintre acolade se obţin prin parcurgerea curbelor L_k' în sens invers mersului acelor de ceasornic. Anulînd termenii care apar în membrul drept din relaţiile (10), rezultă următoarele condiţii de uniformitate

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\, i\,\Pi_k = 0, \quad (p_k = \pi_k - \zeta_k \,\mathrm{Re}\,\Pi_k), \\ &\Phi_k = 0, \quad (f_k = p_k), \quad \varkappa f_k + \overline{\Psi}_k = p_k. \end{aligned} \tag{11}$$

Să mai studiem uniformitatea termenilor care apar în condiţiile la limită. Cu această ocazie vom exprima constantele $(K, c, K', f, \varphi, p, \pi, \psi)_k$ în funcţie de aceşti termeni.

Deoarece s-a considerat un corp multiplu conex, trebuie să se ţină seama de faptul că rezultanta forţelor exterioare de componente X_k, Y_k, Z_k pe conturul L_k, $(k = 1,2, \cdots, n)$, situate de partea normalei exterioare n faţă de domeniul D, se defineşte pe o parte din contur integral situată în D. Eventual această rezultantă este luată pe partea de contur AB situată parţial sau total pe frontiera domeniului D şi aceasta numai dacă funcţiile de reprezentare satisfac anumite condiţii (asupra cărora nu insistăm).

Scanned with OKEN Scanner

Fie acum subdomeniul de contur L_k. Fie de asemenea linia închisă L_k' incluzînd conturul L_k, situată în D. În baza condiției de echilibru a forțelor aplicate în acest domeniu, este clar că rezultanta pe L_k este egală cu cea aplicată pe L_k' (efectele de polarizare neavînd o influență asupra mărimii acestora ci numai asupra cuplului lor). Atunci vom putea înlocui în expresia pentru forțele rezultante forțele de pe L_k prin forțele de pe L_k'. Menționăm că L_k' poate fi arbitrar ales, eventual foarte apropiat de L_k.

Formulele de creștere pentru efortul complex $X + iY$ și Z se scrie cu ajutorul relațiilor (9) din § 52 și (2) din § 53 în modul următor

$$X_k + iY_k = -2\pi\{\partial[\varepsilon\cdot\Phi_k - \overline{\Phi}_k - \delta(\Pi_k - \overline{\Pi}_k)] + \varepsilon f_k - \overline{\Psi}_k - (\varkappa + 2\gamma)\, p_k\},$$

$$Z_k = -2\pi\,(\varkappa + 1 + 2\gamma)\, h\mathrm{Re}\,\Pi_k/2k. \tag{12}$$

De data aceasta sensul de parcurgere pe L_k' este cel al acelor de ceasornic, deoarece încărcările trebuie să acționeze în dreapta sensului de parcurgere al conturului. Aplicînd (11) rezultă că membrul drept din $(12)_1$ se mai scrie astfel

$$-2\pi\,\{(\varkappa + \varepsilon)\,\varphi_k - (\varkappa + 1 + 2\gamma)\, p_k\}. \tag{13}$$

Rezultă următoarele dependențe a constantelor de eforturile rezultante :

$$\mathrm{Re}\,\Pi_k = -kZ_k/2\pi\,(1+\delta)\,h, \quad \varphi_k = -\frac{X_k + iY_k}{2\pi(\varkappa+\varepsilon)} + \left(1 + \frac{4\gamma}{\varkappa+\varepsilon}\right) p_k,$$

$$\psi_k = \varkappa\,\frac{X_k - iY_k}{2\pi\,(\varkappa+\varepsilon)} - \left(\varkappa - 1 + \frac{4\gamma\varkappa}{\varkappa+\varepsilon}\right)\overline{p}_k. \tag{14}$$

În baza formulei (4) din § 53 se poate stabili creșterea funcției momentului $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ în urma parcurgerii unui ciclu închis pe L_k :

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{N} = -2\pi\,\mathrm{Re}\,i\,\{\varkappa_k - \partial\bar{\partial}\,[\Phi_k - (1+2\delta)\,\Pi_k]\}. \tag{15}$$

Sensul ales de parcurgere ale conturului L_k' este acel al mersului acelor de ceasornic. Se deduce, conform condițiilor de uniformitate (11) ale deplasărilor și (13) ale tensiunilor, expresia constantei

$$\mathrm{Re}\,i\varkappa_k = -\frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{N}}{2\pi}. \tag{16}$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 56. Funcțiile de reprezentare într-un domeniu infinit

În cazul plăcilor cu goluri ale căror dimensiuni maxime sînt foarte reduse în raport cu dimensiile corpului, se poate aproxima cîmpul elastic de tensiune prin cîmpul corespunzător unui corp infinit cu golurile respective, bineînțeles cu respectarea unor condiții la limită adecvate. În cele ce urmează ne vom limita la acest caz.

Fie astfel un domeniu multiplu conex cu contururi simple închise $L_1, \ldots, L_n$, conturul L_{n+1} care închide toate celelalte contururi fiind situat în întregime în punctul de la infinit.

Pentru a indica comportarea funcțiilor de reprezentare la infinit, vom considera un cerc L_R cu rază suficient de mare astfel ca să includă toate liniile L_k. În acest caz, pentru orice punct z_0 exterior lui L_R și orice punct z_{0k} interior unui contur L_k, va fi îndeplinită condiția

$$|z_0| < |z_{0k}| \tag{1}$$

astfel că va fi îndeplinită și condiția

$$\log(z_0 - z_{0k}) = \log z_0 + \log(1 - z_{0k}/z_0) = \log z_0 + f(z_0), \tag{2}$$

$f(z_0)$ fiind o funcție olomorfă în afara cercului L_R. Conform relațiilor (6), (8) și (11) din § 55 deducem formulele

$$\begin{aligned} &\varphi(z_0) = f \log z_0 + \varphi^{**}(z_0), \qquad \psi(z_0) = \psi \log z_0 + \varphi^{**}(z_0), \\ &\pi(z_0) = (z_0 \Pi + p) \log z_0 + \pi^{**}(z_0). \end{aligned} \tag{3}$$

Am notat

$$f = \sum_{k=1}^{n} f_k, \qquad \psi = \sum_{k=1}^{n} \psi_k, \qquad \pi = \sum_{k=1}^{n} \pi_k, \qquad p = \sum_{k=1}^{n} p_k. \tag{4}$$

Funcțiile $\varphi^{**}(z_0)$, $\psi^{**}(z_0), \ldots$ sînt olomorfe în exteriorul cercului L_R, exceptînd eventual punctul de la infinit, o funcție olomorfă în acest domeniu putînd a fi dezvoltată în serie de forma (6) din § 39. Atunci, în baza cunoscutei teoreme a lui Laurent, funcțiile $\varphi^{**}(z_0)$, $\psi^{**}(z_0)$ și $\pi^{**}(z_0)$ pot fi dezvoltate în serii de forma

$$\varphi^{**}(z_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z_0^n, \qquad \psi^{**}(z_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n' z_0^n, \qquad \pi^{**}(z_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n'' z_0^n. \tag{5}$$

Aceste serii converg uniform în orice domeniu finit exterior cercului L_R. Într-adevăr, deoarece teorema lui Laurent arată că o funcție $f(z_0)$ este dez-

voltabilă în serie de puteri $f(\zeta)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n\zeta^n$ în interiorul coroanei circulare mărginită de cercurile concentrice L_1, L_2 dacă este olomorfă în acel domeniu, rezultă, dacă L_1 tinde către L_R iar L_2 devine infinit de mare, cazul considerat mai sus.

Deoarece se presupune că mediul material se întinde la infinit, apare justificat de a admite că la infinit cîmpul de tensiuni rămîne mărginit. Atunci va trebui să precizăm restricția corespunzătoare ce trebuie adusă funcțiilor $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ și $\pi(\zeta)$. În acest scop vom utiliza (4) din § 52 în care substituim expresiile furnizate de (3) și (5). Se obține formula

$$T_{xy}=2\left\{\frac{\varepsilon f-\delta p}{\zeta}+\frac{\bar f-\delta\bar p}{\bar\zeta}-\delta[(\pi+\bar\pi)(1+\log r)+i(\pi-\bar\pi)\theta]+\right.$$

$$\left.+\sum_{-\infty}^{\infty} n\left[(\varepsilon a_n-\delta a_n'')\zeta^{n-1}+(\bar a_n-\delta\bar a_n'')\bar\zeta^{n-1}\right]\right\}. \qquad (6)$$

Deoarece condiția de mărginire la infinit pentru tensiuni nu este respectată de termenii logaritmici și cei incluși în ultimele serii ale membrului drept, începînd cu valorile $n=2$, serii care se mai scriu cu ajutorul variabilelor polare $(r,\ \theta)$ astfel

$$\sum_{r=2}^{\infty} nr^{n-1}\{[\varepsilon a_n-\delta a_n'']\,e^{(n-1)i\theta}+[\bar a_n-\delta\bar a_n'']e^{-(n-1)i\theta}\} \qquad (7)$$

va trebui, conform relațiilor (11) din § 55, să avem

$$\Pi=\overline{\Pi}=0, \qquad \varepsilon a_n-\delta a_n''=\bar a_n-\delta\bar a_n''=0, \qquad (a_n=a_n''=0). \qquad (8)$$

În mod analog, cu ajutorul primei formule din (4), § 52, se deduce, pentru ca tensiunile să fie mărginite la infinit, condiția ca seria

$$\sum_{n=2}^{\infty} nr^{n-1}e^{(n-1)i\theta}a_n' \qquad (9)$$

să fie mărginită și deci ca

$$a_n'=0, \qquad (n\geqslant 2). \qquad (10)$$

În mod reciproc se poate arăta că tensiunile sînt mărginite dacă relațiile precedente sînt satisfăcute. Se obțin atunci următoarele expresii ale funcțiilor (5) și a coeficienților termenilor liniari ai acestora

$$\varphi^{**}(\zeta)=\Gamma\zeta+\varphi_0(\zeta), \qquad \psi^{**}(\zeta)=\Gamma'\zeta+\psi_0(\zeta), \qquad \pi^{**}(\zeta)=\Gamma''\zeta+\pi_0(\zeta),$$

$$a_1=\Gamma=B+iC, \qquad a_1'=\Gamma'=B'+iC', \qquad a_1''=\Gamma''=B''+iC'' \qquad (11)$$

iar funcțiile $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ și $\pi_0(\zeta)$ sînt olomorfe în exteriorul cercului L_R inclusiv punctul de la infinit și sînt, pentru ζ suficient de mare, dezvoltabile în serie.

Pe baza determinării stabilite a funcțiilor de reprezentare din (8), § 54, se va putea lua

$$\varphi_0(\infty) = \psi_0(\infty) = 0, \qquad \pi_0(\infty) = 0,$$
$$\operatorname{Im} \varphi_0'(\infty) = \gamma K, \qquad \pi_0'(0) = 0, \qquad \pi_0'(\infty) = 0, \tag{12}$$

sau

$$a_0 = a_0' = 0, \qquad a_0'' = 0, \qquad C = \gamma K, \qquad \Gamma'' = 0. \tag{13}$$

Așadar C este arbitrar iar Γ'' poate fi neglijat.

Dacă se analizează (6) și (11) pentru ζ tinzînd la infinit, se deduce relația

$$\lim T_{xy} = 4[((1+\varepsilon)/2)\, B - \delta B'' - i(1-\varepsilon)\, C/2]. \tag{14}$$

În mod analog se mai deduc din (4), § 52, valorile limită ale celorlalte componente ale tensorului complex al tensiunilor

$$-\lim \overline{T}_{xx} = 2\Gamma', \qquad \lim T_{zz} = 0,$$
$$\lim T_{zz} = 2\operatorname{Re}\{(1+\varepsilon)\,\nu\Gamma + (\varkappa + 1 + 2\nu(1-\gamma)\,\Gamma''\} \tag{15}$$

și deci tensiunile reale tind către valorile la infinit

$$\sigma_{xx}(\infty) = 2[((1+\varepsilon)/2)\, B - \delta B''] - B',$$
$$\sigma_{yy}(\infty) = 2[((1+\varepsilon)/2)\, B - \delta B''] + B', \qquad \sigma_{xy}(\infty) = C' + (1-\varepsilon)\, C,$$
$$\sigma_{yx}(\infty) = C' - (1-\varepsilon)\, C, \qquad \sigma_{xz}(\infty) = \sigma_{yz}(\infty) = 0, \tag{16}$$
$$\sigma_{zz}(\infty) = 2[(1+\varepsilon)\,\nu B + (\varkappa + 1 + 2\nu(1-\gamma)\, B''].$$

Conform relațiilor (21) din § 49, privind corelația între componentele tensorului tensiunii și valorile tensiunilor principale N_1 și N_2 care, în cazul de față le considerăm la infinit, vor decurge din (14) și (15) expresiile constantelor

$$B = \varepsilon_1(\sigma_1 + \sigma_2)/4 + \varepsilon_2\sigma_3/8, \qquad (1-\varepsilon)\,C = T = \sigma_{[xy]}(\infty),$$
$$\varepsilon_1 = 2\,\frac{\varkappa + 1 + 2\nu(1-\gamma)}{(1+\varepsilon)(\varkappa+1)(1+\nu)}, \qquad \varepsilon_2 = 4\,\frac{\varkappa - 1 + 2\gamma}{(1+\varepsilon)(\varkappa+1)(1+\nu)}, \tag{17}$$
$$\Gamma' = (\sigma_2 - \sigma_1)\, e^{-2i\nu}/2, \qquad B'' = \frac{\sigma_3 - \nu(\sigma_1+\sigma_2)}{2(\varkappa+1)(1+\nu)}.$$

ν reprezintă unghiul format de axa principală asociată tensiunii N_1 cu axa Ox iar $\sigma_3 = \sigma_{zz}(\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama de (3) și (11), reprezentarea (5) din § 51 ne conduce la următoarea expresie asimptotică a deplasărilor complexe

$$W = W^* + (\varkappa + 1)\,\mathrm{Re}\,\Gamma''/\mu + \ldots$$
$$2\mu U = 2\mu U^{**} + (\varkappa f - \psi)\log\zeta + (\varkappa\Gamma - \overline{\Gamma} - \Gamma'' - \overline{\Gamma}'')\zeta - \overline{\Gamma}'\bar{\zeta} + \ldots. \tag{18}$$

Termenii nescriși sînt mărginiți la infinit. Deplasările sînt mărginite la infinit dacă, în concordanță cu (13) și (16) din § 55,

$$X = Y = Z = 0, \qquad \Gamma = \Gamma' = 0, \qquad \Gamma'' = 0. \tag{19}$$

După cum a rezultat și în cazul relațiilor (11), funcțiile $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ și $\pi_0(\zeta)$ sînt olomorfe deoarece au forma funcțiilor din (5). În cazul în care există un singur contur L, funcțiile $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ și $\pi_0(\zeta)$ vor fi olomorfe în tot domeniul D dacă luăm originea coordonatelor în afara acestui domeniu și deci în interiorul conturului L. Aceasta rezultă observînd că dacă punem în (5), (6) din § 55 $\zeta = 0$ și înlocuim $\varphi^*(\zeta)$, $\psi^*(\zeta)$, $\pi^*(\zeta)$ prin $\varphi^{**}(\zeta)$, $\psi^{**}(\zeta)$, $\pi^{**}(\zeta)$, rezultă (3). Dar $\varphi^*(\zeta)$, $\psi^*(\zeta)$ și $\pi^*(\zeta)$ sînt olomorfe în tot domeniul, exceptînd eventual punctul de la infinit. În baza acestei din urmă proprietăți se justifică afirmația dată mai sus.

§ 57. Reprezentări în coordonate rectangulare

Vom presupune că tensiunile sînt raportate la un sistem de coordonate rectangulare considerat și în cele precedente. Printr-o transformare de coordonate de la acest sistem la altul de asemenea rectangular, formulele de reprezentare suferă însă unele modificări care vor fi analizate în acest paragraf.

În cazul translației originii într-un punct $\zeta_0 = x_0 + iy_0$ variabilele $\zeta = x + iy$, $\zeta_1 = x_1 + iy_1$ asociate aceluiași punct în cele două sisteme se transformă astfel $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1$.

Vom nota prin $\Phi^0(\zeta)$ și $\Psi^0(\zeta)$ noile funcții. În baza formulelor de reprezentare (4) din § 52, ținînd seama de faptul că tensiunile rămîn neschimbate, va trebui să avem

$$\varepsilon\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \delta(\Pi(\zeta) + \overline{\Pi(\zeta)}) = \varepsilon\Phi^0(\zeta - \zeta_0) + \overline{\Phi^0(\zeta - \zeta_0)} - \\ - \delta(\Pi^0(\zeta - \zeta_0) + \overline{\Pi^0(\zeta - \zeta_0)}),$$
$$\bar{\zeta}[\Phi'(\zeta) + \Pi'(\zeta)] + \Psi(\zeta) = (\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)[\Phi^{0\prime}(\zeta - \zeta_0) + \\ \Pi^{0\prime}(\zeta - \zeta_0)] + \Psi^0(\zeta - \zeta_0), \qquad \Pi'(\zeta) = \Pi^{0\prime}(\zeta - \zeta_0), \tag{1}$$
$$\nu\,\mathrm{Re}[(1+\varepsilon)\Phi(\zeta) - 2\delta\Pi(\zeta)] + 2(\varkappa+1)(1+\nu)\,\mathrm{Re}\,\Pi(\zeta) = \\ = \nu\,\mathrm{Re}\{(1+\varepsilon)\Phi^0(\zeta-\zeta_0) - 2\delta\Pi^0(\zeta-\zeta_0)\} + 2(\varkappa+1)(1+\nu)\,\mathrm{Re}\,\Pi^0(\zeta-\zeta_0)$$

Scanned with OKEN Scanner

şi deci

$$\Phi(\zeta) = \Phi(\zeta - \zeta_0),\ \Psi(\zeta) = \Psi^0(\zeta - \zeta_0) - \overline{\zeta}[\Phi^{0\prime}(\zeta - \zeta_0) + \Pi^{0\prime}(\zeta - \zeta_0)],\ \Pi(\zeta) = \Pi(\zeta - \zeta_0). \tag{2}$$

Prin urmare rezultă că

$$\varphi(\zeta) = \varphi^0(\zeta - \zeta_0),\ \psi(\zeta) = \psi^0(\zeta - \zeta_0) - \overline{\zeta}_0\,\varphi^0(\zeta - \zeta_0),\ \pi(\zeta) = \pi^0(\zeta - \zeta_0). \tag{3}$$

Am neglijat constantele de integrare, constante care nu intervin în expresiile tensiunilor.

Vom mai considera rotaţia axelor corespunzătoare transformării de coordonate

$$x = x_1 \cos\nu - y_1 \sin\nu,\ y = y_1 \cos\nu + x_1 \sin\nu, (\zeta = \zeta_1 e^{i\nu}). \tag{4}$$

Reprezentările (4) din § 52, relaţiile (6) din § 28 şi (9), din § 54, conduc la următoarele condiţii de invarianţă ale tensiunilor pentru transformările de coordonate (4):

$$\varepsilon\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \delta(\Pi(\zeta) + \Pi(\zeta)) = \varepsilon\Phi^0(\zeta e^{-i\nu}) + \overline{\Phi^0(\zeta e^{-i\nu})} - \delta[\Pi^0(\zeta e^{-i\nu}) + \overline{\Pi^0(\zeta e^{-i\nu})}],$$

$$\{\overline{\zeta}[\Phi'(\zeta) + \Pi'(\zeta)] + \Psi(\zeta)\}\, e^{2i\nu} = \overline{\zeta}\, e^{i\nu}[\Phi^0(\zeta e^{-i\nu}) + \Pi^0(\zeta e^{-i\nu})]' + \Psi(\zeta e^{-i\nu}) \tag{5}$$

şi deci

$$\Phi(\zeta) = \Phi^0(\zeta e^{-i\nu}),\ \Pi(\zeta) = \Pi^0(\zeta e^{-i\nu}),$$

$$\Psi(\zeta) = \Psi^0(\zeta e^{-i\nu})\, e^{-2i\nu}.$$

Prin integrare decurg formulele

$$\varphi(\zeta) = \varphi^0(\zeta e^{-i\nu}),\ \pi(\zeta) = \pi^0(\zeta e^{-i\nu}),\ \varkappa(\zeta) = \varkappa^0(\zeta e^{-i\nu}). \tag{7}$$

În cele precedente s-au omis constantele de integrare deoarece nu au efect asupra intensităţii tensiunilor.

Scanned with OKEN Scanner

§ 58. Reprezentări în cazul coordonatelor polare

În cazul coordonatelor polare a căror origine coincide cu aceea a sistemului de coordonate rectangulare, axa Ox fiind axa polară, vom avea relația din (1), § 28, relativă la variabila complexă în care $\rho = r$ reprezintă lungimea vectorului de poziție iar ν unghiul format de acest vector cu axa Ox.

Fie un punct $M(r, \theta)$, din figura 78, raza vectoare a punctului și un cerc $r = \text{const}$. Componentele deplasării în coordonate polare vor fi proiecțiile vectorului deplasării pe axele r și θ : u_r, u_θ. Atunci u, v componente ale deplasării în coordonate carteziene (x, y) depind de u_r, u_θ conform relațiilor

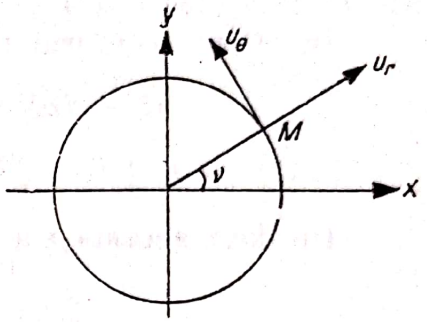


Fig. 78

$$\begin{aligned} u &= u_r \cos \nu - u_\theta \sin \nu, \\ v &= u_r \sin \nu + u_\theta \cos \nu \end{aligned} \tag{1}$$

astfel că

$$2\mu (u_r + i u_\theta) = 2\mu U \, e^{-i\nu}. \tag{2}$$

Componentele tensiunii în coordonate polare se vor defini în același mod, prin descompunerea tensorului tensiunii în raport cu axele r și θ. Vom nota prin σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta r}$ tensiunile normale pe suprafețele $\theta = \text{const.}$, $r = \text{const.}$, respectiv tensiunile longitudinale pe fața $\theta = \text{const.}$, $r = \text{const.}$

Observînd că $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ este un invariant în raport cu transformările de coordonate, vom avea, cu ajutorul formulelor (2) din § 52,

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = T_{(xy)}. \tag{3}$$

Analog, deoarece $\sigma_{xy} - \sigma_{yx}$ este un invariant, rezultă că

$$\sigma_{r\theta} - \sigma_{\theta r} = i T_{[xy]}. \tag{4}$$

Conform relațiilor de transformare ale tensiunilor complexe (20) din § 49 mai rezultă condițiile

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + i(\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}) = - e^{2i\nu} \overline{T}_{xx}. \tag{5}$$

Scăzînd unul dintr-altul membrii ecuațiilor (4) și (5) vom avea

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{(r\theta)} = (T_{(xy)} + e^{2i\nu} \overline{T}_{xx})/2. \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ultimele două ecuații mai rezultă următoarea :

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{\theta r} = \sigma_{rr} - i(\sigma_{(r\theta)} + \sigma_{[\theta r]}) =$$

$$= \frac{1}{2}[\overline{T}_{xy} + e^{2i\nu}\overline{T}_{xx}] = N - iT. \tag{7}$$

Am aplicat (14) din § 52.

În sfîrșit, conform relațiilor (4), (7) din § 52,

$$\sigma_{zr}^{+} + i\sigma_{z\theta}^{+} = (\sigma_{zx} + i\sigma_{zy})\, e^{-i\nu} = T_{zx}^{+}\, e^{-i\nu},$$

$$T_z = \sigma_{zr}^{+} = \mathrm{Re}\, T_{zx}^{+}\, e^{-i\nu}. \tag{8}$$

De data aceasta s-a aplicat (15) din § 52.

§ 59. Transformarea reprezentărilor problemei mediane

Vom arăta că în cazurile particulare reductibile la ecuații în care apar funcții de variabilă complexă ca funcții necunoscute, este posibilă utilizarea procedeului transformării conforme. Astfel, fie transformarea de variabilă complexă

$$\zeta = f(\zeta),\ \zeta = \xi + i\eta. \tag{1}$$

Vom nota

$$\varphi(\zeta) = \varphi(f(\zeta)),\ \psi(\zeta) = \psi(f(\zeta),\ \pi(\zeta) = \pi(f(\zeta)), \tag{2}$$

$$\Phi(\zeta) = \frac{\partial\varphi(\zeta)}{\partial\zeta} = \frac{\varphi'(\zeta)}{f'(\zeta)},\quad \Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{f'(\zeta)},\quad \Pi(\zeta) = \frac{\pi'(\zeta)}{f'(\zeta)}.$$

Relațiile (1) și (2) permit transcrierea formulelor relative la :
— reprezentarea complexă a deplasărilor (5) din § 51,
— condițiile la limită pentru $X + iY$, Z (2) din § 53,
— momentul principal al tensiunilor (4) din § 53, în spațiul ζ.

Observăm că rotațiile ω sînt independente de transformările coordonatelor în plan.

Deplasările, în baza formulei demonstrate anterior în (6) din § 18, se transcriu astfel :

$$W = \frac{\varkappa + 1}{\mu}\,\mathrm{Re}\,\pi'(\zeta)/f'(\zeta)$$

$$2\mu U = \varkappa\varphi(\zeta) - \frac{f(\zeta)}{\overline{f'(\zeta)}}(\varphi'(\zeta) + \overline{\pi'(\zeta)}) - \overline{\varphi(\zeta)} - \pi(\zeta) \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci, aplicînd (9) din § 18, se deduce o legătură între $u_\rho + iu_\theta$ și funcțiile de reprezentare: $u_\rho + iu_\theta = \frac{\overline{\zeta}}{\rho}\frac{\overline{f'(\zeta)}}{|f'(\zeta)|}U$.

Pentru stabilirea formulelor pentru tensiuni în coordonate curbilinii, vom utiliza scrierea componentelor în raport cu sistemul de coordonate $(\rho, \theta) = (x', y')$ și vom utiliza relațiile (3) — (8) din § 58, între aceste componente și cele carteziene date de (4) din § 52 și (6)—(9) din § 58

$$\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\theta\theta} + 2i\,\sigma_{[\rho\theta]} = 2(\varepsilon\overline{\Phi(\zeta)} + \Phi(\zeta)) - \delta(\Pi(\zeta) + \overline{\Pi(\zeta)}),$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\rho\rho} + 2i\,\sigma_{(\rho\theta)} = 2\frac{\zeta^2}{\rho^2\overline{f'(\zeta)}}[\overline{f(\zeta)}(\Phi'(\zeta) + \Pi'(\zeta)) + f'(\zeta)\Psi(\zeta)],$$

$$\sigma^+_{z\rho} - i\sigma^+_{z\theta} = (1+\delta)\frac{h}{k}\frac{\zeta}{\rho}\frac{\Pi'(\zeta)}{|f'(\zeta)|}, \tag{4}$$

$$\sigma_{zz} = 2\,\mathrm{Re}\,\{(1+\varepsilon)\,\nu\Phi(\zeta) + [\varkappa + 1 + 2\nu(1-\gamma)]\,\Pi(\zeta)\}f'(\zeta).$$

Am aplicat de asemenea relația (5) din § 18, conform căreia avem

$$e^{2i\theta} = \frac{\zeta^2}{\rho^2}\frac{f'^2(\zeta)}{|f'(\zeta)|^2} = \frac{\zeta^2}{\rho^2}\frac{f'(\zeta)}{\overline{f'(\zeta)}}. \tag{5}$$

Prin scăderea termenilor primelor două relații din (4) se obține o formulă utilă pentru aplicații, formulă pe care o menționăm împreună cu cea care rezultă din ultima relație din (4) și (7) din § 52

$$\sigma_{\rho\rho} - i\sigma_{\theta\rho} = \varepsilon\overline{\Phi(\zeta)} + \Phi(\zeta) - \delta(\Pi(\zeta) + \overline{\Pi(\zeta)}) -$$

$$- \frac{\zeta^2}{\rho^2\overline{f'(\zeta)}}[\overline{f(\zeta)}\,(\Phi'(\zeta) + \Pi'(\zeta)) + f'(\zeta)\,\Psi(\zeta)],$$

$$\sigma_{\theta\theta} + i\sigma_{\rho\theta} = \varepsilon\overline{\Phi(\zeta)} + \Phi(\zeta) - \delta(\Pi(\zeta) + \overline{\Pi(\zeta)}) +$$

$$+ \frac{\zeta^2}{\rho^2 f'(\zeta)}[\overline{f(\zeta)}\,(\Phi'(\zeta) + \Pi'(\zeta)) + f'(\zeta)\,\Psi(\zeta)] \tag{6}$$

$$\sigma^+_{z\rho} = T^+_z = \sigma^+_{zz}\cos\nu + \sigma^+_{zy}\sin\nu = \mathrm{Re}\,(\sigma_{z\rho} - i\sigma_{z\theta})^+ e^{i\theta} =$$

$$= (1+\delta)\frac{h}{k}\,\mathrm{Re}\,\frac{\zeta^2}{\rho^2}\frac{f'(\zeta)}{|f'(\zeta)|^2}\Pi'(\zeta).$$

Aceste formule extind cele stabilite de G. V. Kolosov din teoria simetrică a problemei plane [1].

În cazul unui domeniu infinit reprezentat conform pe un domeniu infinit Δ astfel ca punctului $\zeta=\infty$ să-i corespundă punctul $z = \infty$, vom

Scanned with OKEN Scanner

avea, conform relațiilor (3), (11) din § 56 și (14) din § 55, în care presupunem ζ foarte mare:

$$\varphi(\zeta) = \left[-\frac{X+iY}{2\pi} + (\varkappa+1+2\gamma)p\right]\frac{\log\zeta}{\varkappa+\varepsilon} + \Gamma\zeta + \varphi_1^0(\zeta),$$

$$\psi(\zeta) = \left[\varkappa\frac{X-iY}{2\pi(\varkappa+\varepsilon)} - \left(\varkappa-1+\frac{4\gamma\varkappa}{\varkappa+\varepsilon}\right)\overline{p}\right]\log\zeta + \Gamma'\zeta + \psi_1^0(\zeta), \quad (7)$$

$$\pi(\zeta) = -k\frac{Z}{\pi(\varkappa+1+2\gamma)h}\zeta\log\zeta + p\log\zeta + \Gamma''\zeta + \pi_1^0(\zeta),$$

în care φ_1^0, ψ_1^0 și π_1^0 reprezintă funcții olomorfe pentru $\zeta = \infty$. Dacă $|\zeta|$ și $|\zeta|$ sînt suficient de mari, rezultă, conform § 17, punctul β, dezvoltarea

$$\zeta = f(\zeta) = R\zeta + c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \cdots \quad (8)$$

astfel că formulele de reprezentare pot fi scrise în modul următor:

$$\varphi(\zeta) = \left[-\frac{X+iY}{2\pi} + (\varkappa+1+2\gamma)p\right]\frac{\log\zeta}{\varkappa+\varepsilon} + R\Gamma\zeta + \varphi_0(\varkappa),$$

$$\psi(\zeta) = \left[\varkappa\frac{X-iY}{2\pi(\varkappa+\varepsilon)} - \left(\varkappa-1+\frac{4\gamma\varkappa}{\varkappa+\varepsilon}\right)\overline{p}\right]\log\zeta + R\Gamma'\zeta + \psi_0(\zeta), \quad (9)$$

$$\pi(\zeta) = -k\frac{Zf(\zeta)\log\zeta}{\pi(\varkappa+1+2\gamma)h} + p\log\zeta + R\Gamma''\zeta + \pi_0(\zeta)$$

în care φ^0, ψ^0 și π^0 sînt funcții olomorfe pentru $\zeta = \infty$. Semnalăm că va trebui să considerăm $Z = 0$ dacă la infinit tensiunile rămîn mărginite, conform condițiilor (8) din § 56.

§ 60. Condițiile la limită în domeniul transformat

Vom transcrie de asemenea condițiile la limită pentru tensiuni (2) din § 53, în care ținem seama de (9) din § 52, în cadrul primei probleme fundamentale

$$\varepsilon\varphi(\sigma) + \frac{f(\sigma)}{\overline{f'(\sigma)}}\overline{[\varphi'(\sigma) - \delta\pi'(\sigma)]} + \overline{\psi(\sigma)} - (1+2\delta)\pi(\sigma) +$$

$$+ (1+\delta)\frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)}\pi'(\sigma) = f_1 + if_2 + \text{const.}, \quad (1)$$

$$(1+\delta)\frac{h}{2k}\left[\frac{\pi'(\sigma)}{f'(\sigma)} - \overline{\frac{\pi'(\sigma)}{f'(\sigma)}}\right] = if_3, \text{ (pe } \gamma),$$

Scanned with OKEN Scanner

γ este conturul în planul transformat asociat lui L și anume cercul $\rho = |\zeta| = 1$. $\sigma = e^{i\theta}$ corespunde unui punct pe γ. S-a notat

$$f_1 + if_2 = i(X + iY) = i\int_A^B \left[T_x + i\,T_y + 2\partial\frac{k}{h}\,T_z\right] ds,$$

$$if_3 = iZ = i\int_A^B T_z\,ds. \tag{2}$$

Conform relațiilor menționate, (2) sînt funcții date de punctul t pe conturul L. Deoarece între variabilele t pe contur și σ pe conturul γ are loc dependența biunivocă $t = f(\sigma)$, rezultă că (2) sînt funcții date de σ, de asemenea date.

Dacă se utilizează formulele (6) din § 59, se obțin condițiile pe cercul γ pentru prima problemă fundamentală:

$$\varepsilon\overline{\Phi(\sigma)} + \Phi(\sigma) - \delta(\Pi(\sigma) + \overline{\Pi(\sigma)}) -$$

$$-\frac{\sigma^2}{f'(\sigma)}\left[\overline{f(\sigma)}\,(\Phi'(\sigma) + \Pi'(\sigma)) + f'(\sigma)\,\Psi(\overline{\sigma})\right] = \sigma_{\rho\rho} - i\sigma_{0\rho}, \tag{3}$$

$$(1+\delta)\frac{h}{k}\,\mathrm{Re}\,\sigma^2\frac{f'(\sigma)}{|f'(\sigma)|^2}\,\Pi'(\sigma) = \sigma_{i\rho}^{+},\ (\gamma)$$

iar din (3), § 59, rezultă condițiile asociate celei de-a doua probleme fundamentale

$$\varkappa\varphi(\sigma) - \frac{f(\sigma)}{\overline{f'(\sigma)}}(\varphi'(\sigma) + \overline{\pi'(\sigma)}) - \overline{\psi(\sigma)} - \pi(\sigma) = 2\mu(g_1 + ig_2), \tag{4}$$

$$(\varkappa + 1)\,\mathrm{Re}\,\pi'(\sigma)/f'(\sigma) = 2\mu g_3,\ (\gamma).$$

S-a notat

$$g_1 + ig_2 = U,\ 2g_3 = W. \tag{5}$$

În cazul unui domeniu dublu conex mărginit de liniile L_1 și L_2, se poate de asemenea utiliza reprezentarea pe cercul unitate.

§ 61. Distorsiune multiformă și dislocației

Vom presupune satisfăcute condițiile de uniformitate menționate anterior pentru cîmpul elastic tensorial, starea de tensiune și vom presupune în schimb o neuniformitate a cîmpului de deplasări. Această neuniformitate corespunde unor mișcări însoțite de dislocații în materiale tehnice sau în cristale, avînd o semnificație fizică determinată.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece în cazul domeniului simplu conex deplasările sînt uniforme, vom presupune, pentru a studia neuniformităţile acestora, un corp multiplu conex, ca în figura 79, în care apar o serie de contururi închise L_k, $(k = 1, \ldots n,\ n+1)$ iar $L_{n+1} = L$ incluzînd pe celelate.

Deoarece în deducerea formulelor (2)—(7) din § 55, pentru domeniul multiplu conex, formule relative la funcţiile complexe de reprezentare, nu au intervenit restricţii privind uniformitatea lor decît ulterior în (11), § 55, aceste formule continuă să fie valabile.

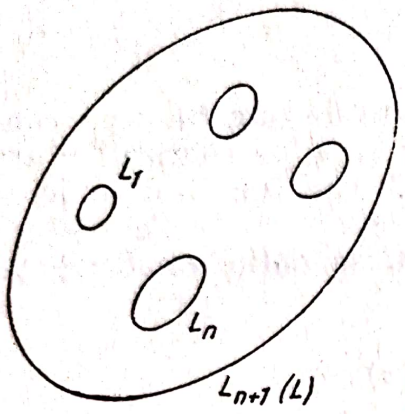


Fig. 79

Studiul multiformităţii deplasărilor se face recurgînd la o serie de tăieturi $a_k'' - b_k''$, $(k = 1, \ldots, n)$, care se limitează la capete cu conturele $L_1, \ldots, L_n$, pe de o parte şi cu L_{n+1} pe de altă parte, fără a se intersecta. Domeniul rezultat va fi simplu conex iar funcţia de reprezentare uniformă odată cu deplasările. Marginile tăieturilor vor fi distinse cu ajutorul indicilor superiori formaţi cu semnele $+, -$, astfel ca, parcurgînd conturul în sens contrar acelor de ceasornic de la un punct (x, y) al marginii $(-)$ a tăieturiii $a_k - b_k$ la punctul corespunzător situat pe marginea $(+)$ al aceleiaşi tăieturi (de aceleaşi coordonate), să rămînă în domeniul tăieturii.

Formulele stabilite anterior, relative la creşterile deplasărilor şi anume (10) din § 55, permit, pentru cazul de mai sus, formulările următoare

$$W^+ - W^- = \frac{\pi i}{\mu}(\varkappa + 1)\,[\Pi_k - \overline{\Pi}_k], \tag{1}$$

$$u^+ - u^- + i\,(v^+ - v^-) = \frac{\pi i}{\mu}\{(\varkappa + 1)\,\Phi_{k\delta} + \varkappa f_k + \overline{\psi}_k - p_k\},$$

unde $u^{\pm}, v^{\pm}$ sînt componentele deplasării în punctele marginii $(+)$ sau $(-)$ avînd coordonatele (x, y).

Ţinînd seama de (3) din § 55 şi luînd $f_k = a_k + ib_k$, $\psi_k = a_k' + ib_k'$, $p_k = a_k'' + ib_k''$, rezultă relaţiile între mărimile reale echivalente celor complexe de mai sus

$$u^+ - u^- = d_k x - c_k y + a_k^0,\quad v^+ - v^- = c_k x + d_k y + b_k^0,\quad w^+ - w^- = c_k^0 \tag{2}$$

în care apar constantele denumite *caracteristici* de dislocaţie

$$c_k = \frac{\pi}{\mu}(\varkappa + 1)\,\mathrm{Re}\,\Phi_k, \qquad d_k = -\frac{\pi}{\mu}(\varkappa + 1)\,\mathrm{Im}\,\Phi_k =$$

$$= \frac{\pi}{\mu}(\varkappa + 1)\,\frac{2\delta}{1+\varepsilon}\,\mathrm{Re}\,i\Pi_k = \frac{4\delta}{1+\varepsilon}\,c_k^0, \tag{3}$$

$$a_k^0 = \frac{\pi}{\mu}[-\varkappa b_k + b_k' + b_k''], \qquad b_k^0 = \frac{\pi}{\mu}[\varkappa a_k + a_k' - a_k''].$$

Scanned with OKEN Scanner

Cantitățile din (3) constituie $5n \times 2$ caracteristici ale dislocației. Pentru claritate dăm mai jos interpretarea multiformității deplasărilor, care intervin parțial și în teoria clasică a elasticității *) și care constituie un model de dislocație în mediul continuu deformabil**).

Astfel, pentru construcția unor deplasări multiforme conform figurii 80, putem presupune că în dreptul fiecărei tăieturi $a_k - b_k$ practicată într-una din componentele materiale, s-au sudat marginile corpului inițial în $a'_k - b'_k$, $a''_k - b''_k$ (presupuse congruente) după înlăturarea fîșiei cuprinse între acestea (presupuse foarte subțiri). Această sudură se face suprapunînd $a''_k - b''_k$ peste $a'_k - b'_k$ printr-o translație rigidă relativă a acestora (a^0_k, b^0_k, c^0_k), o dilatare plană $d_k \pm 2\delta c^0_k/(1 - \gamma/2)$ relativă și o rotație rigidă relativă a lor de unghi c_k (putem presupune că o margine, de exemplu $a'_k - b'_k$, rămîne fixă astfel că $u^- = v^- = 0$, $w^- = 0$, $u^+ = -c_k y + a^0_k$, $v^+ = c_k x + b^0_k$, $w^+ = c^0_k$, marginea $(-)$ fiind $a''_k - b''_k$ iar marginea $(+)$ fiind $a'_k - b'_k$). Orice deformație adițională cu păstrarea continuității corpului nu va schimba diferențele $u^+ - u^-$, $v^+ - v^-$, $w^+ - w^-$. În general, $a_k - b_k$ diferă, în starea finală, ca formă de marginile $a'_k - b'_k$, $a''_k - b''_k$. Deformînd prin continuitate $a_k - b_k$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, astfel ca a_k, b_k, să rămînă respectiv pe L_k, L_{k+1} fără ca tăieturile să se intersecteze și deci sistemul nou de tăieturi rămînînd topologic echivalent cu cel inițial, caracteristicile dislocației rămîn aceleași (fiind nule, în mod evident pentru deplasări uniforme) ***).

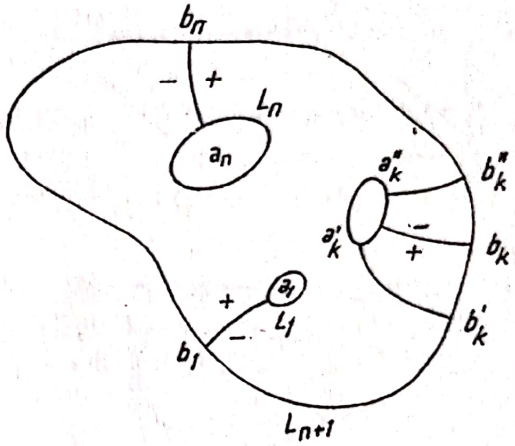


Fig. 80

În cele ce urmează nu vom considera faptul că prin sudură conturul apare cu anumite trepte mici. De asemenea nu vom considera alte cazuri care se tratează în mod analog, al unor deplasări multiforme ce se obțin prin adăugare de material sau adăugare într-o porțiune și înlăturare în altă porțiune.

---

*) Inițial A. Timpe a dat o interpretare pentru inelul circular iar V. Volterra a extins-o pentru corpuri multiplu conexe de formă oarecare.

**) Această denumire a fost dată de A.E.H. Love și a înlocuit termenul de distorsiune utilizat anterior de V. Volterra.

Menționăm că modele plane de dislocații au fost cercetate inițial și de N. G. Filon. N. I. Mushelișvili prezintă în cartea sa studiul dislocațiilor inelului circular în cadrul metodei de rezolvare a problemelor la limită cu ajutorul funcțiilor de variabilă complexă.

***) După cum se știe și din teoria clasică, într-un domeniu simplu conex deplasările nu pot fi multiforme. Dacă practicăm o sudură a marginilor unei tăieturi într-un asemenea corp (de exemplu excluzînd o pană radială a unui disc circular și lipind marginile astfel create) vor rezulta tensiuni care nu satisfac condițiile de continuitate și deci nu vom avea o dislocație în sensul definițiilor date. Analog nu se consideră cazul unor margini necongruente (care nu se pot pune în contact astfel cum se consideră uzual) deoarece ar apare, prin lipire, tensiuni care nu satisfac condițiile menționate.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul în care $\beta = 0$ rezultă $d_k = 0$, $c_k^0 = 0$ și deci nu mai intervine un salt de dislocație în sesn transversal de-a lungul tăieturii și nici un salt de dislocație constînd într-o dilatare uniformă în planul median.

În figura 81 apar cele trei tipuri de dislocații care intervin (translații în spațiu, rotații și dilatări).

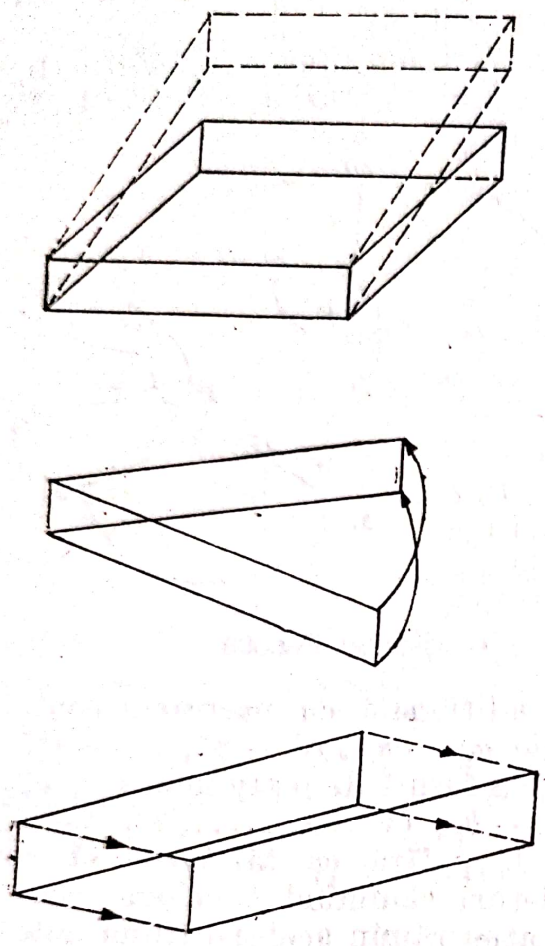


Fig. 81

B. Soluții ale problemei mediane obținute cu ajutorul reprezentărilor complexe

§ 62. Soluția primei probleme fundamentale pentru cerc

Soluția primei probleme fundamentale (pentru tensiuni date pe contur) în teoria simetrică a elasticității a fost dată de diferiți autori. O soluție obținută cu ajutorul funcțiilor de variabilă complexă în teoria simetrică a fost dată de N. I. Mushelișvili [4].

Fie un sistem de coordonate cu origina în centrul unui cerc de rază R și T_x, T_y, T_z componentele tensiunii care intervin în formularea condițiilor la limită, acționînd pe exteriorul cercului și presupuse funcții continui și uniforme pe L. Unghiul polar θ și arcul s sînt mărimi măsurate în sens invers mersului acelor de ceasornic.

Notînd

$$f = f_1 + if_2 = i\int_0^s (T_x + iT_y + 2\eth T_z\, k/h)\, R\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

$$if_3 = i\int_0^s \sigma_{zn} R\,\mathrm{d}\theta \tag{2}$$

se deduce că, în baza formulelor (1) din § 53, următoarele valori rezultante calculate pe întreg conturul sînt nule

$$\int_0^{2\pi} \left(T_x + iT_y + 2\eth \frac{k}{h} T_z\right) \mathrm{d}\theta = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \sigma_{zn}\,\mathrm{d}\theta = 0. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste condiții exprimă faptul că f și f_3 sînt funcții uniforme, revenind după parcurgerea unui ciclu la aceleași valori. Funcțiile X și Y se presupun continui și uniforme. Se poate arăta atunci că (2) reprezintă condiția de existență a unor soluții regulate.

Momentul rezultant (3) din § 53 se scrie astfel

$$\mathfrak{M} = \int_L (xT_y - yT_x)\,ds = \int_D [\sigma_{xy} - \sigma_{yx} + \frac{2k}{h}(y\sigma_{xx}^{+} - x\sigma_{xy}^{+})]\,dxdy. \tag{4}$$

D este domeniul interior cercului L. Integrînd prin părți rezultă formula

$$\mathfrak{M} = -\int_L (xdf_1 + ydf_2) = -(xf_1 + yf_2)_L + \int_L (f_1\,dx + f_2\,dy) \tag{5}$$

în care $[\ ]_L$ reprezintă creșterea expresiei din interior la o parcurgere a conturului L. În baza continuității funcțiilor f_1, f_2 pe L care rezultă din anularea rezultantelor tensiunilor Z, decurge condiția

$$(xf_1 + yf_2)_L = 0. \tag{6}$$

În consecință (4) ne arată că

$$\mathfrak{M} = \int_L (f_1\,dx + f_2 dy) \tag{7}$$

sau, în cazul unui cerc cu centrul în origina coordonatelor,

$$\mathfrak{M} = \int_0^{2\pi} (-f_1 \sin\theta + f_2 \cos\theta)\,d\theta. \tag{8}$$

În cele ce urmează vom presupune că f_1 și f_2 sînt astfel alese încît să fie continui pe L, verificînd totodată condiția de anulare (2) a rezultantelor tensiunilor.

Condițiile la limită pentru tensiuni sînt, conform relațiilor (9) și (10) din § 52,

$$\varepsilon\varphi(\zeta) + \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} - (1 + 2\delta)\,\pi(\zeta) - \zeta[\delta\overline{\pi'(\zeta)} - (1 + \delta)\,\pi'(\zeta)] = f_1 + if_2,$$

$$(1 + \delta)\,\frac{h}{2k}(\pi'(\zeta) - \overline{\pi'(\zeta)}) = if_3, \tag{9}$$

deoarece putem lua pentru un corp simplu conex constantele care apar în (1), prin integrare, egale cu zero.

Scanned with OKEN Scanner

Vom utiliza dezvoltările în serie Fourier

$$f_1 + i f_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} A_p e^{ip\theta}, \qquad f_3 = \mathrm{Re} \sum_{-\infty}^{\infty} B_p e^{ip\theta} \tag{10}$$

și dezvoltările în serii de puteri ale funcțiilor complexe

$$\varphi(\zeta) = \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p \zeta^p, \qquad \psi(\zeta) = \sum_{p=0}^{\infty} \psi_p \zeta^p,$$

$$\pi(\zeta) = \sum_{p=1}^{\infty} \pi_p \zeta^p, \qquad (\pi_1 = \overline{\pi}_1), \tag{11}$$

(pentru $|\zeta| < R$). Aceste dezvoltări sînt posibile deoarece funcțiile trebuie să fie olomorfe în interiorul cercului și deoarece putem accepta condițiile de determinare (7) din § 54. În cele ce urmează vom presupune că seriile coverg nu numai în interiorul cercului dar și pe frontiera acestuia L. Condițiile la limită (9) se scriu astfel

$$\sum_{p=1}^{\infty} \{\varepsilon\varphi_p - \delta\pi_p)\,\zeta^p + p\,(\overline{\varphi}_p - \delta\overline{\pi}_p)\,\zeta\zeta^{-p-1}\} + \sum_{p=0}^{\infty} \overline{\psi}_p \overline{\zeta}^p = f_1 + i f_2, \tag{12}$$

$$(1+\delta)\frac{h}{2k} \sum_{p=1}^{\infty} p\,(\pi_p \zeta^{p-1} - \overline{\pi}_p \overline{\zeta}^{p-1}) = i f_3 .$$

Pe circumferința arcului avem

$$\zeta = Re^{i\theta}, \qquad \overline{\zeta} = Re^{-i\theta}. \tag{13}$$

Înlocuind în (12) expresiile variabilelor complexe (13) și anulînd coeficienții diferitelor puteri ale exponențialelor care apar, deducem următoarele ecuații algebrice

$$\varepsilon\varphi_1 + \overline{\varphi}_1 - \delta(\pi_1 + \overline{\pi}_1) = A_1/R, \quad \varepsilon\varphi_p - \delta\pi_p = A_p/R^p, \quad (p > 1),$$

$$(p+2)\,R^2(\overline{\varphi}_{p+2} - \delta\overline{\pi}_{p+2}) + \overline{\psi}_p = A_{-p}/R^p, \quad (p \geqslant 0),$$

$$(1+\delta)\frac{h}{2k}(\pi_1 - \overline{\pi}_1) = i\,\mathrm{Re}\,B_0,$$

$$(1+\delta)\frac{h}{2k}(p+1)\,\pi_{p+1} = \frac{i}{2}(B_p + \overline{B}_{-p})/R^p, \quad (p > 0). \tag{14}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama de (11) rezultă că soluțiile acestor ecuații sînt

$$\operatorname{Re}\varphi_1 = \frac{1}{2(1+\varepsilon)}\left[\frac{A_1+\bar{A}_1}{R} + 4\delta \operatorname{Re}\pi_1\right], \quad \operatorname{Im}\varphi_1 = -\frac{1}{2(1-\varepsilon)}\,\frac{A_1-\bar{A}_1}{R},$$

$$\varphi_p = \frac{A_p}{\varepsilon R^p} + \frac{\delta}{\varepsilon}\pi_p, \quad (p>1), \tag{15}$$

$$\psi_p = \frac{\bar{A}_{-p}}{R^p} - (p+2)R^2\left[\frac{A_{p+2}}{\varepsilon R^{p+2}} + \frac{\delta\gamma}{2\varepsilon}\pi_{p+2}\right], \qquad (p \geqslant 0)$$

$$\operatorname{Im}\pi_1 = \frac{ik}{(1+\delta)h}\operatorname{Re}B_0 = 0,$$

$$\pi_{p+2} = \frac{ik}{(1+\delta)(p+2)h}\,\frac{B_{p+1}+\bar{B}_{-(p+1)}}{R^{p+1}}, \qquad (p \geqslant 0).$$

Pentru ca soluția obținută să corespundă condițiilor problemei, va fi necesar de a se arăta că dezvoltările în serie a funcțiilor (11) sînt absolut și uniform convergente pe circumferința L a cercului și deci, în mod implicit, în interiorul cercului. În acest caz, funcțiile (11) vor fi continui pe contur iar soluțiile vor fi regulate. În consecință T_x, T_y, T_z sau σ_{zn} sînt continui.

§ 63. Soluția celei de-a doua probleme fundamentale pentru cerc

Condițiile la limită corespunzătoare reprezentării (4) din § 60 sînt de forma

$$\varkappa\varphi(\delta) - \delta\overline{\varphi'(\delta)} - \overline{\psi(\delta)} - \pi(\delta) - \delta\overline{\pi'(\delta)} = 2\mu(g_1 + ig_2),$$
$$(\varkappa+1)(\pi'(\delta) + \pi'(\delta)) = 2\mu g_3. \tag{1}$$

Se vor utiliza următoarele dezvoltări în serie ale funcțiilor deplasărilor

$$2\mu(g_1+ig_2) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p e^{ip\theta}, \qquad 2\mu g_3 = \operatorname{Re}\sum_{p=-\infty}^{\infty} B_p e^{ip\theta}. \tag{2}$$

Recurgînd la seriile de puteri (11) din § 62, condițiile la limită se vor transcrie în modul următor:

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left[(\varkappa\varphi_p - \pi_p)R^p e^{ip\theta} - p(\bar{\varphi}_p + \bar{\pi}_p)R^p e^{-i(p-2)\theta}\right] - \sum_{p=0}^{\infty}\bar{\psi}_p R^p e^{-ip\theta} =$$
$$= \sum_{-\infty}^{\infty} A_p e^{ip\theta},$$

$$(\varkappa+1)\sum_{p=1}^{\infty} p\left[\pi_p e^{i(p-1)\theta} + \bar{\pi}_p e^{-i(p-1)\theta}\right]R^{p-1} = \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}(B_p e^{ip\theta} + \bar{B}_p e^{-ip\theta}). \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Vor avea loc următoarele relaţii între coeficienţi;

$$(\varkappa\varphi_1 - \pi_1 - \overline{\varphi}_1 - \overline{\pi}_1) R = A_1, \quad (\varkappa\varphi_p - \pi_p) R^p = A_p, \quad (p > 0),$$

$$(p+2)(\overline{\varphi}_{p+2} + \overline{\pi}_{p+2}) R^{p+2} + \overline{\psi}_p R^p = -A_{-p}, \quad (p \geqslant 0), \tag{4}$$

$$(\varkappa + 1)(\pi_1 + \overline{\pi}_1) = B_0,$$

$$(\varkappa + 1)(p+1)\pi_{p+1} R^p = (B_p + \overline{B}_{-p})/2, \quad (p > 0).$$

Constantele pot fi explicitate sub forma următoare:

$$\pi_1 + \overline{\pi}_1 = \frac{B_0 + B_0}{2(\varkappa+1)}, \quad \pi_{p+1} = \frac{B_p + \overline{B}_{-p}}{2(\varkappa+1)(p+1)R^p}, \quad (p > 0)$$

$$\varphi_1 = \frac{\varkappa A_1 + \overline{A}_1 + (\varkappa+1)(\pi_1 + \overline{\pi}_1) R}{(\varkappa^2 - 1) R}, \quad \varphi_p = \frac{A_p + \pi_p}{\varkappa \overline{R^p}}, \quad (p > 0), \tag{5}$$

$$\psi_p = -\frac{\overline{A}_{-p}}{R^p} - (p+2) R^2 (\varphi_{p+2} + \pi_{p+2}), \quad (p \geqslant 0).$$

Convergenţa se studiază în mod analog celor expuse în cadrul secţiunii precedente.

Privitor la reprezentarea prin serii în domeniul infinit a funcţiilor $N = \sigma_{rr}$ şi $T = \sigma_{\theta r}$ se poate arăta că dacă acestea satisfac condiţiile lui Dirichlet, atunci atît dezvoltările (11), cît şi dezvoltarea în serie a funcţiilor $\Phi'(\zeta)$ sînt absolut şi uniform convergente pe L şi deci şi în exteriorul lui L. Pentru acest motiv ipoteza de convergenţă a seriilor (11) menţionată mai sus apare justificată.

Aceste observaţii se bazează pe elementele expuse anterior la seriile (1) din § 20.

Dacă s-ar fi utilizat condiţiile la limită pentru tensiuni (4) din § 52, se putea arăta că funcţiile $\varphi(\zeta)$ şi $\psi(\zeta)$ rezolvă problema la limită dacă T_x şi T_y au derivate de ordinul întîi satisfăcînd condiţiile generale de tip Dirichlet.

§ 64. Soluţia primei probleme fundamentale pentru planul infinit cu un gol circular

Vom utiliza condiţiile la limită (3) din § 60,

$$\overline{\varepsilon\Phi(\zeta)} + \Phi(\zeta) - \delta[\Pi(\zeta) + \overline{\Pi(\zeta)}] - e^{2i\theta}[\overline{\zeta}(\Phi'(\zeta) + \Pi'(\zeta)) + \Psi(\zeta)] = \sigma_{rr} - i\sigma_{\theta r}$$

$$(1+\delta)\frac{h}{k} \operatorname{Re} e^{2i\theta} \Pi'(\zeta) = \sigma_{zr}^{+}, \ (L), \tag{1}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care $\rho = r$ corespunde direcției radiale orientată în sensul normalei la cercul L care mărginește golul. Origina coordonatelor este aleasă în centrul golului circular. Tensiunea σ_{rr} este orientată în sensul normalei exterioare lui L și anume spre centrul cercului. $\sigma_{\theta r}$ este tensiunea tangențială orientată în sensul tangentei t și anume spre stînga atunci cînd privim în lungul normalei pozitive. Se vor utiliza dezvoltările (11) din § 62 de data aceasta pentru domeniul exterior conturului circular L. În baza acestor dezvoltări rezultă și următoarele relații exprimate cu ajutorul altor sisteme de coeficienți :

$$\Phi(\zeta) = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p \zeta^{-p}, \quad \Psi(\zeta) = \sum_{p=0}^{\infty} \Psi_p \zeta^{-p},$$
$$\Pi(\zeta) = \sum_{p=0}^{\infty} \Pi_p \zeta^{-p} + \Pi(1 + \log\zeta), \tag{2}$$

în care, conform (7) din § 59 și (11) din § 56,

$$\Phi_0 = \Gamma = B + iC, \left(\Phi_1 = \left[-\frac{X + iy}{2\pi} + (\varkappa + 1 + 2\gamma)\,\pi_1\right]\frac{1}{\varkappa + \varepsilon}\right),$$
$$\Psi_0 = \Gamma' = B' + iC', \left(\Psi_1 = \varkappa\frac{X - iY}{(\varkappa + \varepsilon)\,2\pi} - \left(\varkappa - 1 + \frac{4\gamma\varkappa}{\varkappa + \varepsilon}\right)\bar{\pi}_1\right),$$
$$\Pi_0 = \Gamma'' = B'' + iC'', \quad \Pi = -\frac{kZ}{\pi(\varkappa + 1 + 2\gamma)\,h} = 0. \tag{3}$$

În cele ce urmează nu ne vor face trebuință relațiile din paranteze. Presupunem că dezvoltările (1) converg și pe conturul L.

Prin substituția funcțiilor (2) în (1) și aplicarea formulelor

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left\{[(1 + p)\,\Phi_p + (p - \delta)\,\Pi_p]\frac{e^{-ip\theta}}{R^p} - \Psi_p\frac{e^{-i(p-2)\theta}}{R^p} + \right.$$
$$\left. + [\varepsilon\overline{\Phi}_p - \delta\overline{\Pi}_p]\frac{e^{ip\theta}}{R^p}\right\} = \sigma_{rr} - i\sigma_{\theta r}, \tag{4}$$
$$-(1 + \delta)\frac{h}{2k}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{p}{R^{p+1}}[\Pi_p e^{-i(p-1)\theta} + \overline{\Pi}_p e^{-i(p-1)\theta}] = \sigma_{rr}^{+},$$

dezvoltînd în serie încărcările

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{\theta r} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p e^{ip\theta}, \quad \sigma_{rr}^{+} = \mathrm{Re}\sum_{p=-\infty}^{\infty} B_p e^{ip\theta} \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă prin identificarea exponenţialelor care apar în (4) următorul sistem de ecuaţii

$$\Phi_0+\varepsilon\overline{\Phi}_0-\delta(\Pi_0+\overline{\Pi}_0)-\Psi_2/R^2=A_0,\ \operatorname{Re} i\Pi_0=0,$$

$$\varepsilon\Phi_1-\delta\overline{\Pi}_1-\Psi_1=A_1\ R,\ \frac{\varepsilon\overline{\Phi}_2-\delta\overline{\Pi}_2}{R^2}-\Psi_0=A_2,$$

$$\frac{\varepsilon\overline{\Phi}_p-\delta\overline{\Pi}_p}{R^p}=A_p,(p\geqslant 3), \tag{6}$$

$$(1+p)\Phi_p+(p-\delta)\Pi_p-\Psi_{p+2}/R^2=A_{-p},(p\geqslant 1),$$

$$-(1+\delta)\frac{h}{k}\frac{p}{R^{p+1}}\Pi_p=B_{p-1},(p>0,\ B_0=0).$$

Vom ţine de asemenea seama de condiţiile de uniformitate ale deplasărilor (11) din § 55, în care înlocuim f, ψ, p prin Φ_1, Ψ_1, Π_1 :

$$\varkappa\Phi_1+\overline{\Psi}_1=\Pi_1. \tag{7}$$

Rezultă următorul sistem de coeficienţi

$$\Pi_p=-k\frac{R^{p+1}}{(1+\delta)ph}B_{p-1},\ (p>0),\ \Phi_0=\Gamma,\ \Psi_0=\Gamma',\ \Pi_0=B'',$$

$$\Phi_1=\frac{\overline{A}_1R+(1+\delta)\Pi_1}{\varkappa+\varepsilon},\ \Psi_1=\frac{-\varkappa A_1R+(\varepsilon-\delta\varkappa)\overline{\Pi}_1}{\varkappa+\varepsilon},$$

$$\Phi_2=\frac{R^2(\overline{A}_2+\overline{\Gamma}')+\delta\Pi_2}{\varepsilon},\ \Phi_p=\frac{R^p\overline{A}_p+\delta\Pi_p}{\varepsilon},\ (p>2), \tag{8}$$

$$\Psi_2=R^2[-A_0+\Gamma+\varepsilon\overline{\Gamma}-2\delta\Pi_0],$$

$$\Psi_{p+2}=R^2[A_{-p}+(1+p)\Phi_p+(p-\delta)\Pi_p].$$

Convergenţa seriilor $\Phi(\zeta)$, $\Phi'(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$, $\Pi(\zeta)$, $\Pi'(\zeta)$ se stabileşte analog ca în paragrafele precedente, presupunînd că (5) au derivate de ordinul doi satisfăcînd condiţiile lui Dirichlet.

Scanned with OKEN Scanner

§ 65. Întinderea plăcii cu gol circular într-o singură direcție mediană

Admitem cîmpul elastic

$$\sigma_{xx} = p, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma_{yy} = \cdots = 0. \tag{1}$$

Condițiile (17) din § 56 și (6) din § 64, conduc la următoarele relații :

$$\Phi_0 = B = \varepsilon_1 p/4, \quad C = 0, \quad \Psi_0 = B' = -\frac{p}{2}, \quad C' = 0,$$

$$\pi_0 = B'' = -\frac{\nu p}{2(\varkappa + 1)(1 + \nu)}, \quad \Pi_p = 0,$$

$$\Phi_1 = 0, \ \Phi_2 = -\frac{R^2 p}{2\varepsilon}, \ \Phi_p = 0, \ (p > 2), \tag{2}$$

$$\Psi_2 = R^2\left[(1+\varepsilon)\,\varepsilon_1 \frac{p}{4} + \frac{\delta \nu p}{(\varkappa+1)(1+\nu)}\right] = R^2 \frac{p}{2},$$

$$\Psi_3 = 0, \ \Psi_4 = -\frac{3R^4}{2\varepsilon} p, \ \Psi_p = 0, \ (p > 4).$$

În definitiv se obțin dezvoltările

$$\Phi(\zeta) = \Phi_0 + \Phi_2 \zeta^2, \ \Psi(\zeta) = \Psi_0 + \Psi_2/\zeta^2 + \Psi_4/\zeta^4, \ \Pi(\zeta) = \Pi_0 \tag{3}$$

astfel că, dacă se mai aplică formulele (4) — (9) din § 59, rezultă relațiile pentru tensiunile mediane :

$$\begin{matrix} \sigma_{rr} - i\sigma_{\theta r} \\ \sigma_{\theta\theta} + i\sigma_{r\theta} \end{matrix} = (1+\varepsilon)\,\Phi_0 + \frac{\Phi_2}{r^2}(\varepsilon e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) - 2\delta\Pi_0 \pm$$

$$\mp e^{2i\theta}\left[-\frac{2e^{-4i\theta}}{r^2}(\Phi_2 + \Pi_2) + \Psi_0 + \Psi_2 \frac{e^{-2i\theta}}{r^2} + \Psi_4 \frac{e^{-4i\theta}}{r^4}\right] \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde, conform (4) din § 59,

$$\sigma_{rr} = (1+\varepsilon)\,\Phi_0 - \frac{\Psi_2}{r^2} - 2\delta\Pi_0 + \left\{(3+\varepsilon)\frac{\Phi_2}{r^2} - \Psi_0 - \frac{\Psi_4}{r^4}\right\}\cos 2\theta =$$

$$= \left\{1 - \frac{R^2}{r^2} + \left[1 - \frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}\frac{R^2}{r^2} + \frac{3}{\varepsilon}\frac{R^4}{r^4}\right]\cos 2\theta\right\}\frac{p}{2},$$

$$\sigma_{\theta r} = \left\{(3-\varepsilon)\frac{\Phi_2}{r^2} + \Psi_0 - \frac{\Psi_4}{r^4}\right\}\sin 2\theta = -\left\{1 + \frac{3-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{R^2}{r^2} - \frac{3}{\varepsilon}\frac{R^4}{r^4}\right\}\frac{p}{2}\sin 2\theta,$$

$$\sigma_{r\theta} = \left\{(1+\varepsilon)\frac{\Phi_2}{r^2} + \Psi_0 - \frac{\Psi_4}{r^4}\right\}\sin 2\theta = -\left\{1 + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\frac{R^2}{r^2} - \frac{3}{\varepsilon}\frac{R^4}{r^4}\right\}\frac{p}{2}\sin 2\theta,$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (1+\varepsilon)\,\Phi_0 + \frac{\Psi_2}{r_2} - 2\delta\Pi_0 - \left[\frac{(1-\varepsilon)\,\Phi_2 + 2(1+\delta)\,\Pi_2}{r^2} - \Psi_0 - \frac{\Psi_4}{r^4}\right]\cos 2\theta =$$

$$= \left\{1 + \frac{R^2}{r^2} - \left[1 - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{R^2}{r^2} + \frac{3}{\varepsilon}\frac{R^4}{r^4}\right]\cos 2\theta\right\}\frac{p}{2},$$

$$\sigma_{zz} = 2\left\{(1+\varepsilon)\,\nu\left(\Phi_0 + \frac{\Phi_2}{r^2}\cos 2\theta\right) + (\varkappa + 1 + 2\nu(1-\gamma))\,\Pi_0 = -\nu\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\frac{R^2}{r^2}\cos 2\theta.p.\right. \tag{5}$$

Pe conturul golului $r = R$ avem

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta r} = 0,\ \sigma_{\theta\theta} = \left[1 - \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\cos 2\theta\right]p,\ \sigma_{r\theta} = (1-\varepsilon)\frac{p}{\varepsilon}\sin 2\theta,$$

$$\sigma_{zz} = -\nu\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}p\cos 2\theta. \tag{6}$$

Variația tensiunilor apare în figurile 82.

Valorile maxime ale tensiunilor sînt următoarele:

$$\sigma_{\theta\theta} = \left(3 + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)p,\ \left(\theta = \pm\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sigma_{r\theta} = \pm\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}p,\ \left(\theta = \pm\frac{\pi}{4}, \mp\frac{3\pi}{4}\right), \tag{7}$$

$$\sigma_{zz} = \mp\nu\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}p,\ \left(\theta = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom calcula de asemenea deplasările cu ajutorul funcțiilor

$$\varphi(\zeta) = \int \Phi(\zeta)\, d\zeta = \Phi_0 \zeta - \frac{\Phi_2}{\zeta},$$

$$\psi(\zeta) = \int \Psi(\zeta)\, d\zeta = \Psi_0 \zeta - \frac{\Psi_2}{\zeta} - \frac{\Psi_4}{3\zeta^3}, \tag{8}$$

$$\pi(\zeta) = \Pi_0 \zeta.$$

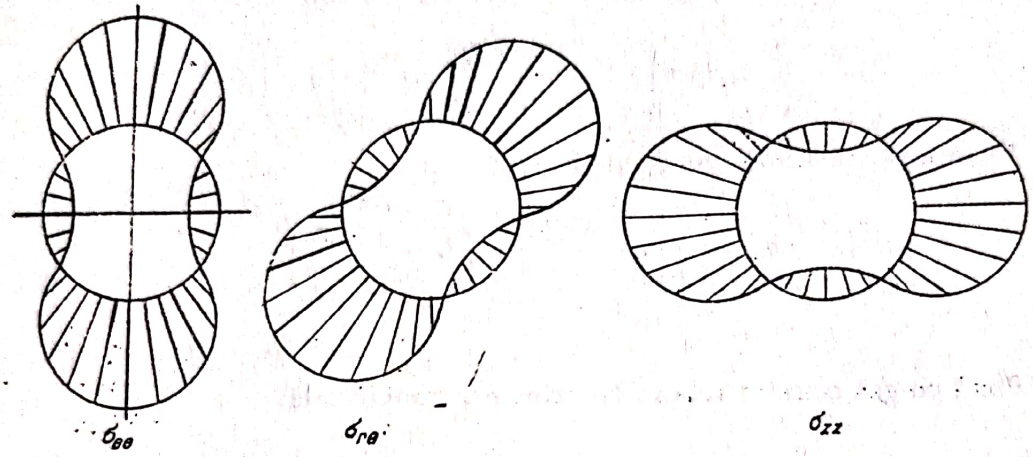


Fig. 82

Conform formulei (5) din § 51 rezultă

$$W = -\nu\, p/E, \qquad E = 2\mu(1+\nu) \tag{9}$$

$$2\mu U = \varkappa(\Phi_0 \zeta - \Phi_2/\zeta) - \zeta(\Phi_0 + \Phi_2/\bar{\zeta}^2) - (\Psi_0 \bar{\zeta} - \Psi_2/\bar{\zeta} - \Psi_4/3\bar{\zeta}^3) - \bar{\zeta}(\Pi_0 + \bar{\Pi}_0).$$

Deplasările mediane au deci expresiile

$$2\mu(u_r + iu_\theta) = 2\mu U\, e^{-i\theta} = [(\varkappa - 1)\,\Phi_0 - (\Pi_0 + \bar{\Pi}_0)]\, r - \left[\frac{\Phi_2}{r} - \frac{\Psi_4}{3r^3}\right] e^{2i\theta} -$$

$$- \left[\frac{\varkappa \Phi_2}{r} + \Psi_0 r\right] e^{-2i\theta} + \frac{\Psi_2}{r}, \tag{10}$$

și deci (9) se mai scrie astfel

$$2\mu u_r = [(\varkappa - 1)\,\Phi_0 - 2\mathrm{Re}\,\Pi_0]\, r - \left[\frac{\varkappa + 1}{r}\,\Phi_2 + \Psi_0 r - \frac{\Psi_4}{3r^3}\right] \cos 2\theta + \frac{\Psi_2}{r}, \tag{11}$$

$$2\mu u_\theta = \left\{(\varkappa - 1)\frac{\Phi_2}{r} + \frac{\Psi_4}{3r^3} + \Psi_0 r\right\} \sin 2\theta, \quad W = (\varkappa + 1)\,\mathrm{Re}\,\pi_0/\mu.$$

Vom mai considera cîmpul elastic pentru care la infinit avem $\sigma_{xx} = p$, restul componentelor tensiunii, exceptînd σ_{zz}, sînt nule iar $W = 0$. Atunci vom avea conform relaţiilor (17) din § 56, condiţiile $\Gamma'' = B'' = 0$ sau $\sigma_{zz} = \nu p$:

$$\Phi_0 = \Gamma = B = \frac{p}{4}\left(\varepsilon_1 + \nu\frac{\varepsilon_z}{2}\right) = \frac{p}{2(1+\varepsilon)}, \quad B' = -\frac{p}{2}, \tag{12}$$

Restul coeficienţilor rămîn aceiaşi, fapt ce se poate verifica imediat. Se deduc aceleaşi expresii ale tensiunilor, exceptînd

$$\sigma_{zz} = \nu\left[1 - \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\frac{R^2}{r^2}\cos 2\theta\right] p. \tag{13}$$

Valoarea maximă pe contur este

$$\sigma_{zz} = \pm\nu\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}p, \left(\theta = \pm\frac{\pi}{2}\right). \tag{14}$$

§ 66. Placă cu gol circular supusă la întindere transversală

Condiţiile (17) din § 56 se vor transcrie astfel

$$\Phi_0 = B = \Gamma = \varepsilon_2\frac{q}{8} = \frac{\delta q}{(1+\varepsilon)(\varkappa+1)(1+\nu)}, \quad \Psi_0 = B' = \Gamma' = 0,$$
$$\Pi_0 = B'' = \Gamma'' = q/2(\varkappa+1)(1+\nu), \quad q = \sigma_{zz}(\infty). \tag{1}$$

Presupunînd conturul L al golului liber, vom avea

$$\Pi_p = 0, \quad \Psi_p = 0, \quad \Phi_p = 0, \quad (p > 0). \tag{2}$$

Funcţiile de reprezentare sînt

$$\Phi(\delta) = \Phi_0, \quad \Pi(\delta) = \Pi_0 \tag{3}$$

astfel că

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = (1+\varepsilon)\Phi_0 - 2\delta\Pi_0 = 0, \quad \sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta} = 0,$$
$$\sigma_{zz} = 2\{(1+\varepsilon)\nu\Phi_0 + [\varkappa + 1 + 2\nu(1-\gamma)\Pi_0] = q, \tag{4}$$
$$u_r = \left[\varkappa - 1 - \frac{1+\varepsilon}{\delta}\right]\frac{\delta q r}{(1+\varepsilon)(\varkappa+1)E}, \quad W = \frac{q}{E}, \quad E = 2\mu(1+\nu).$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 67. Placă cu gol circular supusă la întindere în două direcții

Vom considera cîmpul de tensiuni la infinit

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = p, \ \sigma_{xy} = \cdots = \sigma_{zz} = 0. \tag{1}$$

Condițiile (17) din § 56 se scriu astfel

$$\begin{gathered} \Gamma = \Phi_0 = B = \varepsilon_1 p/2, \ C = 0, \ \Gamma' = \Psi_0 = 0, \\ B'' = \operatorname{Re} \Pi_0 = \operatorname{Re} \Gamma'' = -\nu p/(\varkappa + 1)(1 + \nu). \end{gathered} \tag{2}$$

Coeficientul adițional nenul din (8), ρ 64, este

$$\Psi_2 = R^2 p. \tag{3}$$

Funcțiile de reprezentare au expresiile

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varkappa + 1 + 2\nu \cdot (1-\gamma)}{(1+\varepsilon)(\varkappa+1)(1+\nu)} \ p = \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}, \tag{4}$$

$$\Psi(\zeta) = \frac{R^2}{\zeta^2} \ p = -\frac{\psi(\zeta)}{\zeta}, \ \Pi(\zeta) = -\nu \frac{p}{(\varkappa+1)(1+\nu)} + iC'' = \frac{\pi(\zeta)}{\zeta},$$

astfel că (4) — (9) din § 59 și (5) din § 51 conduc la relațiile ce pot fi deduse și cu ajutorul formulelor din exemplele precedente

$$\begin{gathered} \sigma_{rr} = \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) p, \ \sigma_{\theta\theta} = \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) p, \ \sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{zz} = 0, \\ W = -2\nu p/E, \ 2\mu u_r = [(\varkappa - 1)\ \Phi_0 - (\Pi_0 + \bar{\Pi}_0)]\, r + \Psi_2/r, \ u_\theta = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

§ 68. Presiune uniformă normală pe conturul golului circular al plăcii

Vom admite o presiune uniformă $-p$ pe conturul golului circular al plăcii. Aplicînd (5) din § 64 se deduc condițiile

$$\begin{gathered} \sigma_{rr} = -p, \ \sigma_{\theta r} = 0, \ \sigma_{zr}^{+} = 0 \\ A_0 = -p, \ A_p = 0, \ (p \neq 0), \ B_p = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Scanned with OKEN Scanner

La infinit presupunem un cîmp de tensiuni nul ($\Phi_0 = \Psi_0 = \Pi_0 = 0$). Atunci (8) din § 64 furnizează coeficientul nenul

$$\Psi_2 = R^2 p \tag{2}$$

de unde

$$\sigma_{rr} = -\sigma_{\theta\theta} = -\frac{R^2}{r^2} p, \quad u_r = \frac{R^2}{2\mu r} p. \tag{3}$$

Restul componentelor tensiunii și deplasărilor sînt nule. Se constată că această soluție nu este afectată de efectele de polarizare și de perturbările pe fețele laterale ale plăcii.

§ 69. Placă avînd un gol circular al cărui contur este acționat cu o forță

Vom presupune că la infinit tensiunile sînt nule iar că pe conturul golului $r = R$ acționează tensiuni avînd o mărime și o direcție constante

$$T_x = \frac{X}{2\pi R}, \quad T_y = \frac{Y}{2\pi R}, \quad T_z = \frac{Z}{2\pi R}. \tag{1}$$

X, Y și Z reprezintă rezultantele componentelor acestor tensiuni pe conturul considerat. Conform egalităților (12) din § 52, componenta normală și tangențială a tensiunilor pe contur au expresiile

$$N = -(X\cos\theta + Y\sin\theta)/2\pi R, \quad T = -(-X\sin\theta + X\cos\theta)/2\pi R \tag{2}$$

deoarece normala la contur este îndreptată spre centrul cercului $r = R$ și formează cu axa Ox unghiul $\nu = \theta + \pi$.

Pe contur tensiunile satisfac condițiile conform cu (11) și (12) din § 52

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{\theta r} = N - iT = -\frac{X - iY}{2\pi R} e^{i\theta}, \quad \sigma_{zr}^{+} = -\frac{Z}{2\pi R}. \tag{3}$$

În consecință în (5) din § 64 intervin următorii coeficienți

$$A_1 = -\frac{X - iY}{2\pi R}, \quad B_0 = -\frac{Z}{2\pi R} \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci coeficienții nenuli din (8), § 64, sînt următorii

$$\Pi_1 = \frac{kRZ}{2\pi(1+\delta)\,h},\quad \Phi_1 = \frac{-(X+iY)+k\dfrac{R}{h}Z}{2\pi(\varkappa+\varepsilon)},$$

$$\Psi_1 = \frac{\varkappa(X-iY)+(\varepsilon-\delta\varkappa)\,kRZ/h(1+\delta)}{2\pi(\varkappa+\varepsilon)},$$

$$\Psi_3 = \frac{-R^2(X+iY)+kR^3Z/h}{\pi(\varkappa+\varepsilon)}+\frac{1-\delta}{1+\delta}\frac{kR^3}{2\pi h}Z = \tag{5}$$

$$= -\frac{R^2(X+iY)}{\pi(\varkappa+\varepsilon)}+\left[\frac{1}{\varkappa+\varepsilon}+\frac{1-\delta}{2(1+\delta)}\right]\frac{kR^3}{\pi h}Z.$$

Funcțiile de reprezentare corespunzătoare au expresiile

$$\Phi(\zeta) = \Phi_1/\zeta,\ \Psi(\zeta) = \Psi_1/\zeta+\Psi_3/\zeta^3,\ \Pi(\zeta) = \Pi_1/\zeta. \tag{6}$$

Relațiile (4) — (9) din § 59 conduc la următoarele

$$\begin{matrix}\sigma_{rr}-i\sigma_{\theta r}\\ \sigma_{\theta\theta}+i\sigma_{r\theta}\end{matrix} = \frac{1}{r}\Big\{\varepsilon\overline{\Phi}_1 e^{i\theta}+\Phi_1 e^{-i\theta}-\delta\Pi_1(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\mp$$

$$\mp e^{2i\theta}\left[-e^{-3i\theta}(\Phi_1+\Pi_1)+\Psi_1 e^{-i\theta}+\frac{\Psi_3}{r^2}e^{-3i\theta}\right]\Big\}, \tag{7}$$

$$\sigma_{rr}^{+} = -(1+\delta)\frac{h\Pi_1}{kr^2}$$

sau

$$\sigma_{rr} = -\frac{\varkappa+2+\varepsilon-2R^2/r^2}{2\pi r(\varkappa+\varepsilon)}(X\cos\theta+Y\sin\theta)+$$

$$+\left\{\frac{2+\varepsilon+(\varkappa+2)\,\delta}{1+\delta}-\frac{2R^2}{r^2}+\frac{1-2\delta-(1-\delta)\,R^2/r^2}{1+\delta}\right\}\frac{kRZ\cos\theta}{2\pi rh},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\varkappa - \varepsilon - 2R^2/r^2}{2\pi r(\varkappa+\varepsilon)}(X\cos\theta + Y\sin\theta) +$$

$$+\left\{\frac{2\varepsilon - \delta(\varkappa-\varepsilon)/(1+\delta) + 2R^2/r^2}{\varkappa+\varepsilon} - \frac{1+2\delta+(1-\delta)R^2/r^2}{1+\delta}\right\}\frac{kRZ}{2\pi rh}\cos\theta,$$

$$\sigma_{\theta r} = -\frac{\varkappa - \varepsilon + 2R^2/r^2}{2\pi r(\varkappa+\varepsilon)}(X\sin\theta - Y\cos\theta) +$$

$$+\left[\frac{2-\delta(\varkappa+\varepsilon)/(1+\delta) - 2R^2/r^2}{\varkappa+\varepsilon} + \frac{1-(1-\delta)R^2/r^2}{1+\delta}\right]\cdot\frac{kRZ}{2\pi rh}\cdot\sin\theta,$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\varkappa - \varepsilon + 2R^2/r^2}{2\pi r(\varkappa+\varepsilon)}(X\sin\theta - Y\cos\theta) +$$

$$+\left[\frac{(2\varepsilon - \delta(\varkappa-\varepsilon))/(1+\delta) - 2R^2/r^2}{\varkappa+\varepsilon} + \frac{1-(1-\delta)R^2/r^2}{1+\delta}\right]\frac{kRZ}{2\pi rh}\cdot\sin\theta,$$

$$\sigma_{rr}^{+} = -RZ/2\pi r^2.$$

Reamintim că pentru $\beta = 0$, avem $\varepsilon = 1, \delta = (\chi+1)/2$, $\gamma = 0$, $k = 1$.

§ 70. Cuplul concentrat

În cazul unei tensiuni tangenţiale în planul median constante, aplicate pe conturul golului circular al unei plăci, vom avea, în ipoteza că la infinit tensiunile sînt nule, următoarele relaţii pentru coeficienţii dezvoltărilor (5) din § 64 :

$$A_0 = -iT, \quad A_p = 0, \quad (p \neq 0); \quad B_p = 0, \quad T = -M/2\pi R^2, \quad (1)$$

M reprezintă cuplul rezultant al tensiunilor aplicate pe conturul golului. Cu aceste relaţii, sistemul de condiţii (8) din § 64 se reduce la următoarea relaţie :

$$\Psi_2 = iR^2T. \quad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Restul coeficienților sînt nuli. Se deduc următoarele dezvoltări ale funcțiilor de reprezentare :

$$\Phi(\zeta), = 0 \qquad \Psi(\zeta) = -iM/2\pi\zeta^2, \qquad \Pi(\zeta) = 0$$
$$\varphi(\zeta) = 0, \qquad \psi(\zeta) = iM/2\pi\zeta, \qquad \pi(\zeta) = 0 \tag{3}$$

și deci ecuațiile (6) din § 59 se vor scrie astfel

$$\begin{matrix}\sigma_{rr} - i\sigma_{\theta r} \\ \sigma_{\theta\theta} + i\sigma_{r\theta}\end{matrix} = \pm\frac{iM}{2\pi r^2}, \qquad \sigma_{zz} = 0 \tag{4}$$

și deci

$$\sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta} = -\frac{M}{2\pi r^2} \tag{5}$$

restul componentelor tensorului tensiunii fiind nule.

În cazul în care R tinde la zero, formulele rămîn valabile, valoarea lui T tinzînd spre infinit. Momentul M rămîne constant, reprezentînd acțiunea unui cuplu concentrat aplicat în origine. Deplasările rezultă din (5), § 51, și (2), § 58.

$$u_r = 0, \qquad u_\theta = \frac{M}{4\pi\mu r} = -\frac{TR^2}{2\mu r}. \tag{6}$$

§ 71. Forțe concentrate în general

Vom considera o forță concentrată de componente X, Y, Z aplicată în punctul $\zeta=0$, acțiunea acesteia suprapunîndu-se peste cîmpul de tensiune. Conform relației (7) din § 59 vom avea

$$\Phi(\zeta) = \left[-\frac{X+iY}{2\pi} + (\varkappa+1+2\gamma)\,p\right]\frac{1}{(\varkappa+\varepsilon)\,\zeta} + \Phi^0(\zeta),$$

$$\Psi(\zeta) = \left[\varkappa\frac{X-iY}{2\pi} - \left(\varkappa - 1 + \frac{4\gamma\chi}{\varkappa+\varepsilon}\right)\overline{p}\right]\frac{1}{(\varkappa+\varepsilon)\,\zeta} + \Psi^0(\zeta), \tag{1}$$

$$\Pi(\zeta) = -\frac{kZ(1+\log\zeta)}{\pi(\varkappa+1+2\gamma)\,h} + \frac{p}{\zeta} + \Pi^0(\zeta),$$

funcţiile Φ_0, Ψ_0 şi Π_0 fiind olomorfe în vecinătatea punctului $\zeta=0$. Dacă forţa este aplicată în punctul $\zeta = \zeta_1$, vom înlocui variabila ζ prin $\zeta - \zeta_0$. Aplicînd formulele (2) din § 57 vom avea

$$\Phi(\zeta) = \left[-\frac{X+iY}{2\pi} + (\varkappa+1+2\gamma)\,p\right]\frac{1}{(\varkappa+\varepsilon)(\zeta-\zeta_0)} + \Phi_0(\zeta),$$

$$\Psi(\zeta) = \left[\varkappa\frac{X-iY}{2\pi(\varkappa+\varepsilon)} - \left(\varkappa - 1 + \frac{4\gamma\varkappa}{\varkappa+\varepsilon}\right)\overline{p}\right]\frac{1}{\zeta-\zeta_0} -$$

$$-\bar{\zeta}_0\left[\frac{X+iY}{2\pi} - (\varkappa+1+2\gamma)\,p\right]\frac{1}{(\varkappa+\varepsilon)(\zeta-\zeta_0)^2} + \qquad (2)$$

$$+\bar{\zeta}_0\left[\frac{kZ}{\pi(\varkappa+1+2\gamma)\,h(\zeta-\zeta_0)} - \frac{p}{(\zeta-\zeta_0)^2}\right] + \Psi_0(\zeta),$$

$$\Pi(\zeta) = -\frac{kZ(1+\log(\zeta-\zeta_0))}{\pi(\varkappa+1+2\gamma)} + \frac{p}{\zeta-\zeta_0} + \Pi_0(\zeta),$$

Φ_0, Ψ_0 şi Π_0 fiind funcţii olomorfe în vecinătatea punctului $\zeta = \zeta_0$.

Prin integrare rezultă reprezentările

$$\varphi(\zeta) = \left[-\frac{X+iY}{2\pi} + (\varkappa+1+2\gamma)\,p\right]\frac{\log(\zeta-\zeta_0)}{\varkappa+\varepsilon} + \varphi_0(\zeta),$$

$$\psi(\zeta) = \left[\varkappa\frac{X-iY}{2\pi(\varkappa+\varepsilon)} - \left(\varkappa - 1 + \frac{4\gamma\varkappa}{\varkappa+\varepsilon}\overline{p}\right)\right]\log(\zeta-\zeta_0) +$$

$$+\bar{\zeta}_0\left[\frac{X+iY}{2\pi} - (\varkappa+1+2\gamma)\,p\right]\frac{1}{\varkappa+\varepsilon}\,\frac{1}{\zeta-\zeta_0} + \qquad (3)$$

$$+\bar{\zeta}_0\left[\frac{kZ\log(\zeta-\zeta_0)}{\pi(\varkappa+1+2\gamma)\,h} + \frac{p}{\zeta-\zeta_0}\right] + \psi_0(\zeta),$$

$$\pi(\zeta) = -\frac{kZ}{\pi(\varkappa+1+2\gamma)\,h}\,\zeta\log(\zeta-\zeta_0) + p\log(\zeta-\zeta_0) + \pi_0(\zeta).$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul unui cuplu concentrat în punctul $\zeta = \zeta_0$, se aplică formulele (3) din § 70 și rezultă :

$$\Phi(\zeta) = \Phi_0(\zeta), \quad \Psi(\zeta) = -\frac{iM}{2\pi(\zeta - \zeta_0)^2} + \Psi_0(\zeta), \quad \Pi(\zeta) = \Pi_0(\zeta),$$
$$\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta), \quad \psi(\zeta) = \frac{iM}{2\pi(\zeta - \zeta_0)} + \varphi_0(\zeta), \quad \pi(\zeta) = \pi_0(\zeta). \tag{4}$$

Așadar, punctului ζ_0 de aplicație al unor forțe sau cuplu concentrat îi corespund singularități ale funcțiilor de reprezentare și invers, punctele singulare izolate ale acestor funcții apar drept puncte de aplicare ale unor forțe și momente concentrate.

Aplicînd reprezentările date pentru un domeniu multiplu conex incluzînd conturul L_0 suficient de mic în jurul lui $\zeta = \zeta_0$ ca frontieră a domeniului D, vom avea reprezentarea în jurul acestui punct de forma (3) în care înlocuim φ, ψ, π prin φ^*, ψ^*, π^*.

Funcțiile $\varphi^*(\zeta)$, $\psi^*(\zeta)$ și $\pi^*(\zeta)$ sînt uniforme în vecinătatea punctului $\zeta = \zeta_0$, iar X, Y și Z sînt componentele rezultantei eforturilor exterioare aplicate pe conturul L_0 (sau pe un contur care înconjoară acest punct).

Dezvoltînd aceste funcții în serie de puteri (serii Laurent) în vecinătatea unui punct izolat ζ_0 (unde ele sînt uniforme și deci unde dezvoltările sînt posibile), vom avea

$$\varphi^*(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} (\alpha_p + i\beta_p)(\zeta - \zeta_0)^p, \quad \psi^*(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} (\alpha'_p + i\beta'_p)(\zeta - \zeta_0)^p,$$
$$\pi^*(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} (\alpha''_p + i\beta''_p)(\zeta - \zeta_0)^p. \tag{5}$$

În continuare vom aplica formula (4) din § 53 relativă la momentul principal al tensiunilor în originea coordonatelor

$$\mathfrak{M} = \mathrm{Re}(\varkappa(\zeta) - \zeta\psi(\zeta) - \zeta\bar{\zeta}[\varphi'(\zeta) - \delta\pi'(\zeta) + (1+\delta)\overline{\pi'(\zeta)}])_0^{2\pi} + \mathfrak{N} \tag{6}$$

în care

$$\mathfrak{N} = 2\iint \sigma_{[xy]}\,dx\,dy + \frac{2}{h}\iint (y\sigma_{xz}^{+} - x\sigma_{yz}^{+})\,dx\,dy \tag{7}$$

provine din efectele polare şi cuplajul lateral. Această formulă în care ţinem seama de cele precedente, ne dă, observînd că se aplică pe interiorul conturului L_0,

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{N} = 2\pi\beta'_{-1} + \frac{\varkappa}{\varkappa+\varepsilon}(x_0 Y - y_0 X) - \\ - \left(\varkappa - 1 + \frac{4\gamma\varkappa}{\varkappa+\varepsilon}\right)(x_0 \operatorname{Im} p - y_0 \operatorname{Re} p). \tag{8}$$

Am presupus raza conturului foarte mică. În punctul $\zeta = \zeta_0$, momentul principal are expresia

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 - \mathfrak{N}_0 - (x_0 Y - y_0 X) = 2\pi\beta'_{-1} - \left\{\frac{\varepsilon}{\varkappa+\varepsilon}(x_0 Y - y_0 X) + \right. \\ \left. + \left(\varkappa - 1 + \frac{4\gamma\varkappa}{\varkappa+\varepsilon}\right)(x_0 \operatorname{Im} p - y_0 \operatorname{Re} p)\right\}. \tag{9}$$

Aşadar punctul ζ_0 este punctul de aplicare al forţei concentrate (X, Y) şi al cuplului concentrat $\mathfrak{M}_0 - \mathfrak{N}_0$.

Pentru a determina coeficienţii α_p, β_p, α'_p, β'_p pentru $p < 1$ şi pentru seriile convergente φ^*, ψ^*, coeficienţi care determină singularităţi ale acestor funcţii, apare necesar de a utiliza şi alte condiţii *).

Rezultatele precedente pot fi utilizate şi în cazul forţelor masice. În acest scop, neglijînd Φ^0, Ψ^0, φ^0, ψ^0 în formulele de reprezentare, vom obţine o soluţie particulară corespunzătoare acţiunii unei forţe concentrate aplicate în punctul ζ, dar ţinînd implicit seama de apariţia unor restrîngeri date de cuplele de tensiune.

Deplasarea complexă mediană are expresia ce rezultă din (5), § 51, şi (3) pentru $p = 0$:

$$2\mu(u + iv) = -\varkappa\frac{X + iY}{2\pi(\varkappa+\varepsilon)}\log[(\zeta - \zeta_0)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)] + \\ + \frac{X - iY}{2\pi(\varkappa+\varepsilon)}\frac{\zeta - \zeta_0}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0}, \tag{10}$$

$$+ \frac{kZ}{\pi(\varkappa + 1 + 2\gamma)h}\left\{(2\zeta - \zeta_0)\log(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0) + \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0}\right\}.$$

*) În cadrul exemplelor ce se dau se consideră şi alte treceri la limită ca de exemplu impunînd unei incluziuni circulare într-o placă condiţia de a avea o rază ce tinde la zero pentru forţe şi momente rezultante constante. În general se obţin aceleaşi rezultate ca în procedeul de mai sus.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul forțelor masice distribuite pe anumite regiuni din plan, de forma

$$X(x_0, y_0)\,dx\,dy, \qquad Y(x_0, y_0)\,dx\,dy \tag{11}$$

prin integrarea relațiilor precedente în raport cu x_0 și y_0, obținem soluția particulară corespunzătoare

$$2\mu(u+iv) = \frac{1}{2\pi}\iint\left\{-\frac{\varkappa}{\varkappa+\varepsilon}(X+iY)\log[(\zeta-\zeta_0)\,\overline{\zeta}-\overline{\zeta}_0)] + \right.$$

$$+\frac{X-iY}{\varkappa+\varepsilon}\frac{\zeta-\zeta_0}{\overline{\zeta}-\overline{\zeta}_0}+\frac{2kZ}{(\varkappa+1+2\gamma)h}\left[(2\zeta-\zeta_0)\log(\overline{\zeta}-\overline{\zeta}_0)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-\overline{\zeta}_0}\right]\right\}dx_0\,dy_0. \tag{12}$$

§ 72. Placă infinită cu o incluziune din alt material

În cazul unei incluziuni din alt material situată în interiorul golului circular, apare o presiune uniformă pe peretele incluziunii corespunzînd soluției date în § 62. Tensiunile din interiorul incluziunii vor fi notate cu indicele zero și vor satisface condițiile relative la presiunea pe contur

$$\sigma^0_{xx} = \sigma^0_{yy} = -p, \qquad \sigma^0_{xy} = \sigma^0_{yx} = 0. \tag{1}$$

Conform relațiilor (2) și (4) din § 52 au loc condițiile

$$\sigma^0_{xx} + \sigma^x_{yy} = -2p = T_{xy} = 2[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \gamma\Phi(\zeta) - \delta(\Pi(\zeta) + \overline{\Pi(\zeta)})]^0,$$

$$\sigma^0_{xx} - \sigma^0_{yy} = T_{xx} = -2[\zeta(\overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\Pi'(\zeta)}) + \overline{\Psi(\zeta)}]^0 = 0 \tag{2}$$

cu ajutorul cărora se stabilește forma funcțiilor de reprezentare

$$\Phi(\zeta) = -p/2, \qquad \Psi(\zeta) = 0, \qquad \Pi(\zeta) = 0. \tag{3}$$

Am neglijat termeni care determină deplasări rigide adiționale.

Tensiunile și deplasările raportate la un sistem de coordonate polare au expresiile date mai jos :

$$\sigma^0_{rr} = \sigma^0_{\theta\theta} = -p, \quad \sigma^0_{\theta r} = \sigma^0_{r\theta} = 0, \quad u^0_r = -(\varkappa^0 - 1)\,pr/4\,\mu^0, \quad u^0_\theta = 0, \tag{4}$$

μ^0 și $\varkappa^0$ se referă la materialul din incluziune.

Scanned with OKEN Scanner

Cu ajutorul acestor rezultate se pot trata diferite cazuri de încărcare a plăcii infinite cu incluziune sub presiune. Astfel, în cazul unor nituri introduse prin presiune sau în cazul dilatării termice a incluziunii, se poate considera că inițial raza incluziunii a fost mai mare decît după montaj. Stabilind valoarea presiunii p din condiția de egalitate a razei finale a golului și a incluziunii, rezultă o valoare care permite determinarea cîmpului de tensiuni și deplasări.

Fie R raza orificiului înainte de montaj. e fiind o cantitate de ordinul de mărime al deplasărilor admisibile, vom presupune că $R + e$ este raza finală. Vom nota prin u_r^0, σ_r^0 etc., deplasările, tensiunile etc., referitoare la incluziune. Atunci e va reprezenta diferența deplasărilor bordurilor orificiului și incluziunii:

$$u_r - u_r^0 = e. \tag{5}$$

Aplicînd (4) și (3) din § 68 pentru deplasările în sens radial în incluziune și placă în punctele $r = R$, condiția (5) se exprimă sub forma unei ecuații în p avînd soluția

$$p = 4e\mu\mu^0/[2\mu^0 + \mu(\varkappa^0 - 1)]\, R. \tag{6}$$

Pentru o incluziune rigidă avem $\mu^0 = \infty$ și presupunînd $\varkappa^0$ finit, rezultă

$$u_r = e, \qquad P = 2e\mu/R. \tag{7}$$

Din (3), § 68, mai decurge că în placă apar tensiunile și deplasările

$$\sigma_{rr} = -2e\mu\, R/r^2 = -\sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = 0, \quad u_r = eR/r, \quad u_\theta = 0. \tag{8}$$

§ 73. Placă întinsă cu incluziune introdusă liber sau prin constrîngere

Vom considera soluția (3) și (8) din § 65 pentru care corespund tensiunile și deplasările (5) și (11) din § 65. Vom retranscrie soluția și mărimile asociate sub forma generică

$$\varphi(\zeta) = \frac{p}{4}\left(a\zeta + b\frac{R^2}{\zeta}\right), \qquad \psi(\zeta) = -\frac{p}{2}\left(\zeta + c\frac{R^2}{\zeta} + d\frac{R^4}{\zeta^3}\right),$$
$$\pi(\zeta) = -\frac{p}{2} g\zeta. \tag{1}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care, în cazul plăcii fără incluziune, avem conform (1) și (2) din § 65

$$a = \varepsilon_1 = \frac{\varkappa + 1 + 2\nu\varepsilon}{(1 - \gamma/2)\,(\varkappa + 1)\,(1 + \nu)}, \qquad b = 2/\varepsilon,$$
$$c = 1, \qquad d = -1/\varepsilon, \qquad g = \nu/(\varkappa + 1)\,(1 + \nu). \tag{2}$$

Se deduce

$$\sigma_{rr} = \frac{p}{2}\left\{\frac{1+\varepsilon}{2}a + (\varkappa - 1 + 2\gamma)\,g - c\frac{R^2}{r^2} + \right.$$
$$\left. + \left(1 - 2b\frac{3+\varepsilon}{4}\frac{R^2}{r^2} - 3d\frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\right\},$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p}{2}\left\{\frac{1+\varepsilon}{2}a + (\varkappa - 1 + 2\gamma)\,g + c\frac{R^2}{r^2} - \right.$$
$$\left. - \left(1 + b\frac{1-\varepsilon}{2}\frac{R^2}{r^2} - 3d\frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\right\}, \tag{3}$$
$$\sigma_{\theta r} = -\frac{p}{2}\left\{1 + b\left(1 + \frac{1-\varepsilon}{2}\right)\frac{R^2}{r^2} + 3d\frac{R^4}{r^4}\right\}\sin 2\theta,$$
$$\sigma_{r\theta} = -\frac{p}{2}\left\{1 + b\frac{1+\varepsilon}{2}\frac{R^2}{r^2} + 3d\frac{R^4}{r^4}\right\}\sin 2\theta,$$
$$\sigma_{zz} = p\left\{\frac{1+\varepsilon}{2}\cdot\nu a - [\varkappa + 1 + 2\nu\varepsilon]\,g - (1+\varepsilon)\,\nu b\frac{R^2}{r^2}\cos 2\theta\right\},$$
$$u_r = \frac{p}{8\mu r}\left\{[(\varkappa - 1)\,a + 4g]\,r^2 + 2cR^2 + \right.$$
$$\left. + \left[(\varkappa + 1)bR^2 + 2r^2 + 2d\frac{R^4}{r^2}\right]\cos 2\theta\right\},$$
$$v_\theta = -\frac{p}{8\mu r}\left\{(\varkappa - 1)\,bR^2 + 2r^2 - 2d\frac{R^4}{r^2}\right\}\sin 2\theta,$$
$$W = -\frac{\varkappa + 1}{\mu}\cdot\frac{pg}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru diferite valori ale constantelor se obţin soluţii pentru alte probleme. Vom considera astfel cazul unei incluziuni de acelaşi diametru cu golul în care este situat ($e = 0$) iar materialul incluziunii îl vom presupune rigid în planul median astfel că pe conturul $r = R$ vor fi verificate condiţiile

$$u_r = 0, \qquad u_\theta = 0. \tag{4}$$

Atunci relaţiile din (3) analoge cu (11) din § 65 implică egalităţile

$$\begin{gathered}(\varkappa - 1)\, a + 4g + 2c = 0, \qquad (\varkappa + 1)\, b + 2 + 2d = 0, \\ (\varkappa - 1)\, b + 2 - 2d = 0,\end{gathered} \tag{5}$$

de unde

$$b = -2/\varkappa, \qquad d = 1/\varkappa, \qquad c = -\left(\frac{\varkappa - 1}{2}\, a + 2g\right). \tag{6}$$

Pentru $W = 0$ rezultă $g = 0$ iar pentru $\int_0^{2\pi} \sigma_{zz}\, \mathrm{d}\theta = 0$, rezultă

$$g = \nu(1 + \varepsilon)/2\,(\varkappa + 1 + 2\,\nu\varepsilon). \tag{7}$$

Dacă incluziunea nu este sudată, ci numai introdusă în gol şi dacă între placă şi incluziune nu există frecare, poate avea loc o lunecare liberă ($u_\theta \neq 0$) prin rotaţia incluziunii în gol. Atunci vor avea loc condiţiile

$$u_r = 0, \ \sigma_{\theta r} = 0, \quad (\text{pentru } r = R). \tag{8}$$

În acest caz, (3) implică primele două egalităţi din (5) precum şi următoarea

$$1 + b(1 + \varepsilon)/2 + 3d = 0 \tag{9}$$

de unde

$$\begin{gathered}b = -4/(3\varkappa + 1 + 2\gamma), \\ d = -(\varkappa - \varepsilon)/(3\varkappa + 1 + 2\gamma), \qquad c = -[(\varkappa - 1)a/2 + 2g].\end{gathered} \tag{10}$$

Pentru g putem considera valori ca mai sus.

Pentru ca din punct de vedere fizic problema să aibă sens, va trebui să presupunem că pe conturul $r = R$ nu avem tracţiuni ($\sigma_{rr} \leqslant 0$) care să deslipească incluziunea de placă. Aceasta se întîmplă dacă raza golului este puţin mai mică decît a incluziunii înainte de introducerea ei în gol, astfel ca e să fie nul.

Scanned with OKEN Scanner

§ 74. Întinderea plăcii cu incluziune elastică

Vom considera aceleași funcții de reprezentare pentru placă (1) din § 73, iar pentru incluziune vom utiliza funcțiile

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{p}{4}\left(b_0\zeta + c_0\frac{\zeta^3}{R^2}\right),\quad \psi_0(\zeta) = -\frac{p}{2}d_0\zeta,\quad \pi_0(\zeta) = -\frac{p}{2}g_0\zeta, \qquad (1)$$

în care apar coeficienți reali. Tensiunile și deplasările din placă vor avea forma (3) din § 73. În incluziune aceste mărimi se vor exprima în modul următor :

$$\sigma_{rr}^0 = \frac{p}{2}\left\{\frac{1+\varepsilon^0}{2}b_0 + 2\delta\, g_0 + \left(d_0 - \frac{3}{4}(1-\varepsilon^0)\,c_0\frac{r^2}{R^2}\right)\cos 2\theta\right\},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^0 = \frac{p}{2}\left\{\frac{1+\varepsilon^0}{2}b_0 + 2\delta\, g_0 + \left[d_0 + \frac{9+3\varepsilon^0}{2}\cdot\frac{r^2}{R^2}\right]\cos 2\theta\right\},$$

$$\sigma_{\theta r}^0 = \frac{p}{2}\left[3\,\frac{1+\varepsilon^0}{2}\,c_0\frac{r^2}{R^2} - d_0\right]\sin 2\theta, \qquad (2)$$

$$\sigma_{r\theta}^0 = \frac{p}{2}\left[3\,\frac{3-\varepsilon^0}{2}\,c_0\frac{r^2}{R^2} - d_0\right]\sin 2\theta,$$

$$\sigma_{zz}^0 = p\left\{\frac{1+\varepsilon^0}{2}\cdot\nu^0\, b_0 - [\varkappa^0+1+2\nu^0(1-\gamma^0)]\,g_0 + \frac{3\nu^0}{2}(1-\gamma^0)\,c_0\frac{r^2}{R^2}\cos 2\theta\right\},$$

$$u_r^0 = \frac{pr}{8\mu^0}\left\{(\varkappa^0-1)\,b_0 + \left[(\varkappa^0-3)\,c_0\frac{r^2}{R^2} + 2d_0 + 4g_0\right]\cos 2\theta\right\},$$

$$v_\theta^0 = \frac{pr}{8\mu^0}\left\{(\varkappa^0+3)\,c_0\frac{r^2}{R^2} - 2d_0 + 4g_0\right\}\sin 2\theta,$$

$$W = -\frac{\varkappa^0+1}{\mu}\,\frac{p}{2}\,g_0.$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul în care incluziunea este în contact cu placa, de exemplu prin sudare, vor avea loc condiţiile pe conturul $r = R$

$$\sigma_{rr} = \sigma^0_{rr},\ \sigma_{\theta r} = \sigma^0_{\theta r},\ u_r = u^0_r,\ u_\theta = u^0_\theta,\ W = W^0, \quad (r = R) \tag{3}$$

ceea ce implică, în baza formulelor (3) din § 73 şi (2), egalităţile

$$((1 + \varepsilon^0)/2)b_0 + 2\delta^0 g_0 = ((1 + \varepsilon)/2)\ \varepsilon_1 - c + (\varkappa - 1 + 2\gamma)g,$$

$$d_0 - 3(1 - \varepsilon^0)c_0/2 = 1 - 2b(3 + \varepsilon)/4 - 3d,$$

$$3c_0(1 + \varepsilon^0)/2 - d_0 = -1 - b(1 - (1 + \varepsilon)/2) - 3d,$$

$$b_0(\varkappa^0 - 1)/\mu^0 = [(\varkappa - 1)\varepsilon_1 + 2c + 4g]/\mu, \tag{4}$$

$$[c_0(\varkappa^0 - 3) + 2d_0 + 4g_0]/\mu^0 = [(\varkappa + 1)b + 2 + 2d]/\mu,$$

$$[c_0(\varkappa^0 + 3) - 2d_0 + 4g_0]/\mu^0 = -[(\varkappa - 1)b + 2 - 2d]/\mu,$$

$$(\varkappa^0 + 1)g_0/\mu^0 = (\varkappa + 1)g/\mu.$$

Acest sistem are următoarele soluţii

$$g_0 = \frac{\varkappa + 1}{\varkappa^0 + 1}\ \frac{\mu^0}{\mu}\ g,$$

$$c = \frac{[(1 + \varepsilon)\mu(\varkappa^0 - 1) - (1 + \varepsilon^0)\mu^0(\varkappa - 1)]\varepsilon_1/2}{(1 + \varepsilon^0)\mu^0 + \mu(\varkappa^0 - 1)} +$$

$$+ \frac{[\mu(\varkappa^0 - 1)[\varkappa - 1 + 2\gamma - (\varkappa^0 - 1 + 2\gamma^0)(\varkappa + 1)\mu^0/(\varkappa^0 + 1)\mu] - 2(1 + \varepsilon^0)\mu^0]g}{(1 + \varepsilon^0)\mu^0 + \mu(\varkappa^0 - 1)},$$

(5)

$$b_0 = \mu_0 \frac{(\varkappa + \varepsilon)\varepsilon_1 + 2[\varkappa + 1 + 2\gamma - (\varkappa^0 - 1 + 2\gamma^0)(\varkappa + 1)\mu^0/(\varkappa^0 + 1)\mu]g + 4g}{(1 + \varepsilon^0)\mu^0 + \mu(\varkappa^0 - 1)},$$

$$b = -2(\mu_0 - \mu)\left/\left[\frac{1 + 2\gamma^0(2\gamma + 3)}{\varepsilon^0}\mu + \mu^0\varkappa\right],\right.$$

$$d = \frac{(\mu_0 - \mu)\cdot \dfrac{\mu_0 + (1 + 2\gamma/3)\mu\varkappa^0/\varepsilon^0}{\mu^0\varkappa + [1 + 2\gamma^0(2\gamma + 3)]\mu/\varepsilon^0} + 2\dfrac{\varkappa + 1}{\varkappa^0 + 1}\mu_0 g}{\mu\varkappa^0/\varepsilon^0 + \mu^0},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$c_0 = -\frac{1}{\frac{\mu\varkappa^0}{\varepsilon^0}+\mu^0}\left\{\frac{4\gamma(\mu^0-\mu)\mu^0}{3\left[\mu^0\varkappa+\frac{1+2\gamma^0(2\gamma+3)}{\varepsilon^0}\mu\right]}+4\frac{\varkappa+1}{\varkappa^0+1}\mu^0 g\right\},$$

$$d_0 = \left\{(\varkappa+1-2\gamma^0\varkappa)\mu^0+2\gamma^0(3\mu^0+2\gamma\mu)-\frac{2\gamma(\mu^0-\mu)\mu^0\varepsilon^0}{\mu\varkappa^0+\mu^0\varepsilon^0}\right\}:$$

$$:\{[1+2\gamma^0(2\gamma+3)]\mu+\mu^0\varkappa\varepsilon^0\}-6\frac{\varkappa+1}{\varkappa^0+1}\frac{\mu^0 g}{\mu\varkappa^0+\mu^0\varepsilon^0}.$$

Pentru $\mu^0=\varkappa^0=\infty$, rezultă valori pentru o incluziune rigidă. Pentru $\gamma^0=$ o incluziunea nu prezintă efecte de polarizare iar pentru $\mu^0=0$, $\gamma^0=0$, $\varkappa^0=0$, rezultă cazul plăcii cu gol circular. Dacă $\mu=\mu^0$, $\gamma=\gamma^0$, $\varkappa=\varkappa^0$, atunci placa devine simplu conexă și omogenă iar dacă în plus avem $g=0$, au loc relațiile

$$c=b=d=c_0=0, \qquad b_0=d_0=1. \tag{6}$$

Funcțiile de reprezentare se reduc la cele corespunzătoare unei plăci simplu conexe

$$\varphi(\zeta)=\frac{p}{4}\zeta,\quad \psi(\zeta)=-\frac{p}{2}\zeta,\quad \pi_0(\zeta)=0.$$

Componentele mediane al tensorului tensiunii în coordonate carteziene sînt următoarele, după cum rezultă din (3), (4), § 52,

$$\sigma_{xx}=\frac{p}{2}\left\{b_0+d_0+(\varkappa-1+2\gamma)g_0+3c_0\frac{r^2}{R^2}\left[\frac{1+\varepsilon}{2}\cos 2\theta-1\right]\right\},$$

$$\sigma_{yy}=\frac{p}{2}\left\{b_0-d_0+(\varkappa-1+2\gamma)g_0+3c_0\frac{r^2}{R^2}\left[\frac{1+\varepsilon}{2}\cos 2\theta-1\right]\right\}, \tag{7}$$

$$\sigma_{xy}=-\sigma_{yx}=\frac{3\gamma}{2}p\,c_0\frac{r^2}{R^2}\sin 2\theta.$$

Pentru $c_0=0$, tensiunile nenule sînt cele normale și sînt constante.

În cazul în care nu apare frecare între placă și incluziune, vom impune condițiile

$$\sigma_{rr}=\sigma^0_{rr},\quad \sigma^0_{\theta r}=0,\quad u_r=u^0_r,\quad W=W^0,\ (r=R) \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru care, din (3) de la § 73 și (2), rezultă condițiile

$$\frac{1+\varepsilon^0}{2} b_0 + (\varkappa^\circ - 1) + 2\gamma^0) g_0 = \frac{1+\varepsilon}{2} \varepsilon_1 - c + (\varkappa - 1 + 2\gamma) g,$$

$$d_0 - 3\gamma^0 c_0 = 1 - (2 - \gamma) b = 3d,$$

$$1 + (1 + \gamma)\, b + 3d = 0,\ 3(1 + \varepsilon^0)\, c_0/2 - d_0 = 0,$$

$$b_0(\varkappa^0 - 1)/\mu^0 = [(\varkappa - 1)\, \varepsilon_1 + 2c + 4g\ ]/\mu,$$

$$[c_0(\varkappa^0 - 3) + 2d_0 + 4g_0]/\mu_0 = [b(\varkappa + 1) + 2 + 2d]/\mu,$$

$$(\varkappa_0 + 1)\, g_0/\mu^0 = (\varkappa + 1) g/\mu. \tag{9}$$

Se deduc soluțiile

$$g_0 = \frac{\varkappa + 1}{\varkappa_0 + 1} \frac{\mu^0}{\mu} g,$$

$$b_0 = \mu^0 \frac{\{(\varkappa+\varepsilon)\varepsilon_1 + 2\,[\varkappa+1+2\gamma - (\varkappa^0 - 1 + 2\gamma^0)\,(\varkappa+1)\,\mu^0/(\varkappa^0+1)\,\mu]g\}}{(1 + \varepsilon^0)\,\mu^0 + \mu(\varkappa^0 - 1)}, \tag{10}$$

$$c = \frac{\mu(\varkappa^0 - 1)(1 - \gamma) - \mu^0(\varkappa - 1)(1 - \gamma^0)}{(1 + \varepsilon^0)\,\mu^0 + \mu(\varkappa^0 - 2)} +$$

$$+ g\,\{\varkappa - 1 + 2\gamma - (\varkappa + 1 + 2\gamma)\,(1 + \varepsilon^0)\,\mu^0/[(1 + \varepsilon^0)\,\mu^0 + \mu(\varkappa^0 - 1)] +$$

$$+ (\varkappa^0 - 1 + 2\gamma^0 - (\varkappa^0 + 1 + 2\gamma^0)(1+\varepsilon^0)\mu^0(\varkappa+1)\,\mu^0/[(1 + \varepsilon^0)\,\mu^0 + \mu(\varkappa^0 -$$

$$- 1)](\varkappa^0 + 1)\,\mu\},$$

$$b = \frac{2\,\{\mu(\varkappa^0 + 3\varepsilon^0) - 2\mu^0\,[1 + (\varkappa + 1)\,g/(\varkappa^0 + 1)\varepsilon^0\}}{\mu(\varkappa^0 + 3\varepsilon^0) + \mu^0(3\varkappa + 1)\,\varepsilon^0},$$

$$c_0 = 2\mu^0 \frac{\varkappa + 1 - 2(\varkappa + 1)\,g/3(\varkappa^0 + 1)}{\mu(\varkappa^0 + 3\varepsilon^0) + \mu^0(3\varkappa + 1)\,\varepsilon^0}, \tag{11}$$

$$d_0 = 6\varepsilon^0\mu^0 \frac{\varkappa + 1 - 2(\varkappa + 1)\,g/3(\varkappa^0 + 1)}{\mu(\varkappa^0 + 3\varepsilon^0) + \mu^0(3\varkappa + 1)\,\varepsilon^0},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$d = -\{\mu[\varkappa^0 + 3\varepsilon^0](1 + 2\gamma/3) + \varepsilon^0\mu^0[\varkappa - 1 - 4\gamma/3 - 2(2 + 2\gamma)(\varkappa + 1)g/3(\varkappa^0 + 1)\}/\{\mu[\varkappa^0 + 3\varepsilon^0] + \mu^0(3\varkappa + 1)\varepsilon^0\}.$$

Pe anumite porțiuni ale zonei de contact apar întinderi și deci desprinderi astfel că tensiunile σ_{rr}, σ_{0r} ar trebui să se anuleze. Această contradicție se înlătură suprapunînd o soluție corespunzînd introducerii prin frecare a unei incluziuni.

§ 75. Prima problemă fundamentală pentru coroana circulară

În cazul unui domeniu D mărginit de cercurile L_1 și L_2 de raze R_1, R_2, cu centrele în origină, vom presupune cunoscute tensiunile pe conturul format de cercurile L_1 și L_2 ca funcții date de unghiul θ și razele $R = R_1$ sau R_2. Fie atunci dezvoltările în serie Fourier

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{0r} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A'_p e^{ip\theta}, \quad \sigma_{rr}^{+} = \mathrm{Re} \sum_{p=-\infty}^{\infty} B'_p e^{ip\theta}, \quad (L_1), \tag{1}$$

$$\sigma_{rr} - i\sigma_r = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A''_p e^{ip\theta}, \quad \sigma_{rr}^{+} = \mathrm{Re} \sum_{p=-\infty}^{\infty} B''_p e^{ip\theta}, \quad (L_2).$$

Condițiile la limită (6) din § 59 se vor exprima astfel

$$\varepsilon\overline{\Phi(\zeta)} + \Phi(\zeta) - \sigma(\pi(\zeta) + \overline{\pi(\zeta)}) - e^{2i\theta}[\overline{\zeta}(\Phi'(\zeta) + \pi'(\zeta)) + \Psi(\zeta)] = \sum_{-\infty}^{\infty} \begin{matrix} A'_p \\ A''_p \end{matrix} \cdot e^{ip\theta};$$

$$(1 + \delta)\frac{h}{k}\mathrm{Re}\, e^{2i\theta}\Pi'(\zeta) = \mathrm{Re} \sum_{-\infty}^{\infty} \begin{matrix} B'_p \\ B''_p \end{matrix} e^{ip\theta}, \quad \left(r = \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}\right).$$

În baza descompunerilor (2) din § 55, vom avea în domeniul multiplu conex:

$$\Phi(\zeta) = \Phi(\log\zeta + \Phi^*(\zeta), \quad \Pi(\zeta) = \Pi\log\zeta + \Pi^*(\zeta) \tag{3}$$

Φ fiind o constantă iar $\Phi^*(\zeta)$ și $\Pi^*(\zeta)$ funcții olomorfe în interiorul coroanei circulare, funcții dezvoltabile în serie Laurent o dată cu funcția $\Psi(\zeta)$. Așadar

$$\Phi(\zeta) = \Phi\log\zeta + \sum_{-\infty}^{\infty} \Phi_p \zeta^p, \quad \Psi(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Psi_p \zeta^p,$$

$$\Pi(\zeta) = \Pi\log\zeta + \sum_{-8}^{\infty} \Pi_p \zeta^p. \tag{4}$$

Pentru ca deplasările să fie uniforme, va trebui să fie îndeplinite condiţiile (11) din § 55, care se scriu în cazul mediului cuplat cu un rigid în modul următor;

$$\operatorname{Re} i\Pi = 0,\ \Phi = 0,\ \varkappa\Phi_{-1} + \overline{\Psi}_{-1} = \Pi_{-1}. \tag{5}$$

Dacă aceste condiţii nu sînt îndeplinite, intervin anumite neuniformităţi care corespund fenomenului fizic al unor dislocaţii de un tip mai general decît cel considerat uzual în teoria clasică. În acest caz vom presupune Φ, Ψ_p, Π_p, Π arbitrare şi introducînd expresiile (4) în (5), vom deduce sistemul

$$(1+\delta)\frac{h}{k}\operatorname{Re} e^{2i\theta}\left[\frac{\Pi}{r}e^{-i\theta} + \sum_{-\infty}^{\infty} p\Pi_p r^{p-1} e^{i(p-1)\theta}\right] = \operatorname{Re}\sum_{-\infty}^{\infty}\begin{matrix}B'_p\\ B''_p\end{matrix} e^{ip\theta},$$

$$\Phi(\log r + i\theta) + \varepsilon\overline{\Phi}(\log\rho - i\theta) + \sum_{-\infty}^{\infty} r^p(\Phi_p e^{ip\theta} + \varepsilon\overline{\Phi}_p e^{-ip\theta}) -$$

$$-\delta[(\Pi+\overline{\Pi})\log r + (\Pi-\overline{\Pi})i\theta] + \sum_{-\infty}^{\infty} r^p(\Pi_p e^{ip\theta} + \overline{\Pi}_p e^{-ip\theta}) -$$

$$-e^{2i\theta}\left[re^{-i\theta}\left(\frac{\Phi+\Pi}{r}e^{-i\theta} + \sum_{-\infty}^{\infty} p(\Phi_p+\Pi_p) r^p e^{i(p-1)\theta}\right) + \right. \tag{6}$$

$$\left. + \sum_{-\infty}^{\infty}\Psi_p r^p e^{ip\theta}\right] = \sum_{-\infty}^{\infty}\begin{matrix}A'_p\\ A''_{ip}\end{matrix} e^{ip\theta},\ \left(r = \begin{matrix}R_1\\ R_2\end{matrix}\right).$$

Egalînd termenii înmulţiţi cu $i\theta$ obţinem

$$\Phi - \overline{\Phi} + \gamma\overline{\Phi} - \delta(\Pi - \overline{\Pi}) = 0 \tag{7}$$

şi deci pentru $\gamma = 0$ (în absenţa cuplajului polar), Φ este complexă iar pentru $\gamma \neq 0$, pentru ca soluţia să fie compatibilă, Φ va trebui să fie imaginar. Pentru Π reală, rezultă Φ reală dacă $\gamma \neq 0$ şi Φ nulă dacă $\gamma = 0$. Prin urmare avem de considerat situaţiile din tabloul de mai jos

Funcţia Φ

γ \ Π	reală	complexă
0	reală	complexă
$\neq 0$	0	imaginară

(8)

Scanned with OKEN Scanner

Conform relației (9) din § 54 avem condițiile

$$\varepsilon\Phi_0 + \bar{\Phi}_0 = \delta(\Pi_0 + \Pi_0),\ \Pi_0 = \bar{\Pi}_0 \tag{9}$$

și deci Π_0 este real iar dacă $\gamma \neq 0$, atunci, Φ_0 este de asemenea real. Pentru $\gamma = 0$, deoarece partea imaginară a lui Φ_0 nu joacă un rol în determinarea tensiunilor, această parte se va presupune nulă.

În cele ce urmează menținem constanta Φ nulă în calculele care le efectuăm, presupunînd-o complexă, conform tabelului de mai sus. Astfel, identificînd coeficienții exponențialelor în θ, rezultă ecuațiile algebrice

$$(\Phi+\varepsilon\bar{\Phi})\log R_1+(2-\gamma)\Phi_0-\Phi-\Pi-\Psi_{-2}R_2^{-2}-\delta[(\Pi+\bar{\Pi})\log R_1+2\Pi_0]=A_0',$$

$$(\Phi+\varepsilon\bar{\Phi})\log R_2+(2-\gamma)\Phi_0-\Phi-\Pi-\Psi_2R^2{}_2-\delta[(\Pi+\bar{\Pi})\log R_2+2\Pi_0]=A_0'',$$

$$[(1-p)\Phi_p-(\delta+p)\Pi_p]R_1^p+(\varepsilon\bar{\Phi}_{-p}-\delta\bar{\Pi}_{-p})R_1^{-p}-\Psi_{p-2}R_1^{p-2}=A_p', \tag{10}$$

$$[(1-p)\Phi_p-(\delta+p)\Pi_p]R_2^p+[\varepsilon\bar{\Phi}_{-p}-\delta\bar{\Pi}_{-p}]R_2^{-p}-$$

$$-\Psi_{p-2}R_2^{p-2}=A_p'',\ (1+\delta)\frac{h}{k}\frac{\Pi}{R_1}=B_1'+\bar{B}_{-1}',$$

$$(1+\delta)\frac{h}{k}p\Pi_pR_1^{p-1}=B_{p+1}',\ (1+\delta)\frac{h}{k}\frac{\Pi}{R_2}=B_1''+\bar{B}_{-1}'',$$

$$(1+\delta)\frac{h}{k}p\Pi_pR_2^{p-1}=B_{p+1}'',\ (p\neq 0).$$

Din primele două ecuații rezultă soluția

$$\Phi_0=\frac{\Phi+\Pi+2\delta\Pi_0}{2-\gamma}+\frac{1}{(2-\gamma)(R_2^2-R_1^2)}\{A_0''R_2^2-A_0'R_1^2-$$

$$-[\Phi+\varepsilon\bar{\Phi}-\delta(\Pi+\bar{\Pi})][R_2^2\log R_2-R_1^2\log R_1]\} \tag{11}$$

Dacă Φ (și deci și Π) este reală, pentru ca această soluție să fie reală, va fi necesar ca

$$\mathrm{Im}\,(A_0''R_2^2-A_0'R_1^2)=0. \tag{12}$$

Scanned with OKEN Scanner

În baza unor calcule elementare bazate pe relațiile (1) din § 60, se poate arăta că această condiție exprimă condiția de anulare a momentului eforturilor aplicate pe componenta elastică a ansamblului cuplat*).

Prin împărțire cu R_1^{p-2} și R_2^{p-2} a termenilor ecuațiilor relative la A_p' și A_p'', apoi prin scăderea lor și trecerea la conjugata ecuației rezultate, decurg condițiile mai simple

$$(1-p)(R_2^2-R_1^2)\,\Phi_p+(R_2^{-2p+2}-R_1^{-2p+p})\,\varepsilon\bar{\Phi}_{-p}=A_p, \qquad (13)$$
$$(R_2^{2p+2}-R_1^{2p+2})\,\varepsilon\Phi_p+(1+p)(R_2^2-R_1^2)\,\varepsilon\bar{\Phi}_{-p}=A_{-p},$$

unde $p\neq 0$ iar

$$A_p=A_p''\,R_2^{-p+2}-A_p'\,R_1^{-p+2}+(1-p)(R_2^2-R_1^2)(\delta+p)\,\Pi_p+ \qquad (14)$$
$$+(R_2^{-2p+2}-R_1^{-2p+2})\,\delta\bar{\Pi}_{-p}.$$

În ultima ecuație din (13) am înlocuit p cu $-p$ ceea ce e posibil deoarece $p=\pm 1,\ \pm 2,\ldots$ Soluțiile sistemului rezultat sînt

$$\Phi_p=[(1+p)(R_2^2-R_1^2)A_p-\varepsilon(R_2^{-2p+2}-R_1^{-2p+2})A_{-p}]/D_p, \qquad (15)$$
$$\bar{\Phi}_{-p}=[(1-p)(R_2^2-R_1^2)A_p-\varepsilon(R_2^{-2p+2}-R_1^{-2p+2})A_p]/D_p, \quad (p\neq 0)$$

D_p fiind determinantul sistemului

$$D_p=(1-p^2)(R_2^2-R_1^2)^2-\varepsilon^2(R_2^{2p+2}-R_1^{2p+2})(R_2^{-2p+2}-R_1^{-2p+2})\pm R_1^4 f(\xi) \qquad (16)$$

iar

$$\xi=(R_2/R_1)^2>1,\ f(\xi)=(1-p^2)(\xi-1)^2-\varepsilon^2(\xi^{p+1}-1)(\xi^{-p+1}-1). \qquad (17)$$

Din (10) mai rezultă

$$\Pi=\frac{kR_1}{(1+\delta)h}(B_1'+\bar{B}_1'),\ R_1B_1'=R_2B_1'',$$

$$\Pi_p=\frac{k}{(1+\delta)hpR_1^{p-1}}B_{p+1}',\ B_{p+1}'/R_1^{p-1}=B_{p+1}''/R_2^{p-1} \qquad (18)$$

*) Avem

$$\int_0^{2\pi}(\sigma_{rr}+i\sigma_{\theta r}e^{i\theta}R_1\,d\theta=-2\pi R_1A_0',\ \int_0^{2\pi}(\sigma_{rr}+i\sigma_{\theta r})e^{i\theta}R_2\,d\theta=2\pi R_2A_0''.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (10) deducem și expresiile constantelor

$$\Psi_{p-2} = \frac{A_p'' R_2^p - A_p' R_1^p + (p-1)(R_2^{2p} - R_1^{2p})[\Phi_p - (\delta + p)\Pi_p]}{R_2^{2p-2} - R_1^{2p-2}} \tag{19}$$

$$\Psi_{-2} = \frac{-(A_0'' - A_0') + [\Phi + \varepsilon\bar{\Phi} - \delta(\Pi + \bar{\Pi})]\log(R_2/R_1)}{R_2^{-2} - R_1^{-2}}.$$

În cele ce urmează admitem condițiile (5).

Observăm că pentru $p = 1$, expresia ce se obține din (19) pentru constanta Ψ_{-1} este mărginită numai dacă

$$A_1 = 0. \tag{20}$$

Pentru a interpreta această condiție vom calcula conform (1) rezultanta tensiunilor aplicate pe conturul coroanei

$$\int_{L_2 - L_1} R(\sigma_{rr} - i\sigma_{\theta r})\,d\theta = 2\pi A_1.$$

Prin urmare, condiția exprimă echilibrul rezultantelor tensiunilor aplicate pe contur.

Vom calcula constanta Ψ_{-1} utilizînd numai una din ecuațiile (10)

$$\Psi_{-1} = \varepsilon\bar{\Phi}_{-1} - \delta\bar{\Pi}_{-1} - A_1' R_1 - (1+\delta)\Pi_1 R_1^2 \tag{22}$$

și deci, conform relațiilor (5),

$$\Psi_{-1} = -\varkappa[A_1' R_1 + (\delta - \varepsilon/\varkappa)\bar{\Pi}_{-1} + (1+\delta)\Pi_1 R_1^2]/(\varkappa + \varepsilon),$$
$$\Phi_{-1} = [\bar{A}_1' R_1 + (\delta - \varepsilon/\varkappa)\Pi_{-1} + (1+\delta)\bar{\Pi}_1 R_1^2]/(\varkappa + \varepsilon) + \Pi_{-1}/\varkappa. \tag{23}$$

Din (13_2) mai rezultă constanta

$$\Phi_1 = \left\{\bar{A}_{-1} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2}\left[\frac{A_1' R_1 + (\delta - \varepsilon/\varkappa)\bar{\Pi}_{-1} + (1+\delta)\Pi_1 R_1^2}{\varkappa + \varepsilon} + \frac{\bar{\Pi}_{-1}}{\varkappa}\right]\right\} \Big/ \varepsilon(R_2^4 - R_1^4). \tag{24}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se constată că nu apar alte nedeterminări decît cele semnalate. Astfel, deducem că D_p se anulează pentru $p = 0$ (care nu interesează) și pentru $p = 1$. Într-adevăr, deoarece în (17) avem

$$f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0,$$

$$f^{IV}(\xi) = p(p+1)(p-1)[(p-2)\xi^{p-3} + (p+2)\xi^{-p-3}], \qquad (25)$$

rezultă că pentru $|p| \geqslant 2$, funcția $f^{IV}(\xi)$ este pozitivă și deci, pentru $\xi > 1$, au loc condițiile $f'''(\xi)$, $f''(\xi)$, $f'(\xi)$, $f(\xi) > 0$.

Atunci în (15) intervin nedeterminări pentru a_1, a_{-1} care se ridică în baza condiției (20) și a relațiilor (23) și (24)*).

§ 76. Diferite cazuri de încărcare ale coroanei circulare

a) *Inel supus la presiune.* Fie p_1 și p_2 presiunile pe conturul L_1 și L_2

$$\sigma_{rr} = -p_1, p_2; \quad \sigma_{\theta r} = 0, \quad \sigma_{zr}^{+} = 0, \quad (L_1, L_2) \qquad (1)$$

Coeficienții din (1), § 75, se reduc la următorii:

$$A_0' = -p_1, \quad A_0'' = -p_2. \qquad (2)$$

---

*) Convergența seriilor pentru funcțiile $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$, $\Phi'(\zeta)$, $\Pi(\zeta)$, $\Pi'(\zeta)$, uniformă și absolută în coroana circulară și pe frontiera acesteia, este asigurată și de convergența seriilor parțiale

$$\sum_{p=1}^{\infty} |\Phi_p| R_2^p, \quad \sum_{p=1}^{\infty} p|\Phi_p| R_2^{p-1}, \quad \sum_{p=1}^{\infty} |\Psi_p| R_2^p,$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} |\Phi_{-p}| R_1^{-p}, \quad \sum_{p=1}^{\infty} p|\Phi_{-p}| R_1^{-p-1}, \quad \sum_{p=1}^{\infty} |\Psi_{-p}| R_1^{-p},$$

i

a r aceasta din urmă are loc dacă σ_{rr}, $\sigma_{\theta r}$ și σ_{zr}^{+} pe conturul L_1 și L_2 au derivate continui în raport cu θ de ordinul doi satisfăcînd condițiile Dirichlet. În acest caz avem

$$|A_p'| < C/|p^3|, \quad |A_p''| < C/|p|^3, \quad (p = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$|B_p'| < C/|p|^3, \quad |\Phi_p| R_2^p < C/p^3, \quad |\Psi_p| R_2^p < C/p^2,$$

$$|\Phi_{-p}| R_1^{-p} < C/p^3, \quad |\Psi_{-p}| R_1^{-p} < C/p^2, \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

ceea ce atrage convergența seriilor precedente.

Scanned with OKEN Scanner

Constantele (11) și $(19)_2$ vor fi singurele nenule

$$\Phi_0 = -\frac{p_2 R_2^2 - p_1 R_1^2}{(2-\gamma)(R_2^2 - R_1^2)} + \frac{2\delta}{2-\gamma}\Pi_0, \qquad \Psi_{-2} = (p_2 - p_1)\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{3}$$

Funcțiile de reprezentare sînt deci $\Phi(\delta) = \Phi_0$, $\Psi(\delta) = \Psi_2/\delta^2$, $\Pi = \Pi_0$ iar tensiunile totale (5) din § 64 sînt următoarele, identice cu cele ale lui Lamé,

$$\begin{matrix}\sigma_{rr}\\ \sigma_{\theta\theta}\end{matrix} = (2-\gamma)\Phi_0 \mp \frac{\Psi_{-2}}{r^2} = -\left[p_2 R_2^2 - p_1 R_1^2 \pm \right.$$

$$\left. \pm (p_2 - p_1)\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\right] \Big/ (R_2^2 - R_1^2) + 2\delta\Pi_0, \tag{4}$$

$$\sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{zz} = -2\nu\frac{p_2 R_2^2 - p_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + 2(\varkappa+1)(1+\nu)\Pi_0, \tag{5}$$

$$W = (\varkappa+1)\Pi_0/\mu.$$

Așadar $\Pi_0 = 0$ nu avem deplasări transversale iar pentru

$$\Pi_0 = \nu_1 \frac{p_2 R_2^2 - p_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{(\varkappa+1)(1+\nu)}, \tag{6}$$

nu avem tensiuni normale în sens transversal, astfel că

$$\begin{matrix}\sigma_{rr}\\ \sigma_{\theta\theta}\end{matrix} = -\left[(1-2\nu_1\delta)(p_2 R_2^2 - p_1 R_1^2) \pm (p_2 - p_1)\frac{R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\right]\frac{1}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{7}$$

Deoarece $2\nu_1\delta = \nu_1(\varkappa - 1 - 2\gamma) < \nu$, diferența care apare datorită acestui coeficient are un ordin de mărime proporțional cu coeficientul 2.

b) *Dislocație. Deplasările multiforme ale coroanei circulare.* Vom considera rezultatele obținute pentru coroana circulară fără restricțiile (5) din § 75, pentru care constantele nu sînt complet determinate dar apar anumite multiformități ale deplasărilor. Fie astfel L' un drum închis trecînd prin punctul avînd sensul pozitiv invers mersului acelor de ceas

Scanned with OKEN Scanner

sornic. Funcția complexă a deplasărilor va înregistra creșterea (vezi (1) din § 61),

$$(u + iv)_{L'} = \frac{i\pi}{\mu}[(\varkappa + 1)\,\Phi_\zeta + \varkappa\Phi_{-1} + \overline{\Psi}_{-1} - \Pi_{-1}],$$

$$(W)_{L'} = \pi i \frac{\varkappa + 1}{\mu}(\Pi - \overline{\Pi}), \tag{8}$$

Φ_k, Ψ_k, Π_k fiind coeficienții considerați ai dezvoltărilor (4) din § 75.

Pentru acest caz apare posibil de utilizat aceeași interpretare fizică ca și în teoria clasică a elasticității. Pentru aceasta să secționăm inelul ca în figura 83, îndepărtînd partea hașurată în care corpul rezultat fiind simplu conex, funcțiile deplasărilor vor fi uniforme, iar Φ, Ψ vor corespunde unei anumite stări elastice cu tensiuni pe conturul inelului și pe fețele secțiunii făcute. În acest fel, pornind de la o soluție dată putem trata cazul unei bare circulare în sensul obișnuit.

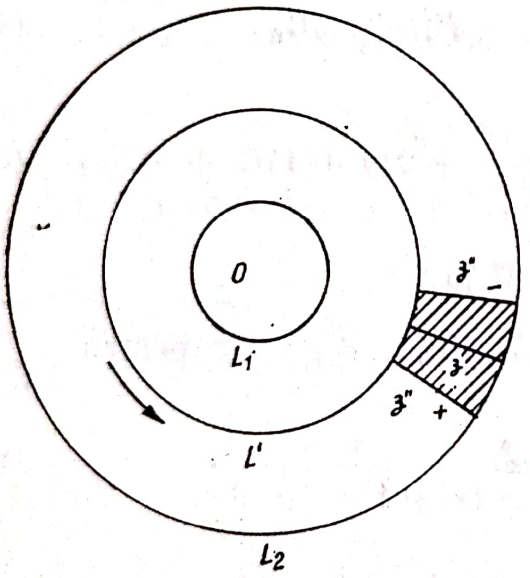


Fig. 83

Dacă însă considerăm coroana multiplu conexă, vom efectua o tăietură trecînd prin punctul ζ (fig. 83) cu marginile (+, −). Atunci vom avea prin parcurgerea drumului L' următoarele diferențe luate de deplasări pe cele două margini

$$u^+ - u^- = -\,\mathrm{d}y + a,\quad v^+ - v^- = \mathrm{d}x + b,\quad W^+ - W^- = c \tag{9}$$

în a căror expresie intervin constantele determinate de (8)

$$d = \pi A\,(\varkappa + 1)/\mu,\quad a + ib = \pi i\,(\varkappa\Phi_{-1} + \Psi_{-1} - \Pi_{-1})/\mu,$$

$$c = \pi i\,(\varkappa + 1)\,(\Pi - \overline{\Pi})/\mu. \tag{10}$$

(u^+, v^+, w^+), (u^-, v^-, w^-) corespund deplasărilor punctului ζ considerat succesiv pe cele două margini presupuse de data aceasta sudate după îndepărtarea fîșiei subțiri (hașurată în figură). Aceasta este în concordanță cu modul de tratare al deplasărilor multiforme și dislocațiilor în (2) din § 61. În acest sens se presupune că marginile trecînd prin ζ', ζ'' ale tăieturii (fig. 83) au fost congruente înainte de deformație iar apoi,

printr-o mișcare rigidă de rotație d în jurul originii și de translație a, b, c, au fost sudate. Aici a, b, c reprezintă măsuri ale unei dislocări de material cu ajutorul cărora deformarea corpului este complet determinată. Cu ajutorul metodei de rezolvare date mai înainte pentru coroana circulară în care nu se consideră condițiile de uniformitate ale deplasărilor (5) din § 75, acestea fiind înlocuite cu cele date mai sus pentru creșterile $u^+ - u^-$, $v^+ - v^-$, $w^+ - w^-$, se obține determinarea constantelor.

Astfel, pentru o coroană circulară fără încărcări pe circumferințele L_1, L_2 (pentru $N - iT = 0$), vom avea $A'_p = A''_p = 0$, $B'_p = B''_p = 0$, (p arbitrar), iar relațiile de mai sus se scriu astfel

$$\Phi = \mu d/\pi(\varkappa + 1),\ \varkappa\Phi_{-1} + \overline{\Psi}_{-1} - \Pi_{-1} = \mu(a + ib)/\pi i. \tag{11}$$

Mai adăugăm relația (22) din § 75 și cele ce rezultă din (18), § 75 :

$$\varepsilon\Phi_{-1} - \overline{\Psi}_{-1} - \delta\Pi_{-1} = 0,\ \Pi_{-1} = -kR_1^2 B'_0/(1+\delta)h = 0, \tag{12}$$

$$\Pi = kR_1(B'_1 + \overline{B}'_1)/(1+\delta)h = 0.$$

Soluțiile ce se mai obțin sînt

$$\Phi_{-1} = \mu(a + ib)/\pi i(\varkappa + \varepsilon),\ \Psi_{-1} = \varepsilon i\mu(a - ib)/\pi(\varkappa + \varepsilon), \tag{13}$$

$$c = \pi(\varkappa + 1)kR_1(B'_1 + \overline{B}'_{-1} - \overline{B}'_1 - B'_{-1})/i\mu(1+\delta)h = 0.$$

Alte rezultate decurg din (11), $(13)_2$ (19) din § 75

$$\Phi_0 = \frac{\mu d}{\pi(\varkappa+1)}\left\{\frac{1}{2-\gamma} + \frac{R_2^2 \log R_2 - R_1^2 \log R_1}{R_1^2 - R_2^2}\right\},$$

$$\Phi_1 = -\frac{2i\mu(a - ib)}{\pi\varepsilon(R_1^2 + R_2^2)(\varkappa + \varepsilon)} \tag{14}$$

$$\Psi_{-2} = -\frac{(2-\gamma)\mu d R_1^2 R_2^2}{\pi(\varkappa+1)(R_2^2 - R_1^2)} \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\Psi_{-3} = R_1^3\left[\frac{2}{R_1}\Phi_{-1} + \varepsilon\overline{\Phi}_1 R_1\right] = -2i\mu\frac{(a+ib)R_1^2 R_2^2}{\pi(\varkappa+\varepsilon)(R_1^2 + R_2^2)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece nu intervin alţi coeficienţi, funcţiile de reprezentare se reduc la următoarele

$$\Phi(\zeta) = \Phi \log \zeta + \Phi_0 + \Phi_1 \zeta + \Phi_{-1}/\zeta,$$

$$\Psi(\zeta) = \Psi_{-1}/\zeta + \Psi_{-2}/\zeta^2 + \Psi_{-3}/\zeta^3, \quad \Pi(\zeta) = 0 \tag{15}$$

iar acestea se anulează în lipsa neuniformităţilor ($a = b = d = 0$). Soluţiile obţinute extind cele obţinute iniţial de A. Timpe şi restabilite prin metoda funcţiilor de variabilă complexă de N. I. Mushelişvili.

Vom considera în particular cazul unei dislocaţii constînd într-o disociere din material a unei pene cu margini radiale, de unghi d în jurul centrului ($a = b = 0$). Atunci vom avea conform relaţiilor (11)—(15) şi conform relaţiilor (6) din § 59

$$\Phi(\zeta) = \Phi_0 + \Phi \log \zeta, \quad \Psi(\zeta) = \Psi_{-2}/\zeta^2,$$

$$\sigma_{rr} = (1 + \varepsilon)(\Phi_0 + \Phi \log r) - \Phi - \Psi_{-2}/r^2 =$$

$$= \frac{(1 + \varepsilon)\,\mu d}{\pi(\varkappa + 1)} \left(\log r + \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2 (R_2^2 - R_1^2)} \log \frac{R_2}{R_1} - \frac{R_2^2 \log R_2 - R_1^2 \log R_1}{R_2^2 - R_1^2} \right),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (1 + \varepsilon)(\Phi_0 + \Phi \log r) + \Phi + \Psi_2/r^2 = \tag{16}$$

$$= \frac{(1 + \varepsilon)\,\mu d}{\pi(\varkappa + 1)} \left(\log r - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2 (R_2^2 - R_1^2)} \log \frac{R_2}{R_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{R_2^2 \log R_2 - R_1^2 \log R_1}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{2}{1 + \varepsilon} \right),$$

$$\sigma_{\substack{\theta r \\ r\theta}} = \mp \frac{\mu d (1 - \varepsilon)}{2\pi(\varkappa + 1)}\, \theta,$$

$$\sigma_{zz} = 2(2 - \gamma)\, \nu(\Phi_0 + \Phi \log R) =$$

$$= \frac{2\nu\mu d}{\pi(\varkappa + 1)} \left\{ 1 + (1 + \varepsilon) \left[\log R - \frac{R_2^2 \log R_1 - R_1^2 \log R_2}{R_2^2 - R_1^2} \right] \right\}.$$

Multiformitatea tensiunilor tangenţiale dispare efectiv pentru $\gamma = 0$, caz în care pe conturul coroanei circulare nu avem încărcări (vezi şi condiţiile (7), (9) din § 75, care nu au fost considerate mai sus).

Scanned with OKEN Scanner

Vom presupune de asemenea cazul corespunzător condiției $d = 0$, $a \neq 0$, $b = 0$ care revine la practicarea unei tăieturi a coroanei circulare de-a lungul axei Ox însoțită de alunecarea rigidă a marginii inferioare de-a lungul celei superioare cu o lungimea urmată de o sudură a zonei rămase în contact*) — vezi figura 84. Acest caz este asemănător celui pentru

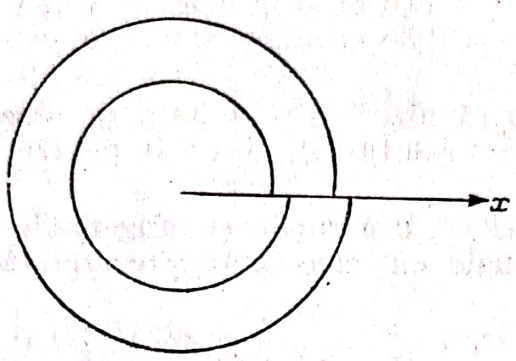


Fig. 84

care $d = 0$, $a = 0$, $b \neq 0$ și se obține din precedentul intervertind axa Ox cu Oy. În acest din urmă caz, reductibil la cel precedent, avem soluțiile

$$\Phi(\zeta) = -\frac{b\mu}{\pi(\varkappa+\varepsilon)}\left[\frac{2\zeta}{\varepsilon(R_1^2+R_2^2)} - \frac{1}{\zeta}\right],$$

$$\Psi(\zeta) = \frac{b\mu}{\pi(\varkappa+\varepsilon)}\left[\frac{\varepsilon}{\zeta} + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\frac{2}{\zeta^3}\right],$$

$$\sigma_{rr} = \frac{2b\mu}{\pi(\varkappa+\varepsilon)}\left[-\frac{r}{R_1^2+R_2^2} + \frac{1}{r} - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^3(R_1^2+R_2^2)}\right]\cos\theta,$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2b\mu}{\pi(\varkappa+\varepsilon)}\left[-\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon(R_1^2+R_2^2)} + \frac{\varepsilon}{r} + \frac{R_1^2 R_2^2}{r^3(R_1^2+R_2^2)}\right]\cos\theta,$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{2b\mu}{\pi(\varkappa+\varepsilon)}\left[-\frac{r(1+2(1-\varepsilon)/\varepsilon)}{R_1^2+R_2^2} + \frac{\varepsilon}{r} - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^3(R_1^2+R_2^2)}\right]\sin\theta,$$

$$\sigma_{\theta r} = \frac{2b\mu}{\pi(\varkappa+\varepsilon)}\left[-\frac{r}{R_1^2+R_2^2} + \frac{1}{r} - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^3(R_1^2+R_2^2)}\right]. \qquad (17)$$

*) Același rezultat se obține înlăturînd o bandă de lățime α în lungul axei pozitive Qy printr-o translație de-a lungul axei Qx și o sudură a marginilor tăieturii.

§ 77. Incovoierea plăcii circulare

Vom considera o placă plană mărginită de două cercuri concentrice avînd două capete orientate în sens radial. Soluțiile obținute în secțiunea precedentă se pot utiliza și în acest caz în vederea stabilirii unor stări de tensiune compatibile cu unele tipuri de condiții pe conturul circular și radial.

Vom presupune că placa este limitată de razele $\theta = \theta_1$ și $\theta = \theta_2$, $(\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2)$. Utilizăm soluția (16) din § 76 pentru care au loc următoarele proprietăți :

Rezultanta tensiunilor normale și tangențiale aplicate pe capetele plăcii sînt proporționale cu constanta γ caracterizînd cuplajul polar

$$N = \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{\theta\theta}\, dr = -\frac{2\mu d\gamma}{\pi(\varkappa + \varepsilon)}(R_2 - R_1), \tag{1}$$

$$Q_i = \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{r\theta}\, dr/_{\theta=\theta_i} = -N\theta_i, \quad (i = 1, 2).$$

Rezultantele sînt nule în lipsa acestui efect (cînd $\gamma = 0$).

Momentul rezultant al acestor tensiuni este

$$M = \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{\theta\theta}\, r\, dr = \frac{\mu d}{2\pi(\varkappa + \varepsilon)} \cdot \frac{(1+\gamma)(R_2^2 - R_1^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2 \left(\log \frac{R_2}{R_1}\right)^2}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{2}$$

Pe conturul $r = R_1$, $r = R_2$ avem încărcarea

$$\sigma_{\theta r} = -\frac{2\mu d}{\pi(\varkappa + \varepsilon)}\gamma\theta, \quad (\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2). \tag{3}$$

Starea de tensiune caracterizată de mărimile N, Q_i, M și încărcarea (3) se reduce, pentru $\gamma = 0$, la o încovoiere pură. Tensiunile și funcțiile de reprezentare respective se obțin din (16) în care înlocuim Φ prin

$$\Phi = \frac{2d\mu}{\pi(\varkappa + \varepsilon)}. \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se poate arăta că numitorul membrului drept este întotdeauna pozitiv, pentru $\gamma \geqslant 0$ (vezi N. I. Musheliṣvili [4]).

Dacă utilizăm soluția (17) din § 76 și presupunem că $\theta = \pi/2$ reprezintă unul din capetele plăcii, vom avea $\sigma_{\theta\theta} = 0$ pe acest capăt și deci rezultanta încărcărilor pe același capăt este paralelă cu axa Oy și are intensitatea

$$T = \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{r\theta}\, dr = \frac{2b\mu}{\pi(\varkappa+\varepsilon)(R_1^2+R_2^2)}\left[\varepsilon(R_1^2+R_2^2)\log\frac{R^2}{R_1} + \right. \tag{5}$$

$$\left. + \left(1+\frac{2\gamma}{\varepsilon}\right)(R_1^2 - R_2^2)\right].$$

Aşadar, luînd în (17) din § 76

$$\Phi = \frac{2b\mu}{\pi(\varkappa+\varepsilon)} = \frac{T(R_1^2+R_2^2)}{\varepsilon(R_1^2+R_2^2)\log\frac{R_2}{R_1} + (1+2\gamma)(R_1^2-R_2^2)} \tag{6}$$

obținem soluțiile problemei încovoierii plăcii sub acțiunea forței T aplicată la capătul $\theta = \theta_2$, avînd o distribuție de tensiune de forma dată de expresia pentru $\sigma_{r\theta}$. Numitorul este pozitiv întotdeauna pentru $\gamma = 0$.

Luînd $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$, soluția de mai sus dă la capătul $\theta = 0$ o solicitare care trebuie să fie egală și de sens contrar cu forța aplicată N pe capătul $\theta = \pi/2$. Suprapunînd un cuplu convenabil ales, putem construi soluția pentru o forță acționînd după altă direcție normala la secțiunea de capăt $\theta = 0 : N'$ conform figurii 85.

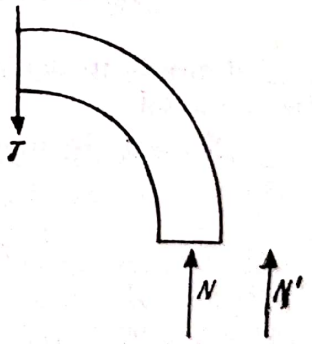


Fig. 85

Dacă utilizăm soluția pentru coroana circulară sub o sarcină oarecare, obținem în secțiunile $\theta = \theta_1$, θ_2 considerate mai înainte. solicitări determinate.

Suprapunînd soluțiile de mai sus, vom obține momente și forțe în secțiunile de capăt ce pot fi egalate cu solicitări date, evident în echilibru cu reacțiunile.

Asemenea procedee dau rezultate bune în cazul plăcilor subțiri la care se poate aplica principiul lui Saint-Venant privind înlocuirea soluțiilor exacte cu soluții diferite, mai ușor de obținut și cărora le corespund la capete aceleași rezultante.

Scanned with OKEN Scanner

C. Tensiuni de temperatură

§ 78. Ecuaţiile termoelasticităţii tensionale

Vom analiza legătura care apare între dislocaţiile considerate şi efectul temperaturii. Astfel vom considera ecuaţiile de mobilitate sau cele constitutive (1) din § 11 şi condiţiile (2) din § 11, ţinînd seama şi de distribuţia temperaturii

$$\sigma_{xx} = -\tau T + \lambda\theta + 2\mu u_{,x}, \ldots, \quad \sigma_{zz} = -\tau T + \lambda\theta + 2\mu W. \tag{1}$$

Celelalte ecuaţii constitutive apar în (4) din § 46.

Legea liniară exprimată de aceste ecuaţii corespunde unei variaţii de temperatură limitată pentru care modulii λ, μ, β rămîn constanţi iar corpul se menţine elastic omogen.

În cazul problemei mediane luăm $W = W(x, y)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ şi un cîmp de temperatură care nu depinde de z. Vom avea

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[-\tau T + (\lambda + \mu)\vartheta + \lambda W],$$

$$\sigma_{[xy]} = \frac{1}{2}(\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) = \beta(v_{,x} - u_{,x}), \tag{2}$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + 2\mu(1 + \nu)W - \mu\tau T/(\lambda + \mu).$$

$\sigma_{[xy]}$ depinde în acelaşi mod ca şi în cazul absenţei efectului termic de funcţia rotaţiei ω.

Notăm de asemenea ecuaţia constitutivă inversă

$$\theta = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2(\lambda + \mu)} + \frac{2T}{\lambda + \mu} + (1 - 2\nu)W. \tag{3}$$

În cazul unui cîmp de temperatură corespunzînd unui flux de căldură staţionar ($T = T(x, y)$) şi fără surse, funcţia T este armonică

$$\Delta T = 0. \tag{4}$$

Aceasta rezultă din (24), § 9. Atunci vom nota

$$T = u^*_{,x} = v^*_{,y}, \quad (u^*_{,y} = -v^*_{,x}) \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel că în integrala

$$\int F(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = u^*(x, y) + iv^*(x, y), \tag{6}$$

$F(\zeta)$ are ca parte reală funcția T.

Vom mai considera mărimile

$$u = \tilde{u} + \mathcal{K}u^*,\ v = v^* + \mathcal{K}v^*,\ \mathcal{K} = \frac{\tau}{2(\lambda+\mu)} \tag{7}$$

unde $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ sînt două funcții noi. Introducînd expresiile (7) ale deplasărilor în ecuațiile (1), constatăm că tensiunile satisfac noile ecuații

$$\sigma_{xx} = \lambda\tilde{\theta} + 2\mu\tilde{u}_{,x},\ \sigma_{yy} = \lambda\tilde{\theta} + 2\mu\tilde{v}_{,y},$$
$$\sigma_{\substack{xy\\yx}} = \mu(\tilde{v}_{,x} + \tilde{u}_{,y}) \pm \beta(\tilde{\omega} + \mathcal{K}\omega^*),\ \sigma_{\substack{zx\\xz}} = (\mu \pm \beta)zW_{,x}, \ldots \tag{8}$$

în care

$$\tilde{\theta} = \tilde{u}_{,x} + \tilde{v}_{,y}. \tag{9}$$

Am utilizat relația

$$\omega = \tilde{\omega} + \mathcal{K}\omega^* \tag{10}$$

exprimată cu ajutorul mărimilor

$$\tilde{\omega} = (\tilde{v}_{,x} - \tilde{u}_{,y})/2,\ \omega^* = (v^*_{,x} - u^*_{,y})/2 = v^*_{,x} = -u^*_{,y},$$
$$(\omega^*_{,y} = T_{,x},\ \omega^*_{,x} = -T_{,y}). \tag{11}$$

Așadar pentru $\beta = 0$, tensiunile σ_{xx}, σ_{yy}, $\sigma_{(xy)}$ satisfac ecuații constitutive de tipul celor din elasticitatea clasică fără efecte termice, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ jucînd rolul unor deplasări.

În prezența unui cîmp de tensiune staționar și în absența încărcărilor pe contur, presupus simplu conex, tensiunile interne sînt nule, deplasările convenționale $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ anulîndu-se identic*). În acest caz apariția tensiunilor interne este posibilă.

*) Rezultă $u = \nu u^*/2\,(\lambda+\mu)$, $v = \nu v^*/2\ (\lambda+\mu)$, $\sigma_{zz} = -\nu\mu T(\lambda+\mu)$, așadar la capetele $z = \text{const.}$ ale cilindrului (sau plăcii plane) pentru care se definește problema mediană apar tensiuni normale static echivalente cu un cuplu. Dacă principiul lui St. Venant este aplicabil, adăugînd o forță și un cuplu de sens contrar și determinînd soluția corespunzătoare (încovoiere cu întindere), obținem soluția pentru cilindrul neîncărcat. Pentru un cilindru scurt va fi însă necesară o soluție mai exactă.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul unui domeniu multiplu conex, funcția complexă a temperaturii $F(\zeta)$, ($\mathrm{Re}F(\zeta) = T$) poate avea o parte imaginară $i(\omega^* + c)$ (conjugata lui T) multiformă și este atunci de forma

$$F(\zeta) = \sum_{k=1}^{m} A_k \log(\zeta - \zeta_k) + F^*(\zeta) \tag{12}$$

$f^*(\zeta)$ fiind o funcție olomorfă iar A_k, $(k = 1, \ldots, n)$ constante reale. ζ_k corespund unor puncte oarecari în interiorul unor contururi L_k.

Formăm integrala

$$U^* = u^* + iv^* = \int F(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = \zeta \sum_{k=1}^{m} A_k \log(\zeta - \zeta_k) + \tag{13}$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} (a_k^* + ib_k^*) \log(\zeta - \zeta_k) + G^*(\zeta)$$

$G^*(\zeta)$ este o funcție olomorfă iar a_k^*, b_k^* sînt constante reale care se presupun determinate împreună cu A_k pentru un cîmp termic dat.

Creșterea funcției U^* prin parcurgerea unui ciclu în jurul unui punct ζ_k care include conturul L_k este, adoptînd notații analoge celor utilizate anterior în (10) din § 55 și în (8) din § 76,

$$u^{*+} - u^{*-} + i(v^{*+} - v^{*-}) = 2\pi i(\zeta A_k + a_k^* + ib_k^*). \tag{14}$$

Presupunînd că deplasările efective sînt uniforme, avem

$$\tilde{u}^+ - \tilde{u}^- + i(\tilde{v}^+ - \tilde{v}^-) + \Re[u^{*+} - u^{*-} + i(v^{*+} - v^{*-})] = 0 \tag{15}$$

și deci

$$\tilde{u}^+ - \tilde{u}^- + i(\tilde{v}^+ - \tilde{v}^-) = -2\pi i \Re(\zeta A_k + a_k^* + ib_k^*). \tag{16}$$

În concluzie, deplasările $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ corespund unei probleme cu caracter auxliar și sînt echivalente celor pentru un corp fără cîmp termic dar supus unor dislocații

$$[\tilde{u}^+ + i\tilde{v}]_{L_k'} = -\mathrm{d}_k y + a_k + i(d_k + b_k) \tag{17}$$

caracterizate de constantele

$$a_k = 2\pi\Im b_k^*, \quad b_k = 2\pi\Im a_k^*, \quad d_k = -2\pi\Re A_k. \tag{18}$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom calcula funcția

$$\omega^* = (v^*_{,x} - u^*_{,y})/2 = -\operatorname{Re} i\frac{\partial U^*}{\partial \zeta} = -\operatorname{Re} i\left\{\sum_{k=1}^{m} A_k \log(\zeta - \zeta_k) + H^*(\zeta)\right\} \quad (19)$$

$H^*(\zeta)$ fiind o funcție olomorfă. Rezultă formula de creștere

$$\omega^{*+} - \omega^{*-} = 2\pi \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{m} B_k. \quad (20)$$

Prin urmare rotațiile ω definite în (11) sînt echivalente celor pentru un corp fără cîmp termic dar supus unor dislocații asociate relației de mai sus.

Vom numi *problema auxiliară*, problema ce se referă la mărimile $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{\sigma}$. Această problemă se rezolvă conform rezultatului enunțat mai sus.

§ 79. Tensiuni din temperatură în coroana circulară

Vom considera un flux de căldură staționar pentru care avem îndeplinite condițiile $T = T_1$ dacă $r = R_1$, $T = T_2$, dacă $r = R_2$. Soluția corespunzătoare acestei probleme (prima fundamentală de tip Dirichlet a potențialului logaritmic) care constă în găsirea unei funcții armonice $\Delta T = 0$, fiind date valorile ei pe contur, este următoarea

$$T = \frac{T_2 - T_1}{\log \frac{R_2}{R_1}} \log r + \frac{T_1 \log R_2 - T_2 \log R_1}{\log \frac{R_2}{R_1}} \quad (1)$$

sau, utilizînd funcția complexă (12) definită abstracție făcînd de o constantă aditivă pur complexă:

$$F(\zeta) = \frac{T_2 - T_1}{\log \frac{R_2}{R_1}} \log \zeta + \frac{T_1 \log R_2 - T_2 \log R_1}{\log \frac{R_2}{R_1}} + iC. \quad (2)$$

Deoarece u^*, v^* sînt funcții armonic conjugate și satisfac condițiile (5), ele constituie componentele funcției complexe

$$u^* + iv^* = A\zeta \log \zeta + \frac{T_1(\log R_2 + 1) - T_2(\log R_1 + 1)}{\log \frac{R_2}{R_1}}, \quad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde, conform notației (12) și (13) din § 78,

$$a_1^* = b_1^* = 0, \qquad A_1 = \frac{T_2 - T_1}{\log \frac{R_2}{R_1}}. \tag{4}$$

Aplicarea relațiilor (18) din § 78 ne dă valorile constantelor

$$a_1 = b_1 = 0, \quad d_1 = -2\pi\mathfrak{K}\frac{T_2 - T_1}{\log \frac{R_2}{R_1}}. \tag{5}$$

Dacă identificăm d_1 cu d_2 în (16), § 76, putem deduce o soluție a problemei auxiliare omogene (fără încărcări). La acestea adăugăm o soluție particulară a problemei neomogene (cu încărcări). Atunci putem determina soluțiile efective în care u^* și v^* sînt dați de *) (3).

---

*) În cazul mai general al unor condiții pe contur de forma

$$T = f_1(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_p' e^{ip\theta}, \quad (r = R_1), \quad A_p' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta) e^{-ip\theta}\, d\theta,$$

$$T = f_2(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_p'' e^{ip\theta}, \quad (r = R_2), \quad A_p'' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_2(\theta) e^{-ip\theta}\, d\theta \tag{6}$$

funcția $F(\zeta)$ are, în concordanță cu (12), expresia

$$F(\zeta) = A \log \zeta + \sum_{-\infty}^{\infty} a_p \zeta^p, \ (A = \overline{A}) \tag{7}$$

în care coeficienții satisfac condițiile

$$2A \log R_1 + a_0 + \bar{a}_0 = 2A_0', \quad 2A \log R_2 + a_0 + \bar{a}_0 = 2A_0''$$

$$a_p R_1^p + \bar{a}_{-p} R_1^{-p} = 2A_p', \quad a_p R_2^p + \bar{a}_{-p} R_2^{-p} = 2A_p'' \tag{8}$$

$$(A_p' = \overline{A}_{-p}', \quad A_p'' = \overline{A}_{-p}'', \quad p \neq 0).$$

Se constată că multiformitatea depinde de A, a_{-1} și deci de A_0', A_0'', A_1', A_1''.

Scanned with OKEN Scanner

D. Soluții obținute cu ajutorul transformărilor conforme

§ 80. Soluția generală

Metoda de rezolvare cu ajutorul seriilor de puteri permite obținerea unor soluții într-o serie de probleme ca de exemplu pentru domenii simplu sau dublu conexe prin reprezentare conformă pe un cerc, respectiv o coroană circulară. În cele ce urmează ne limităm la considerarea unor soluții obținute pe această cale.

a) Vom considera un domeniu simplu conex finit D mărginit de un contur închis simplu L reprezentat conform pe interiorul cercului $\zeta < 1$ de rază unitate cu ajutorul transformării $z = f(\zeta)$. În interiorul lui γ vom considera atunci dezvoltarea

$$\varphi(\zeta) = \sum_0^\infty \varphi_p \zeta^p, \quad \psi(\zeta) = \sum_0^\infty \psi_p \zeta^p, \quad \pi(\zeta) = \sum_0^\infty \pi_p \zeta^p. \tag{1}$$

Pentru prima problemă fundamentală vom considera condițiile la limită pentru tensiuni (1) din § 60

$$\varepsilon\varphi(\sigma) + \frac{f(\sigma)}{\overline{f'(\sigma)}}\left(\overline{\varphi'(\sigma)} - \delta\overline{\pi'(\sigma)}\right) + \overline{\psi(\sigma)} - (1+2\delta)\,\pi(\sigma) +$$

$$+ (1+\delta)\frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)}\pi'(\sigma) = f_1 + if_2, \tag{2}$$

$$(1+\delta)\frac{h}{2k}\left[\frac{\pi'(\sigma)}{f'(\sigma)} - \frac{\overline{\pi'(\sigma)}}{\overline{f'(\sigma)}}\right] = if_3, \tag{3}$$

$$f_1 + if_2 = i\int_0^t (T_x + iT_y + \frac{2\delta}{h}kT_2)\,ds + \text{const.}, \quad if_3 = iZ, \quad \sigma = e^{i\theta}.$$

Se poate alege $f(0) = 0$ și fixa valorile

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im}(\varphi'(0)/f'(0)) = \operatorname{Im}\ (\varphi_1/f'(0)), \\ &\operatorname{Re}(\pi'(0)/f'(0)) = \operatorname{Re}\ (\pi_1/f'(0)), \\ &\varphi(0) = \varphi_0 = 0, \quad \pi(0) = \pi_0 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste condiții concordă cu (10) din § 54.

Presupunem că putem dezvolta în serie absolut convergentă cîturile *)

$$f(\sigma)/\overline{f'(\sigma)} = \sum_{-\infty}^{\infty} b_p \sigma^p, \quad f(\sigma)/f'(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_p \sigma^p, \quad 1/f'(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} d_p \sigma^p. \tag{5}$$

Vom admite posibilitatea dezvoltării în serie a funcțiilor

$$f_1 + if_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} A_p \sigma^p, \quad if_3 = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} (B_p \sigma^p - \overline{B}_p \sigma^{-p}) \tag{6}$$

pentru care condițiile la limită se scriu astfel **)

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \varepsilon a_p - (1 + 2\delta)\pi_p) \sigma^p + \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \sigma^m p(\overline{\varphi}_p - \delta\overline{\pi}_p) \sigma^{-p+1} \right\} +$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \overline{\psi}_p \sigma^{-p} + (1 + \delta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \sigma^m \sum_{p=1}^{\infty} p\pi_p \sigma^{p-1} = \sum_{-\infty}^{\infty} A_p \sigma^p, \tag{7}$$

$$(1 + \delta) \frac{h}{k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m \sigma^m \sum_{p=1}^{\infty} p\pi_p \sigma^{p-1} = \sum_{-\infty}^{\infty} B_p \sigma^p.$$

Cu ajutorul acestor condiții și prin identificarea coeficienților termenilor în σ^p, σ^{-p}, deducem sistemele algebrice de ecuații

$$\varepsilon\varphi_m - (1 + 2\delta)\pi_m + \sum_{p=1}^{\infty} p[(\overline{\varphi}_p - \delta\overline{\pi}_p)b_{m+p-1} +$$

$$+ (1 + \delta)\pi_p c_{m-p+1}] = A_m, \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

---

*) Dacă conturul L satisface condițiile menționate cu ocazia expunerii elementelor referitoare la procedeul transformării conforme din § 18, convergența absolută rezultă, ca și în teoria clasică, în baza unei teoreme a lui S. N. Bernstein [1]; o funcție satisfăcînd condiția lui Hölder pentru un exponent $\alpha < 1/2$ admite o dezvoltare absolut convergentă. În cazul funcției $f(\sigma)/\overline{f'(\sigma)}$, α are valoarea 1, deoarece are o derivată continuă.

**) Produsul seriilor care apare în membrul stîng are sens și este convergent dacă seria pentru $\varphi'(\sigma)$ converge absolut odată cu seria de coeficienți b_k etc.

$$\overline{\psi}_m + \sum_{p=1}^{\infty} p[(\overline{\varphi}_p - \delta\overline{\pi}_p)b_{-m+p-1} + (1+\delta)\pi_p c_{-m-p+1}] = A_{-m},\ (m = 0, 1, \ldots),$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} (1+\delta)\frac{h}{k} p d_{m-p+1}\pi_p = B_m,\ m = 0, \pm 1, \ldots$$

Rezolvarea sistemului obținut în raport cu coeficienții φ_p, ψ_p, π_p permite determinarea seriilor pentru funcțiile $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ ... etc.*). Remarcăm că $\varphi(\zeta)$ rezultă din primul grup de ecuații algebrice obținut mai sus, $\psi(\zeta)$ din al doilea, iar $\pi(\zeta)$ din al treilea.

b) În cele ce urmează vom considera cazul pentru care $f(\zeta)$ este un polinom de grad finit n:

$$f(\zeta) = \sum_{p=1}^{n} f_p \zeta^p,\ (f_1 \neq 0, f_n \neq 0). \tag{9}$$

Se va utiliza observația următoare. Notînd $\overline{f(\zeta)} = \sum_{p=1}^{n} \overline{f}_p \zeta^p$ avem

$$\overline{f(\sigma)} = \sum_{p=1}^{n} \overline{f}_p \overline{\sigma}^p = \overline{f}\left(\frac{1}{\sigma}\right),\ (\overline{\sigma} = e^{-i\theta} = 1/\sigma) \tag{10}$$

astfel că

$$\frac{f(\sigma)}{\overline{f'(\sigma)}} = \frac{f(\sigma)}{\overline{f}\left(\frac{1}{\sigma}\right)} = \sigma^n \frac{f_1 + f_2\sigma + \ldots + f_n\sigma^{n-1}}{\overline{f}_1\sigma^{n-1} + 2\overline{f}_2\sigma^{n-2} + \ldots + n\overline{f}_n},$$

$$\frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)} = \frac{\sigma}{f_1 + \ldots + nf_n\sigma^{n-1}},\quad \frac{1}{f'(\sigma)} = \frac{1}{f_1 + \ldots + nf_n\sigma^{n-1}}. \tag{11}$$

*) Pentru a satisface cerințele impuse soluțiilor, seriile acestor funcții trebuie să fie uniform convergente pentru $|\zeta| = 1$, iar seria pentru $\varphi'(\zeta)$ va trebui să fie absolut convergentă. Convergența uniformă a funcțiilor de reprezentare pe conturul $|\zeta|=1$ implică aceeași proprietate pentru $|\zeta| \leqslant 1$ și deci continuitatea în interior și pe contur a funcțiilor (regularitatea soluțiilor). Cunoscînd $\varphi(\zeta)$, funcția $\psi(\zeta)$ rezultă conform formulei

$$\psi(\sigma) = f_1 - if_2 - \varepsilon\overline{\varphi(\sigma)} - \frac{\overline{f(\sigma)}}{f'(\sigma)}(\varphi'(\sigma) - \delta\pi'(\sigma)) + (1+2\delta)\overline{\pi(\sigma)} - (1+\delta)\frac{\overline{f(\sigma)}}{\overline{f'(\sigma)}}\overline{\pi'(\sigma)}$$

care coincide cu condiția la limită și se poate deci calcula direct cu formula lui Cauchy.

Se arată atunci că aceste cîturi sînt respectiv egale cu seriile

$$b_n\sigma^n + b_{n-1}\sigma^{n-1} + \ldots + b_1\sigma + b_0 + \sum_{p=1}^{\infty} b_{-p}\sigma^{-p} \tag{12}$$

(pentru $|\sigma| \geqslant 1$ sau în particular $\sigma = e^{i\theta}$),

$$\sum_{p=1}^{\infty} c_p\sigma^p, \quad \sum_{p=0}^{\infty} d_p\sigma^p \text{ (pentru } |\sigma| \leqslant 1 \text{ sau în particular } \sigma = e^{i\theta}).$$

Rezultă

$$b_p = 0, (p \geqslant n+1); \; c_p = 0, (p < 1), \; d_p = 0, (p < 0). \tag{13}$$

Ecuațiile sistemului algebric obținut (8) se scriu atunci astfel*)

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\varphi_1 - (1+2\delta)\,\pi_1 + (\overline{\varphi}_1 - \delta\overline{\pi}_1)b_1 + 2(\overline{\varphi}_2 - \delta\overline{\pi}_2) + \ldots \\
&\qquad + n(\overline{\varphi}_n - \delta\overline{\pi}_n)\,b_n + (1+\delta)\,\pi_1 c_1 = A_1, \\
&\varepsilon\varphi_2 - (1+2\delta)\,\pi_2 + (\overline{\varphi}_1 - \delta\overline{\pi}_1)\,b_2 + 2(\overline{\varphi}_2 - \delta\overline{\pi}_2)\,b_3 + \ldots \\
&\quad + (n-1)\,(\overline{\varphi}_{n-1} - \delta\overline{\pi}_{n-1})\,b_n + (1+\delta)\,(\pi_1 c_2 + 2\pi_2 c_1) = A_2 \qquad (14) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\varepsilon\varphi_n - (1+2\delta)\,\pi_n + (\overline{\varphi}_1 - \delta\overline{\pi}_1)\,b_n + (1+\delta)\,(\pi_1 c_n + 2\pi_2 c_{n-1} + \ldots + n\pi_n c_1) = A_n, \\
&\varepsilon\varphi_m - (1+2\delta)\,\pi_m + (1+\delta)\,(\pi_1 c_m + 2\pi_2 c_{m-1} + \ldots + m\pi_m c_1) = A_m, \\
&\qquad\qquad (m \geqslant n+1), \\
&\overline{\psi}_m + \sum_{p=1}^{m+n+1} p(\overline{\varphi}_p - \delta\overline{\pi}_p)\,b_{-m+p-1} = A_{-m}, \\
&\qquad\qquad (m = 0, 1, 2, \ldots), \\
&(1+\delta)\frac{h}{k}\sum_{p=1}^{m+1} p d_{m-p+1}\,\pi_p = B_m, \qquad (m \geqslant 0).
\end{aligned}$$

*) Pentru a stabili acest rezultat se pornește de la observația că expresia dată pentru citul $f(\sigma)/\overline{f'(\sigma)}$, $f(\sigma)$ fiind o funcție rațională de variabilă σ în tot planul, are un singur pol $\sigma = \infty$ în exteriorul și pe conturul γ. Pe de altă parte, $f'(\zeta)$ nu se anulează în interior sau pe γ (conform ipotezelor enunțate în secțiunea privitoare la reprezentarea conformă din § 18) și deci $\overline{f}'(1/\sigma)$ nu se anulează în exteriorul (sau pe conturul) lui γ. Această din urmă afirmație rezultă observînd că dacă $\overline{f}'(1/\sigma_0) = 0$ pentru $|\sigma_0| \geqslant 1$, atunci $f'(1/\overline{\sigma}_0) = 0$ sau $f'(\sigma_1) = 0$, $|\sigma_1| \leqslant 1$, $(\sigma_1 = 1/\sigma_0)$. Aceasta însă ar contraveni ipotezelor menționate.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru compatibilitate va trebui să luăm în ultima ecuație $B_{-m} = 0$ pentru $m \geqslant 0$.

Ținînd seama că $\varphi_p = \alpha_p + i\beta_p$ sînt coeficienți caracterizați prin cîte două numere reale α_p, β_p, avem de mai sus $2n$ ecuații reale pentru determinarea acestora ($p = 1, \ldots, n$), restul ecuațiilor determinînd pe φ_m, ($m \geqslant n+1$), și ψ_m, π_m.

Dacă sistemul admite soluțiile φ_p, ($p = 1, \ldots, n$), restul coeficienților rezultă necesarmente*).

Trebuie observat că în teoria clasică (pentru $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\pi(\zeta) = 0$) are loc o condiție suplimentară pentru coeficienții $A_1, \ldots, A_n$ ce rezultă eliminînd necunoscutele din ecuațiile în care acești coeficienți apar sau, echivalent, prin anularea determinantului sistemului format de aceste ecuații **). Această condiție exprimă de altfel faptul că momentul rezultant al eforturilor exterioare trebuie să fie nul.

Exemplu. Pentru reprezentarea $z = f(\zeta) = R(\zeta + a\zeta^2)$, ($R > 0$, $0 < a < 1/2$) pe o curbă L care este melcul lui Pascal, rezultă dezvoltările cîturilor

$$\frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)} = \frac{\sigma + a\sigma^2}{1 + 2a\bar{\sigma}} = a\sigma^2 + (1 - 2a^2)\,\sigma - \frac{2a(1-2a^2)}{1 + \frac{2a}{\sigma}} =$$

$$= a\sigma^2 + (1 - 2a^2)\,\sigma - 2a^2(1 - 2a^2)\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\left(\frac{2a}{\sigma}\right)^p,$$

$$\frac{1}{f'(\sigma)} = \frac{1}{R(1 + 2a\sigma)} = \frac{1}{R}\sum_{p=0}^{\infty}(-2a\sigma)^p, \tag{15}$$

$$\frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)} = \frac{\sigma + a\sigma^2}{1 + 2a\sigma} = \sigma - a\sum_{p=2}^{\infty}(-2a)^{p-2}\,\sigma^p.$$

---

*) Dacă funcțiile f_1, f_2, f_3 sînt suficient de regulate, iar $\varepsilon \geqslant 1$ (avînd de exemplu derivate de ordinul doi în raport cu σ, care satisfac condițiile lui Dirichlet), atunci funcțiile $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, $\pi(\zeta)$ satisfac condițiile problemei. Aceasta rezultă prin aceea că de exemplu pentru

$$|A_m| < C/|m|^3, \quad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{α}$$

deducem $|\varphi_m| < C/\varepsilon|m|^3$, $|m| > n+1$ și atunci rezultă convergența uniformă și absolută a seriilor $\varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$ etc., dacă $|\zeta| \leqslant 1$, $\varepsilon > 0$. Corespunzător condiției asociate penultimului grup de ecuații din (14)

$$\psi_m = -\bar{c}_m + A_{-m},\quad c_m = \sum_{p=1}^{m+n+1} p\,(\bar{\varphi}_p - \delta\bar{\pi}_p)\,b_{-m+p-1}$$

rezultă următoarele: a) Seria $\Sigma_p A_{-p}$ converge absolut în baza condiției (α), pentru $\zeta \leqslant 1$. b) Seria $\Sigma\, c_m$ converge absolut, fiind produsul seriilor convergente $\Sigma_p(\bar{\varphi}_p - \delta\bar{\pi}_p)$, $\Sigma_p\, b_p$. Rezultă astfel convergența absolută și uniformă a seriei pentru $\psi(\zeta)$; ($|\zeta| \leqslant 1$).

**) În teoria clasică Im $\varphi'(0)$ apare nedeterminat sau, ceea ce e echivalent, $\varphi_1/f'(0)$ este nedeterminat.

Coeficienții acestor dezvoltări sînt

$$b_1 = 1 - 2a^2,\ b_2 = a,\ b_{-p} = (-1)^{p+1}\,(2a)^{p+1}\,(1-2a^2),\ (p \geqslant 0), \tag{16}$$

$$d_p = \frac{(-2a)^p}{R},\ (p \geqslant 0),\ c_1 = 1,\ c_p = -a\,(-2a)^{p-2},\ p \geqslant 2).$$

Ecuațiile (14) se scriu astfel

$$\varepsilon\varphi_1 - (1+2\delta)\,\pi_1 + (\bar{\varphi}_1 - \delta\bar{\pi}_1)\,(1-2a^2) + 2\,(\bar{\varphi}_2 - \delta\bar{\pi}_2)\,a + (1+\delta)\,\pi_1 = A_1,$$

$$\varepsilon\varphi_2 - (1+2\delta)\,\pi_2 + (\bar{\varphi}_1 - \delta\bar{\pi}_1)\,a + (1+\delta)(-a\pi_1 + 2\pi_2) = A_2,$$

. . . . . .

$$\varepsilon\varphi_m - (1+2\delta)\pi_m + (1+\delta)\,\{-a\,[(-2a)^{m-2}\,\pi_1 + \tag{17}$$

$$+ 2(-2a)^{m-3}\,\pi_2 + \ldots] + m\pi_m\} = A_m,\quad (m > 2),$$

$$\psi_m = \bar{A}_{-m} - \sum_{p=1}^{m+n+1} p(\varphi_p - \delta\pi_p)\bar{b}_{-m+p-1},\qquad (m > 0),$$

$$(1+\delta)\,\frac{h}{k}\,d_0\pi_1 = B_0,\ (1+\delta)\,\frac{h}{k}\,(d_1\pi_1 + 2d_0\,\pi_2) = B_1,$$

$$(1+\delta)\,\frac{h}{k}\,(d_2\pi_1 + 2d_1\,\pi_2 + 3\,d_0\,\pi_3) = B_2,$$

. . . . . .

$$(1+\delta)\,\frac{h}{k}\,(d_m\,\pi_1 + 2\,d_{m-1}\,\pi_2 + \ldots + m\,d_1\,\pi_m + (m+1)\,d_0\,\pi_{m+1}) = B_m.$$

Vom rezolva întîi sistemul recurent format de ultimul grup de ecuații

$$\pi_1 = kB_0/(1+\delta)\,hd_0,\ \pi_2 = k(B_1 - d_1\,B_0/d_0)/2(1+\delta)\,h\,d_0, \tag{18}$$

$$\pi_{m+1} = \frac{k}{(1+\delta)\,(m+1)\,hd_0}\left\{\frac{B_m}{d_m} - \frac{1}{d_0}\,[d_m\,\pi_1 + 2d_{m-1}\,\pi_2 + \ldots + md_1\pi_m]\right\}$$

(18)

apoi vom elimina φ_2 din a doua ecuație (17)

$$\varphi_2 = \frac{1}{\varepsilon}[A_2 + (1 + 2\delta)\ \pi_2 - (\bar{\varphi}_1 - \delta\bar{\pi}_1)\ a - (1 + \delta)\ (2\pi_2 - a\pi_1)] \qquad (19)$$

și vom substitui în prima

$$\frac{\varepsilon^2 - 2a^2}{\varepsilon}\varphi_1 + (1 - 2a^2)\bar{\varphi}_1 = \mathcal{A}_1, \qquad (20)$$

$$\mathcal{A}_1 = A_1 - \frac{2a}{\varepsilon}\bar{\bar{A}}_2 + \left(1 - \frac{2a^2}{\varepsilon}\right)\delta\pi_1 + \left[(1 - 2a^2)\ \delta - \right.$$

$$\left. - \frac{2a^2}{\varepsilon}(1 + \delta)\right]\bar{\pi}_1 + 2a\left(\delta + \frac{1}{\varepsilon}\right)\bar{\pi}_2.$$

Separînd partea reală și cea imaginară rezultă

$$\mathrm{Re}\,\varphi_1 = \mathrm{Re}\,\mathcal{A}_1 / \left[\frac{\varepsilon^2 - 2a^2}{\varepsilon} + 1 - 2a^2\right],$$

$$\mathrm{Im}\,\varphi_1 = \mathrm{Im}\,\mathcal{A}_1 / \left[\frac{\varepsilon^2 - 2a^2}{\varepsilon} - 1 + 2a^2\right]. \qquad (21)$$

Remarcăm că pentru $\beta = 0$ avem $\varepsilon = 1$ și pentru compatibilitate. Im $\mathcal{A}_1 = 0$. Coeficienții ψ_m rezultă din (12) și (18).

Seriile pentru funcțiile de reprezentare pot fi înlocuite cu integrale de tip Cauchy, aspect asupra căruia nu ne vom opri.

c) În cazul unei dezvoltări în serie infinită

$$f(\zeta) = \sum_0^\infty f_p\,\zeta^p \qquad (22)$$

dacă am neglija termenii pentru $m \geqslant n + 1$, obținem o reprezentare a cercului $|\zeta| < 1$ pe un domeniu D_n al cărui contur este cu atît mai apropiat de conturul L al domeniului D (pentru $n = \infty$) cu cît n este mai mare. Acest procedeu permite o rezolvare aproximativă în cazul indicat*).

*) Soluțiile φ, ψ ce se obțin tind către cele exacte pentru ipoteze destul de generale relative la conturul L și funcțiile f_1, f_2.

Scanned with OKEN Scanner

Cele arătate mai sus se pot transpune şi pentru a doua problemă fundamentală, observînd că în acest caz φ_1 este determinat complet.

În cazul reprezentării pe cercul $|\zeta| < 1$ al unui domeniu infinit prin funcţia $f(\xi) = c/\xi + \sum_{n=1}^{m} c_n \zeta^n$ se obţin soluţii în mod analog.

§ 81. Prima problemă fundamentală pentru elipsă *)

Pentru elaborarea metodei de rezolvare în cadrul teoriei mediilor cuplate, vom urma calea adoptată în teoria clasică simetrică, cu ajutorul reprezentării conforme şi, pentru a evita calculele complicate ce ar decurge din transformarea pe cerc, se utilizează următorul procedeu. Se presupune o tăietură de-a lungul unui segment unind focarele elipsei. Această tăietură se consideră de asemenea o elipsă, omofocală cu cea dată, dar de semiaxă mică nulă. Domeniul dublu conex rezultat se reprezintă pe domeniul situat între cercurile concentrice γ_1, γ_2 din planul ζ în baza relaţiei

$$z = f(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \quad (R > 0) \tag{1}$$

stabilite anterior (în studiul reprezentării conforme a cercului pe coroana eliptică). Această relaţie se scrie descompunînd părţile reală şi imaginară astfel

$$x = R\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\theta, \quad y = R\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\theta. \tag{2}$$

Notăm că ρ reprezintă raza cercului din planul ζ căruia şi corespunde elipsa dată parametric prin aceste relaţii. Pentru $\rho = 1$ elipsa corespunzătoare din planul ζ este

$$x = 2R\cos\theta, \quad y = 0, \quad (2\cos\theta = \sigma + 1/\sigma) \tag{3}$$

şi deci se confundă cu segmentul pe axa Ox de capete $x = \pm 2R$. Se constată că la un parcurs al cercului γ_1 de rază $\rho = 1$, segmentul este parcurs de două ori, punctele $\sigma = e^{i\theta}$, $\bar{\sigma} = e^{-i\theta}$ corespunzînd aceluiaşi punct pe segment. Vom mai considera cercul γ_2 de rază $\rho > 1$, căreia îi corespunde

*) Soluţia pentru cazul teoriei simetrice aparţine lui O. Tedone [1] şi T. Boggio [1], [2].

o elipsă de excentricitate $2R$ și semiaxă mare $a = R_0(\rho_0 + 1/R_0)$ astfel că

$$\rho_0 = [a^2 + \sqrt{a^2 - 4R^2}]/2R. \tag{4}$$

Constatăm că ρ_0 este determinat de a și R complet.

Funcțiile $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, $\pi(\zeta)$ vor fi olomorfe în coroana circulară mărginită de γ_1 și γ_2 și se vor dezvolta în serie de puteri*) convergente pentru $1 < |\zeta| < \rho_0$,

$$\varphi(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_p \zeta^p, \quad \psi(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \psi_p \zeta^p, \quad \pi(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \pi_p \zeta^p. \tag{5}$$

Pe conturul $\gamma_2 : \rho = \rho_0$ vom avea condițiile la limită

$$\varepsilon\overline{\varphi(\zeta)} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{f'(\zeta)}(\varphi'/\zeta) - \delta\pi'(\zeta)) + \psi(\zeta) - (1 + 2\delta)\,\overline{\pi(\zeta)} +$$

$$+ (1 + \delta)\frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{f'(\zeta)}}\pi'(\zeta) = f_1 - if_2, \tag{6}$$

$$(1 + \delta)\frac{h}{2k}[\pi'(\zeta)/f'(\zeta) - \overline{\pi'(\zeta)}/\overline{f'(\zeta)}] = if_3,$$

în care

$$\overline{f(\zeta)} = R\left(\overline{\zeta} + \frac{1}{\zeta}\right) = R\left(\frac{\rho_0^2}{\zeta} + \frac{\zeta}{\rho_0^2}\right), \tag{7}$$

$$f'(\zeta) = R\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) = R\left(1 - \frac{\overline{\zeta}^2}{\rho_0^4}\right).$$

În membrul drept apare o funcție de argumentul θ. Pe conturul $\gamma_1 : \rho = 1$, conform observației făcute anterior privind faptul că punctelor σ, $\bar{\sigma}$ le corespund pe segment un singur punct, au loc condițiile

$$\varphi(\sigma) = \varphi(\bar{\sigma}), \quad \psi(\sigma) = \psi(\bar{\sigma}), \quad \pi(\sigma) = \pi(\bar{\sigma}). \tag{8}$$

*) Funcțiile $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, $\pi(\zeta)$ se pot prelungi analitic în interiorul cercului γ_1 inclusiv cercul $\rho' = 1/\rho_0$ deoarece se poate considera o suprafață Riemann cu două foi în planul ζ având ramificații interioare elipsei. Relația de transformare permite reprezentarea celor două foi pe coroana $1/\rho < |\zeta| < \rho_0$ etc. Funcțiile menționate olomorfe în interiorul elipsei fără tăieturi vor fi de asemenea olomorfe în interiorul elipsei cu tăietura considerată. Convergența dezvoltărilor lor va fi asigurată și pentru $1/\rho_0 < |\zeta| < \rho_0$.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, este evident că relațiile pe γ_1 determină aceleași valori ale funcțiilor de reprezentare luate de ambele părți ale segmentului, astfel că funcțiile sînt analitice în interiorul elipsei fără tăietură. Aceste condiții conduc la relațiile între coeficienți

$$\varphi_p = \varphi_{-p}, \quad \psi_p = \psi_{-p}, \quad \pi_p = \pi_{-p}. \tag{9}$$

A doua condiție la limită pe $\gamma_2 : \rho = \rho_2$ se scrie :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} p\, \pi_p\, \zeta^{p-1} = \sum_{-\infty}^{\infty} B_p\, e^{ip\theta}. \tag{10}$$

Am notat $e^{ip\theta} = \zeta/\rho_0$ și

$$i f_3 = \frac{1}{2R}\left[\frac{B_p}{1-\frac{1}{\zeta^2}} e^{ip\theta} - \frac{B_{-p}}{1-\frac{1}{\bar{\zeta}^2}} e^{-ip\theta}\right]. \tag{11}$$

Prin identificarea coeficienților se obțin soluțiile conforme și cu (9)

$$\pi_p = \pi_{-p} = \frac{B_{p-1}}{p\ \rho_0^{p-1}}, \quad (p \neq 0, \quad B_{-1} = 0, \quad B_p = B_{-p}). \tag{12}$$

În continuare vom transcrie prima condiție la limită din (6) după înmulțirea termenilor acesteia cu $1-1/\zeta^2$:

$$\varepsilon\left(1-\frac{\bar{\zeta}^2}{\rho_0^4}\right)\sum_{-\infty}^{\infty}\bar{\varphi}_p\,\bar{\zeta}^p + (\rho_0^2/\zeta + \zeta/\rho_0^2)\sum_{-\infty}^{\infty} p\zeta^{p-1} + \sum_{-\infty}^{\infty} b_p\,\zeta^p = \sum_{-\infty}^{\infty} A_p e^{ip\theta}, \tag{13}$$

în care intervin notațiile

$$(1-1/\zeta^2)\,\psi(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_p\,\zeta^p\,(1-1/\zeta^2)\left\{f_1 - if_2 + \sum_{-\infty}^{\infty}\left[(1+2\delta)\,\bar{\pi}_p\,\bar{\zeta}^p - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(1+\delta)\,p}{1-1/\bar{\zeta}^2}\pi_p\,\zeta^{p-1}\right]\right\} + \delta(\rho_0^2/\zeta + \zeta/\rho_0^2)\sum_{-\infty}^{\infty} p\,\pi_p\,\zeta^{p-1} = \sum_{-\infty}^{\infty} A_p e^{ip\theta}. \tag{14}$$

Se deduce

$$p_p = \psi_p - \psi_{p+2} (= \psi_{-p} - \psi_{-p-2} = -b_{-p-2}),$$

$$A_p = C_p - \rho_0^{-2} C_{p+2} + (1+2\delta)(\bar{\pi}_{-p}\rho_0^{-p} - \bar{\pi}_{-p-2}\rho_0^{-p-4}) -$$

$$- \frac{(1+\delta)\rho_0^4}{1-1/\rho_0^4}\{(p+1)\pi_{p+1} + (p+5)\pi_{p+5} - 2(p+3)\pi_{p+3}\} + \quad (15)$$

$$+ \delta\{(p+2)\pi_{p+2}\rho_0^{p+2} + p\,\pi_p\,\rho_0^{p-2}\},$$

$$f_1 - if_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} C_p\, e^{ip\theta}.$$

Prin identificarea coeficienților puterilor din (13) rezultă sistemul compatibil cu (9) și (15)

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\{\varepsilon(\rho_0^{-p}\bar{\varphi}_{-p} - \rho_0^{-p-4}\bar{\varphi}_{-p-2}) + (p+2)\rho_0^{p+2}\varphi_{p+2} + p\rho_0^{p-2}\varphi_p + b_p\rho_0^p\} = \quad (16)$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\{\varepsilon(\rho_0^{-p}\bar{\varphi}_p - \rho_0^{-p-4}\bar{\varphi}_{p+2}) + (p+2)\rho_0^{p+2}\varphi_{p+2} + p\rho_0^{p-2}\varphi_p + b_p\varphi_0^p\} = A_p$$

sau înlocuind p cu $-(p+2)$

$$\varepsilon(\rho_0^{p+2}\bar{\varphi}_{p+2} - \rho_0^{p-2}\bar{\varphi}_p) - (p+2)\rho_0^{-p-4}\varphi_{p+2} -$$

$$- p\rho_0^{-p}\varphi_p - b_p\rho_0^{-p-2} = A_{-p-2} \quad (17)$$

Înmulțind termenii din (16) cu ρ_0^{-p} iar cei din (17) cu ρ_0^{p+2}, va rezulta, prin adunarea ecuațiilor obținute, noul sistem

$$\varepsilon[(\rho_0^{2p+4} - \rho_0^{-2p-4})\bar{\varphi}_{p+2} - (\rho_0^{2p} - \rho_0^{-2p})\bar{\varphi}_p] +$$

$$+ (\rho_0^2 - \rho_0^{-2})[(p+2)\varphi_{p+2} - p\,\varphi_p] = \mathcal{A}_p, \quad (18)$$

$$\mathcal{A}_p = A_p\,\rho_0^{-p} + A_{-p-2}\,\rho_0^{p+2}.$$

Cunoscînd coeficienții φ_p, se pot determina coeficienții φ_{p+2}. Se constată că φ_0 nu intervine în determinarea celorlalți coeficienți, fiind astfel

Scanned with OKEN Scanner

arbitrar. Din (18) mai rezultă că pentru $p = -1$ are loc condiţia

$$\varepsilon\,\bar{\varphi}_1 + \varphi_1 = \frac{\mathcal{A}_{-1}}{2\,(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} = \frac{A_{-1}\,\rho_0}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \tag{19}$$

şi deci

$$\operatorname{Re}\varphi_1 = \frac{\rho_0 \operatorname{Re} A_{-1}}{(2-\gamma)(\rho_0^2 - \rho_2^{-2})}, \quad \gamma \operatorname{Im}\varphi_1 = \frac{\rho \operatorname{Im} A_{-1}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}. \tag{20}$$

Dacă $\gamma \to 0$, va trebui ca $\operatorname{Im} A_1 \to 0$. Cu ajutorul coeficienţilor φ_k se determină apoi coeficienţii $p_k = -p_{-k-2}$, $(p_1 = 0)$ astfel că funcţia

$$\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)\psi(\zeta) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p \left(\zeta^p - \frac{1}{\zeta^{p+2}}\right) \tag{21}$$

se anulează pentru $\zeta = \pm 1$, fiind astfel implicit determinată. Această funcţie se poate de altfel obţine aplicînd formula lui Cauchy.

Coeficienţii $\mathcal{A}_p$ se pot pune sub forma

$$\mathcal{A}_p = c_{p+2} - c_p \tag{22}$$

în care constantele

$$\begin{gathered} c_p = \varepsilon(\rho_0^{2p} - \rho_0^{-2p})\,\bar{\varphi}_p + (\rho_0^2 - \rho_0^{-2})\,p\varphi_p, \\ c_0 = 0, \quad c_1 = (\varepsilon\bar{\varphi}_1 + \varphi_1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) = A_{-1}\rho_0 \end{gathered} \tag{23}$$

se pot exprima în raport cu coeficienţii A şi $\mathcal{A}$ astfel

$$c_{2n} = \sum_{p=0}^{n-1} \mathcal{A}_{2p} = \sum_{p=1}^{n-1} (A_{2p}\rho_0^{-2p} + A_{-2p-2}\rho_0^{2p+2})$$

$$c_{2n+1} = c_1 + \sum_{p=1}^{n} \mathcal{A}_{2p-1} = c_1 + \sum_{p=1}^{n} (A_{2p-1}\rho_0^{-2p+1} + A_{-2p-1}\rho_0^{2p+1}). \tag{24}$$

Rezolvînd în raport cu φ_p obţinem relaţiile

$$\varphi_p = \frac{p(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})\,c_p - \varepsilon(\rho_0^{2p} - \rho_0^{-2p})\,\bar{c}_p}{p^2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})^2 - \varepsilon^2(\rho_0^{2p} - \rho_0^{-2p})^2}, \quad (p = 2, 3, \ldots) \tag{25}$$

care constituie altă formulare a coeficienţilor φ_p.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se utilizează coeficienții A_p ai dezvoltării din (14) și (15), se deduce, în cazul în care $\pi_p = 0$, $f_3 = 0$,

$$c_1 = C_{-1}\rho_0 - C_1\rho_0^{-1}, \qquad c_p = C_{-p}\rho_0^p - C_p\rho_0^{-p}. \tag{26}$$

În general însă asemenea relații sînt mai complicate.

Dacă funcțiile f_1, f_2 satisfac condițiile lui Dirichlet sau au în genere derivate de ordinul doi cu variație mărginită, atunci coeficienții C_p satisfac inegalitățile $|C_p| < C|\,|p|^3$, $(p = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ și deci, în concordanță cu (22) și (23), vor avea loc inegalitățile

$$|a_p|\,\rho_0^p < C|p|^3, \quad |b_p|\,\rho_0^p < C''|\,\varepsilon|\,k|^3. \tag{27}$$

Se deduce astfel, pentru ζ definit în domeniul dat $1/\rho_0 \leqslant |\zeta| \leqslant \rho_0$, convergența absolută și uniformă a seriilor utilizate. Pentru $\pi_p \neq 0$, $f_3 \neq 0$ rezultatele sînt analoge.

§ 82. Reducerea problemei mediane la ecuații funcționale, în cazul unui mediu interacționînd cu un rigid

Fie reprezentarea conformă a unei părți D mărginite sau nu a planului δ, de contur închis simplu L satisfăcînd condițiile admise în secțiunea δ) din § 17 pe cercul $|\zeta| < 1$ de contur γ

$$\delta = f(\zeta). \tag{1}$$

Vom presupune, în cazul unui domeniu finit D, că punctului $\zeta = 0$ îi corespunde punctul $\delta = 0$ iar în cazul domeniului infinit D, că punctului $\zeta = 0$ îi corespunde punctul $\delta = \infty$. Atunci (vezi § 17), în primul caz,

$$f(0) = 0 \tag{2}$$

iar în al doilea caz

$$f(\zeta) = \frac{c}{\zeta} + f^*(\zeta), \qquad f^*(\zeta) = \text{funcție olomorfă}. \tag{3}$$

În cazul mediului considerat vom presupune deocamdată că pentru un domeniu infinit tensiunile și deplasările rămîn mărginite la infinit. Conform relațiilor (16) și (17) din § 56, putem presupune că la infinit tensiunile și vectorul principal al forțelor sînt nule.

Scanned with OKEN Scanner

Funcțiile $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, $\pi(\zeta)$, definite în sensul relațiilor din (3) din § 56, vor fi olomorfe în domeniul D, exclusiv punctul $\zeta = \infty$, în cazul domeniului infinit, iar funcțiile $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, $\pi(\zeta)$ vor fi olomorfe în interiorul cercului unitate $|\zeta| < 1$, (γ). Mai presupunem ca și în teoria simetrică, că funcțiile $\varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, $\pi(\zeta)$, $\pi'(\zeta)$ sînt continui inclusiv pe γ (fiind deci regulate).

Vom putea lua $\psi(0) = 0$, $\pi(0) = 0$. De asemenea vom fixa valorile funcțiilor $\operatorname{Im} \varphi'(0)/f'(0)$ și $\operatorname{Re} \pi'(0)/f'(0)$ conform condițiilor (10) din § 54.

Condițiile la limită pentru prima problemă fundamentală sînt (vezi (1) din § 60)

$$\varepsilon\varphi(\sigma) + \frac{f(\sigma)}{\overline{f'(\sigma)}}\left(\overline{\varphi'(\sigma)} - \delta\overline{\pi'(\sigma)}\right) + \overline{\psi(\sigma)} - (1 + 2\delta)\,\pi(\sigma) +$$

$$+ (1 + \delta)\frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)}\,\pi'(\sigma) = f_1 + if_2, \tag{4}$$

$$(1 + \delta)\frac{h}{k}\operatorname{Im}\frac{\pi'(\sigma)}{f'(\sigma)} = f_3,$$

unde $\sigma = e^{i\theta}$ reprezintă un punct pe cercul γ, iar $\varphi(\sigma)$, $\varphi'(\sigma)$, $\pi(\sigma)$, $\pi'(\sigma)$, $\psi(\sigma)$ sînt valorile la limită atinse din interior. Prin conjugare rezultă condiția

$$\varepsilon\overline{\varphi(\sigma)} + \frac{\overline{f(\sigma)}}{f'(\sigma)}\left(\varphi'(\sigma) - \delta\pi'(\sigma) + \psi(\sigma) - (1 + 2\delta)\,\overline{\pi(\sigma)}\right) +$$

$$+ (1 + \delta)\frac{\overline{f(\sigma)}}{\overline{f'(\sigma)}}\,\overline{\pi'(\sigma)} = f_1 - if_2. \tag{5}$$

În cele de mai sus avem, conform relației (2) din § 60 și (1) din § 53,

$$f_1 - if_2 = i(X + iY) = i\int_0^s \left(T_x + iT_y + 2z\frac{k}{h}T_z\right)ds + \text{const.}, \tag{6}$$

$$f_3 = iZ = i\left(\int_A^B T_z\,ds + \text{const.}\right). \tag{7}$$

s este arcul pe γ iar constantele sînt determinate în raport cu σ (sau θ).

 Funcțiile (6) și (7) se presupun univoce și continui în raport cu θ. Vom mai

Scanned with OKEN Scanner

presupune că aceste funcții satisfac condițiile lui Hölder (și deci derivatele lor vor satisface aceleași condiții).

În continuare vom utiliza formulele

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\psi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - \zeta} \qquad \text{(a lui Cauchy)} \tag{8}$$

$$\overline{\varphi(0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\varphi(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma - \zeta} \qquad \text{Conform teoremei a II-a formulate în (4) din § 21.} \tag{9}$$

$$\overline{\pi(0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\pi(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma - \zeta}, \tag{10}$$

$$\pi'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}\pi'(\sigma). \tag{11}$$

Atunci (5) ne arată că are loc ecuația integrală

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}(f_1 - if_2) -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}\frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)}(\varphi'(\sigma) - \delta\pi'(\sigma)) - \varepsilon\varphi(0) +$$

$$+ (1 + 2\delta)\,\overline{\pi(0)} - \frac{1+\delta}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}\frac{\overline{f(\sigma)}}{\overline{f'(\sigma)}}\overline{\pi'(\sigma)} \tag{12}$$

în care putem lua $\pi(0) = 0$.

Ecuațiile (4) se pot transcrie sub forma

$$\overline{\psi(\sigma)} = f_1 + if_2 - \varepsilon\varphi(\sigma) - \frac{f(\sigma)}{\overline{f'(\sigma)}}\overline{(\varphi'(\sigma) - \delta\pi'(\sigma))} +$$

$$+ (1 + 2\delta)\,\pi(\sigma) - (1 + \delta)\frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)}\pi'(\sigma) = \overline{F(\sigma)}, \tag{13}$$

$$(1 + \delta)\frac{h}{2k}\left[\frac{\pi'(\sigma)}{f'(\sigma)} - \frac{\overline{\pi'(\sigma)}}{f'(\sigma)}\right] = if_3.$$

Deoarece $F(\sigma)$ este valoarea la limită a unei funcții $\psi(\zeta)$ olomorfe în interiorul lui γ, nulă pentru $\zeta = 0$ și deoarece luăm $\psi(0)=0$, rezultă prin aplicarea teoremei formulate în (4) din § 21

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\overline{F(\sigma)} = 0 \tag{14}$$

pentru ζ în interiorul lui γ. Cu acestea, ecuațiile din (13) se transcriu astfel

$$\varepsilon\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\frac{f(\sigma)}{\overline{f'(\sigma)}}\overline{(\varphi'(\sigma) - \delta\pi'(\sigma))} -$$

$$-(1+2\delta)\,\pi(\zeta) + \frac{1+\delta}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)}\pi'(\sigma) + \varepsilon c =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}(f_1 + if_2), \tag{15}$$

$$(1+\delta)\frac{h}{2k}\left[\pi'(\zeta) - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\frac{f'(\sigma)}{\overline{f'(\sigma)}}\overline{\pi'(\sigma)}\right] =$$

$$= \frac{i}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}f'(\sigma)f_3,$$

pentru ζ în interiorul lui γ; c reprezintă o constantă care se determină din condiția $\varphi(0) = 0$. Aceste ecuații dau funcțiile $\pi(\zeta)$ și $\varphi(\zeta)$ cu ajutorul cărora se determină $\psi(\zeta)$ din (12). Rezultatele precedente sînt generale deoarece nu am adus restricția (3) relativă la funcția de reprezentare.

În cazul în care se presupune că la infinit vectorul principal (X, Y, Z) și tensiunile sînt nule, formulele (7) din § 59 conduc la reprezentările

$$\varphi(\zeta) = \left(-\frac{X+iY}{2\pi} + \varkappa + 1 + 2\gamma\right)p\frac{\log\zeta}{\varkappa+\tau} + \Gamma\zeta + \varphi^0(\zeta), \tag{16}$$

$$\psi(\zeta) = \left(\varkappa\frac{X-iY}{2\pi(\varkappa+\varepsilon)}\left(\varkappa - 1 + \frac{4\gamma\varkappa}{\varkappa+\varepsilon}\right)\overline{p}\right)\log\zeta + \Gamma'\zeta + \psi^0(\zeta),$$

$$\pi(\zeta) = -\frac{Zk}{\pi(\varkappa+1+2\gamma)\,h}\zeta\log\zeta + p\log\zeta + \Gamma''\zeta + \pi^0(\zeta).$$

$\pi(\zeta)$, $\varphi^0(\zeta)$, $\psi^0(\zeta)$ sînt olomorfe în D exclusiv punctul $\zeta = \infty$.

Din formulele (17) de la § 56 rezultă expresiile pentru coeficienți

$$\operatorname{Re}\Gamma = \varepsilon_1(N_1 + N_2)/4 + \varepsilon_2 N_3/8, \qquad 2\gamma \operatorname{Im}\Gamma = T,$$

$$\Gamma' = -(N_1 - N_2)\, e^{-2i\nu}/2, \tag{17}$$

$$\operatorname{Re}\Gamma'' = [N_3 - \nu(N_1 + N_2)]/2\,(\varkappa + 1)\,(1 + \nu).$$

X, Y, Z se determină conform formulelor stabilite în funcție de tensiunile pe contur în (6).

În baza relației (3), relațiile (16) se transformă astfel:

$$\varphi(\zeta) = \left[\frac{X + iY}{2\pi} - (\varkappa + 1 + 2\gamma)\, p\right] \frac{\log \zeta}{\varkappa + \varepsilon} + \frac{\Gamma c}{\zeta} + \varphi^0(\zeta), \tag{18}$$

$$\psi(\zeta) = \left[-\varkappa \frac{X - iY}{2\pi(\varkappa + \varepsilon)} + \left(\varkappa - 1 + \frac{4\gamma\varkappa}{\varkappa + \varepsilon}\right)\overline{p}\right] \log \zeta +$$

$$+ \frac{\Gamma' c}{\zeta} + \varphi^0(\zeta),$$

$$\pi(\zeta) = \frac{Z k}{\pi(\varkappa + 1 + 2\gamma)} \left[f(\zeta) \log \zeta - \frac{c}{\zeta} \log (1 + \zeta f^*(\zeta))\right] -$$

$$- p \log \zeta + \frac{\Gamma'' c}{\zeta} + \pi^0(\zeta)$$

$\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$, $\pi_0(\zeta)$ sînt olomorfe în interiorul lui γ și continui în interiorul lui γ_0 și pe γ_0.

Spre deosebire de teoria simetrică clasică, nu vom putea impune condiția $\Gamma = \bar{\Gamma}$, $(\operatorname{Im}\Gamma = 0)$, deoarece aceasta ar atrage anularea componentei antisimetrice a tensiunii la ∞. În cazul cînd aceasta este nulă, condiția se va putea totuși pune. Substituind funcțiile (18) în (4), se constată că funcțiile $\varphi^0(\zeta)$, $\psi^0(\zeta)$ și $\pi^0(\zeta)$ satisfac condiții formal identice

Scanned with OKEN Scanner

celor din (5) dacă se efectuează următoarele substituţii :

$$f_1^* + i f_2^* = f_1 - i f_2 - \frac{X + i Y}{2\pi} \log \sigma - \varepsilon \frac{\Gamma c}{\sigma} -$$

$$- \frac{f(\sigma)}{\overline{f'(\sigma)}} \left\{ \frac{(X - iY)\,\sigma}{2\pi(\varkappa + \varepsilon)} - \overline{\Gamma}\,\overline{c}\,\sigma^2 + \frac{\delta Z}{\pi(\varkappa + 1 + 2\gamma)} \right.$$

$$\left. \cdot c\,\sigma \log(1 + \overline{f^*(\sigma)}/\sigma) + \delta(p\,\sigma + \Gamma''\sigma^2) \right\} - \Gamma'\,\overline{c}\,\sigma +$$

$$+ (1 + 2\delta) \left\{ \frac{Z}{\pi(\varkappa + 1 + 2\gamma)} \frac{c}{\sigma} \log(1 + \sigma f^*(\sigma)) - \frac{\Gamma'' c}{\overline{\sigma}} \right\} +$$

$$+ (1 + \delta) \frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)} \left\{ \frac{Z}{\pi(\varkappa + 1 + 2\gamma)} \left[\left(\frac{c}{\sigma} + f^*(\sigma) \right) \frac{1}{\sigma} + \right. \right. \qquad (19)$$

$$\left. \left. + \frac{c}{\sigma^2}(1 + \sigma f^*(\sigma)) - \frac{c(f^*(\sigma) + \sigma f^{*\prime}(\sigma))}{\sigma(1 + \sigma f^*(\sigma))} \right] - \frac{p}{\sigma} - \frac{\Gamma'' c}{\sigma^2} \right\},$$

$$i f_3^* = i f_3 - (1 + \delta) \frac{h}{k} \operatorname{Im} \frac{1}{f'(\sigma)} \left[\frac{Z}{2\pi(1 + \delta)} \left(f'(\sigma) \log \sigma - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{c}{\sigma} \log(1 + \sigma f^*(\sigma)) \right) - \frac{p}{\sigma} - \frac{\Gamma'' c}{\sigma^2} \right].$$

Am utilizat relaţiile $\overline{\sigma} = 1/\sigma$, $\log \sigma = i\,\theta$.

X, Y şi Z, conform ipotezelor, satisfac condiţii de tip Hölder şi deci $f_1 - i f_2$ va fi o funcţie continuă univocă de θ pe γ_0 ale cărei derivate satisfac de asemenea aceste condiţii. Univocitatea rezultă din faptul că, în urma parcurgerii conturului γ_0 în sens invers mersului acelor de ceasornic (şi deci parcurgerea conturului L se face în sensul mersului acelor de ceasornic, D rămînînd în stînga), $f_1^* + i f_2^*$ creşte cu $i(X + iY)$, adică la fel ca funcţia $(X + i\,Y) \log \sigma/2\pi$. Aşadar φ_0, ψ_0 satisfac aceleaşi condiţii de creştere ca şi φ, ψ. Analog se arată că f_3^* este o funcţie continuă univocă de θ, avînd creşterea $i\,Z$.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul celei de a doua probleme fundamentale avem, conform (4) din § 60, condițiile la limită :

$$\varkappa\,\varphi(\sigma) - \frac{f(\sigma)}{\overline{f'(\sigma)}}\left(\varphi'(\sigma) + \pi'(\sigma)\right) - \overline{\varphi(\sigma)} - \pi(\sigma) = 2\mu g, \qquad (20)$$

$$(\varkappa + 1)\,\mathrm{Re}\,\pi'(\sigma)\,/\,f'(\sigma) = 2\mu\, g_3,$$

unde

$$g = g_1 + ig_2 = u + iv,\ g_3 = W/2 \qquad (21)$$

reprezintă valoarea la limită a funcției complexe a deplasării mediane și respectiv $w/2z$.

În cazul în care pentru domeniul infinit avem $X = Y = 0$, $Z = 0$, $\Gamma = \Gamma' = \Gamma'' = 0$, vom avea funcții de reprezentare φ, ψ, π olomorfe. Va rezulta analog ca mai înainte condițiile

$$\varkappa\,\varphi(\zeta) - \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\sigma)}{\overline{f'(\sigma)}}\cdot\frac{\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\pi'(\sigma)}}{\sigma - \zeta}\,d\sigma - \pi(\zeta) = B(\zeta),$$

$$\frac{\varkappa + 1}{2}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\left[\frac{\pi'(\sigma)}{\overline{f'(\sigma)}} - \frac{\overline{\pi'(\sigma)}}{\overline{f'(\sigma)}}\right]\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}\right\} = C(\zeta) \qquad (22)$$

pentru ζ în interiorul lui γ, iar

$$B(\zeta) = \frac{2\mu}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{g\,d\sigma}{\sigma - \zeta},\quad C(\zeta) = \frac{2\mu}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{g_3\,d\sigma}{\sigma - \zeta}. \qquad (23)$$

Funcția $\psi(\zeta)$ este determinată prin condiția conformă cu (9)

$$\psi(\zeta) = -\frac{\mu}{\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{\bar{g}\,d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{\overline{f(\sigma)}}{f'(\sigma)}\,\frac{\varphi'(\sigma) + \pi'(\sigma)}{\sigma - \zeta}\,d\sigma + \qquad (24)$$

$$+ \varkappa\,\overline{\varphi(0)} - \overline{\pi(0)}.$$

În cazul cînd X, Y, Z, Γ, $\Gamma' \neq 0$, tratarea condițiilor se face în mod analog celor de mai înainte.

Scanned with OKEN Scanner

În continuare vom considera diferite goluri şi vom mai utiliza formulele (7), (10) din § 49, scrise sub forma

$$\sigma_1, \sigma_2 = \pm\frac{\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\theta\theta}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta}}{2}\right)^2 + \sigma^2_{(\rho\theta)}},$$

$$\tau = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta}}{2}\right)^2 + \sigma^2_{(\rho\theta)}} + \sigma_{[\rho\theta]} \tag{25}$$

care dau valorile maxime şi minime ale tensiunilor normale şi tangenţiale. Formula (8) din § 49

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\sigma_{(\rho\theta)}}{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta}} \tag{26}$$

furnizează unghiul pe care-l formează axa tensiunilor principale cu axa Ox.

§ 83. Soluţia primei probleme fundamentale pentru planul infinit cu gol eliptic

Fie transformarea conformă a domeniului D pe exteriorul cercului unitate $|\zeta|>1$ din (1), § 19, reformulată astfel

$$z = f(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right), \quad (R > 0, \quad 0 \leqslant m < 1). \tag{1}$$

Cercului $|\zeta| = 1$ îi corespunde elipsa L cu centrul în origina coordonatelor şi polii

$$a = R(1 + m), \qquad b = R(1-m). \tag{2}$$

Pentru $m = 0$ se obţine un cerc, pentru $m = 1$ elipsa se reduce la un segment pe axa Ox de lungime $4R$, $(-2R \leqslant x \leqslant 2R)$ iar D se reduce la planul infinit cu tăietura rectilinie.

Scanned with OKEN Scanner

Vor avea loc relațiile

$$\frac{f(\sigma)}{\overline{f'(\sigma)}} = \frac{\sigma^2+m}{\sigma(1-m\sigma^2)}, \quad \frac{\overline{f(\sigma)}}{f'(\sigma)} = \frac{\sigma(1+m\sigma^2)}{\sigma^2-m}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{f'(\sigma)} = \frac{\sigma^2}{R(\sigma^2-m)}, \quad \frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)} = \frac{\sigma(\sigma^2+m)}{\sigma^2-m}, \tag{4}$$

iar $f(\zeta) = \dfrac{R}{\zeta}$ + o funcție olomorfă.

Condițiile (4) din § 82 au forma

$$\varepsilon\varphi(\sigma) + \frac{\sigma^2+m}{\sigma(1-m\sigma^2)}\overline{(\varphi'(\sigma) - \delta\pi'(\sigma))} + \overline{\psi(\sigma)} - (1+2\delta)\pi(\sigma) + \tag{5}$$

$$+ (1+\delta)\frac{\sigma(\sigma^2+m)}{\sigma^2-m}\pi'(\sigma) = f_1 + if_2,$$

$$(1+\delta)\frac{h}{2kR}\left[\frac{\sigma^2\pi'(\sigma)}{\sigma^2-m} - \frac{\overline{\pi'(\sigma)}}{1-m\sigma^2}\right] = if_3.$$

Conjugînd termenii care apar în prima condiție, se obține

$$\varepsilon\overline{\varphi(\sigma)} + \sigma\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m}(\varphi'(\sigma) - \delta\pi'(\sigma)) + \psi(\sigma) - (1+2\delta)\overline{\pi(\sigma)} + \tag{6}$$

$$+ (1+\delta)\frac{(1+m\sigma^2)\overline{\pi'(\sigma)}}{(1-m\sigma^2)\sigma} = f_1 - if_2.$$

Vom presupune în primul rînd că (vezi (19) din § 56) au loc condițiile

$$X = Y = Z = 0, \; p = 0, \; \Gamma = \Gamma' = \Gamma'' = 0. \tag{7}$$

În acest caz $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ și $\pi(\zeta)$ sînt olomorfe în afară de γ iar la infinit putem presupune, conform condițiilor (10) din § 54,

$$\varphi(\infty) = 0, \quad \pi(\infty) = 0 \tag{8}$$

(înlocuind punctul zero cu punctul de la infinit).

Scanned with OKEN Scanner

În scopul rezolvării problemei la limită corespunzătoare condițiilor (5) vom mai considera o serie de proprietăți ale integralelor formate cu ajutorul termenilor care apar în aceste condiții și care intervin în formularea integrală dată în cele ce urmează.

În baza formulei (15) din § 21, se va efectua integrarea

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\varphi(\sigma) = \varphi(\infty) - \varphi(\zeta) = -\varphi(\zeta) \tag{9}$$

și analog

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\pi(\sigma) = -\pi(\zeta)\,. \tag{10}$$

Deoarece

$$\frac{\sigma^2+m}{\sigma(1-m\sigma^2)}\left(\overline{\varphi'(\sigma)} - \delta\overline{\pi'(\sigma)}\right), \overline{\varphi(\sigma)}, \overline{\psi(\sigma)}, \frac{\pi'(\sigma)}{1-m\sigma^2}, \frac{1+m\sigma^2}{\sigma(1-m\sigma^2)}\pi'(\sigma) \tag{11}$$

constituie valorile la limită ale funcțiilor

$$\frac{\zeta^2+m}{\zeta(1-m\zeta^2)}\left(\overline{\varphi'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} - \delta\overline{\pi'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\right) = F,\ \overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$
$$\overline{\psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right), \frac{1}{1-m\zeta^2}\overline{\pi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = G,\ \frac{1+m\zeta^2}{\zeta(1-m\zeta^2)}\overline{\pi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = H \tag{12}$$

se poate arăta că următoarele integrale sînt nule

$$\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}F,\ \overline{\varphi(\zeta)},\ \overline{\psi(\zeta)},\ G, H = 0. \tag{13}$$

Într-adevăr conform relațiilor (8) avem de exemplu $\varphi(\zeta) = \varphi_1(\zeta) + \varphi_2/\zeta^2 + \ldots$ pentru $|\zeta| > 1$ și deci $\varphi'(\zeta) = -\varphi_1/\zeta^2 - 2\varphi_2/\zeta^3\ldots$ pentru $|\zeta| > 1$ iar $\overline{\varphi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -\overline{\varphi}_1\zeta^2 - 2\overline{\varphi}_2\zeta^3\ldots$, pentru $|\zeta| < 1$. O dezvoltare analogă are loc pentru $\overline{\pi'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$. Rezultă că funcțiile $F(\zeta)$ și $G(\zeta)$ din (12) sînt olomorfe în interiorul lui γ și deci, conform teoremelor formulate în (1), (3) din § 21, au loc relațiile (13).

Scanned with OKEN Scanner

Alte relații care vor fi utilizate sînt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\left[\varepsilon\overline{\varphi(\sigma)}-(1+2\delta)\overline{\pi(\sigma)}\right]=0,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\sigma\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m}(\varphi'(\sigma)-\delta\pi'(\sigma))=$$

$$=-\zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}(\varphi'(\sigma)-\delta\pi'(\sigma)), \qquad (14)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\frac{\sigma^2}{\sigma^2-m}\pi'(\sigma)=-\frac{\zeta^2\pi'(\zeta)}{\zeta^2-m},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\sigma\frac{\sigma^2+m}{\sigma^2-m}\pi'(\sigma)=0.$$

Prima relație este consecința olomorfiei în interiorul conturului γ a funcțiilor $\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ și $\overline{\pi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ care iau valorile limită $\overline{\varphi(\zeta)}$ și $\overline{\pi(\zeta)}$ precum și a teoremei enunțate în (4) din § 21. A doua egalitate din (14) rezultă de exemplu în baza observației că sub semnul integralei apare limita unei funcții olomorfe în afară de γ împărțită la $\sigma-\zeta$, funcție care se anulează la infinit conform celor menționate în demonstrația relațiilor (13). Se aplică (13) din § 21. A treia relație decurge în mod complet analog, observînd că $\zeta^2\pi'(\zeta)/(\zeta^2-m)$ este olomorfă în afara lui γ iar la infinit se anulează. Formula (19) din § 21 conduce la rezultatul dat. Ultima relație rezultă odată cu precedenta, observînd că funcția $\zeta(\zeta^2+m)\pi'(\zeta)/(\zeta^2-m)$ este olomorfă în afară de γ iar la infinit se anulează.

Ținînd seama de relațiile de mai sus, se constată că înmulțind termenii condițiilor la limită (5) cu $d\sigma/2\pi i\,(\sigma-\zeta)$ și integrînd pe γ, rezultă noile ecuații

$$\varepsilon\varphi(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}(f_1+if_2)+(1+2\delta)\pi(\zeta),$$

$$(1+\delta)\frac{h}{2k}\frac{\zeta^2\pi'(\zeta)}{\zeta^2-m}=-\frac{R}{2\pi}\int_\gamma\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}f_3. \qquad (15)$$

ζ corespunde unui punct arbitrar exterior lui γ.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a determina funcția $\psi(\zeta)$, se va aplica teorema enunțată în (15) din § 21 :

$$\psi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}\psi(\sigma) + \psi(\infty). \tag{16}$$

Totodată (16) din § 21 în care luăm $\zeta = 0$ și $t = \sigma$ conduce la relația :

$$\psi(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma}\psi(\sigma) \tag{17}$$

Substituția expresiei pentru $\psi(\sigma)$ date de (6) în (16) și aplicarea relațiilor (13), (14) și (17) furnizează formula

$$\psi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}(f_1 - if_2) - \zeta\frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m}(\varphi'(\zeta) - \delta\pi'(\zeta)) + \tag{18}$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma}(f_1 - if_2).$$

Ultimul termen va fi neglijat deoarece este o constantă care nu influențează cîmpul elastic. Dacă $f_1 - if_2$ și f_3 admit derivate satisfăcînd condiții de tip Hölder, soluția este regulată.

În cazul în care X, Y, Z sînt diferiți de zero, vor avea loc descompunerile (9) din § 59, în care $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ și $\pi_0(\zeta)$ sînt olomorfe pentru $|\zeta| > 1$. Se pot accepta restricțiile (8). Dacă se substituie expresiile furnizate de noile descompuneri considerate în (5), rezultă că în aceste condiții trebuie efectuate următoarele înlocuiri

$$\varphi, \psi, \pi \to \varphi_0, \psi_0, \pi_0,$$

$$f_1 + if_2 \to f_1^* + if_2^* = f_1 + if_2 - R\left[\varepsilon\Gamma\sigma + \frac{\sigma^2 + m}{\sigma(1 - m\sigma^2)}(\bar{\Gamma} - \delta\bar{\Gamma}'') + \right.$$
$$+\frac{\bar{\Gamma}'}{\sigma} - (1 + 2\delta)\Gamma''\sigma + (1 + \delta)\sigma\frac{(\sigma^2 + m)}{1 - m\sigma^2}\Gamma''\Big] +$$
$$+\frac{X + iY}{2\pi}\log\sigma + \frac{\sigma^2 + m}{1 - m\sigma^2}\left\{\left[\frac{X - iY}{2\pi} - 2(1 + \delta)\bar{p}\right]\frac{1}{\varkappa + \varepsilon} - \right. \tag{19}$$
$$\left. - \frac{\delta kZR}{2\pi(1 + \delta)h}\frac{1 + m\sigma^2}{\sigma^2} + \delta p\right\} + (1 + \delta)\frac{\sigma^2 + m}{\sigma^2 - m}\left[\frac{kZR(\sigma^2 + m)}{2\pi(1 + \delta)h} - p\right],$$

Scanned with OKEN Scanner

$$f_3^* = f_3 - (1+\delta)\frac{h}{2kRi}\left\{\frac{\sigma^2\Gamma''}{\sigma^2-m} - \frac{\overline{\Gamma''}}{1-m\sigma^2} + \right.$$

$$+\frac{kZ}{\pi(\varkappa+1+2\gamma)hR}\left[\frac{\sigma^2}{\sigma^2-m}\left(f'(\sigma)\log\sigma + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{f(\sigma)}{\sigma}\right) - \frac{\overline{f'(\sigma)}\log\bar{\sigma} + \overline{f(\sigma)}/\bar{\sigma}}{1-m\sigma^2}\right]\Bigg\}.$$

Aceste expresii sînt univoce pe γ iar creşterea funcţiei $f_1 - if_2$ prin parcurgerea lui γ este compensată de aceea a termenului logaritmic de mai sus.

Formulele (15) şi (18) se transcriu atunci astfel

$$\varepsilon\varphi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}(f_1^* + if_2^*),$$

$$\psi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}(f_1^* - if_2^*) - \zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}(\varphi_0'(\zeta) - \delta\pi_0'(\zeta)), \quad (20)$$

$$(1+\delta)\frac{\zeta^2}{2kR}\pi'(\zeta) = \frac{\zeta^2-m}{2\pi}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}f_3^*.$$

§ 84. Întinderea plăcii cu gol eliptic

Se va considera conturul golului neîncărcat ($X = Y = Z = 0$, $p = 0$, $f_1 = f_2 = f_3 = 0$) iar la infinit se va admite o tensiune de întindere porientală într-o direcţie care face unghiul ν cu axa Ox şi alta în sens transversal q. În acest caz, relaţiile (17) din § 56 conduc la condiţiile:

$$\sigma_1 = p, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = q, \quad B = \varepsilon_1\frac{p}{4} + \varepsilon_2\frac{q}{8}, \quad \gamma C = 0,$$

$$\Gamma' = -\frac{p}{2}e^{-2i\nu}, \quad B'' = \frac{q-\nu p}{2(\varkappa+1)(1+\nu)} = \mathrm{Re}\,\Gamma''. \quad (1)$$

ε_1 şi ε_2 apar în relaţiile menţionate.

Scanned with OKEN Scanner

Formulele (19) din § 83 se scriu astfel

$$f_1^* + if_2^* = -R\left\{\varepsilon B\sigma + \frac{\sigma^2+m}{\sigma(1-m\,\sigma^2)}(B-\delta B'') - \frac{p}{2\sigma}e^{2iv} + \right.$$
$$\left. + (B''+iC'')\left[(1+\delta)\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2} - 1 - 2\delta\right]\sigma\right\},$$
$$f_3^* = -(1+\sigma)\frac{h}{2ki}\left\{\left[\frac{\sigma^2}{\sigma^2-m} - \frac{1}{1-m\sigma^2}\right]B'' + \right. \tag{2}$$
$$\left. + \left[\frac{\sigma^2}{\sigma^2-m} + \frac{1}{1-m\sigma^2}\right]iC''\right\}.$$

Funcțiile de variabilă ζ care iau pe γ valorile descrise de funcțiile de σ din expresiile de mai sus, au următoarele proprietăți :

$\dfrac{\zeta+m}{\zeta(1-m\zeta^2)}$ are în punctul $\zeta=0$ un pol cu parte principală m/ζ și în rest este olomorfă în interiorul lui γ

$\dfrac{\zeta^2+m}{1-m\zeta^2}\zeta,\ \dfrac{1}{1-m\,\zeta^2}$ sînt olomorfe în interiorul lui γ (3)

$\dfrac{\zeta^2}{\zeta^2-m} = \dfrac{\zeta}{2}\left\{\dfrac{1}{\zeta+m} + \dfrac{1}{\zeta-m}\right\}$ este olomorfă în exteriorul lui γ iar la infinit are forma $1 + m\,O(1/\zeta^2)$

$\zeta(1+m\,\zeta^2)/(\zeta^2-m)$ este olomorfă în exteriorul lui γ iar în punctul $\zeta=\infty$ are forma $m\,\zeta + O(1/\zeta)$.

Funcția $(1+m\,\zeta^2)/\zeta(\zeta^2-m)$ este de asemenea olomorfă în exteriorul lui γ, iar la infinit se comportă ca funcția m/ζ.

Teoremele enunțate în (18), (19) din § 21 conduc la următoarele expresii ale integralelor necesare în cele următoare :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\frac{\sigma^2+m}{1-m\,\sigma^2} = -\frac{m}{\zeta},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\,\sigma\frac{1+m\,\sigma^2}{\sigma^2-m} = -\zeta\frac{1+m\,\zeta^2}{\zeta^2-m} + m\zeta = -\frac{(1+m^2)\,\zeta}{\zeta^2-m},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\,\frac{\sigma^2}{\sigma^2-m}=-\frac{\zeta^2}{\zeta^2-m}+1=-\frac{m}{\zeta^2-m}, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\,\frac{1+m\sigma^2}{\sigma(\sigma^2-m)}=-\frac{1+m\zeta^2}{\zeta(\zeta^2-m)}+\frac{m}{\zeta}=-\frac{1+m^2}{\zeta(\zeta^2-m)}.$$

De asemenea (18) și (1) din § 21 conduc la relațiile

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\,\sigma=0,\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{(\sigma-\zeta)\sigma}=-\frac{1}{\zeta},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\,\sigma\,\frac{1+\sigma^2}{1-m\sigma^2}=0,\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\,\frac{1}{1-m\sigma^2}=0. \tag{5}$$

Relațiile (20) din § 83 se vor scrie astfel după aplicarea formulelor (4) și (5):

$$\varepsilon\varphi_0(\zeta)=-\frac{mR}{\zeta}(B-\delta B'')+\frac{pR}{2\zeta}e^{2i\nu},$$

$$\psi_0(\zeta)=R\left\{-\frac{\varepsilon B}{\zeta}-\zeta\frac{1+m^2}{\zeta^2-m}(B-\delta B'')+\right. \tag{6}$$

$$\left.+B''\left[-(1+\delta)\frac{1+m^2}{\zeta(\zeta^2-m)}+\frac{1+2\delta}{\zeta}\right]\right\}-\zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}(\varphi_0'(\zeta)-\delta\pi_0'(\zeta)),$$

$$\pi_0(\zeta)=m\frac{B''}{\zeta}R.$$

Luăm $C''=0$ deoarece această constantă nu va afecta expresiile tensiunilor.

Funcțiile (9) din § 59 pot fi retranscrise astfel

$$\varphi(\zeta)=\varphi_0(\zeta)+BR\zeta,\quad \psi(\zeta)=\psi_0(\zeta)-\frac{p}{2}e^{-2i\nu}R\zeta, \tag{7}$$

$$\pi(\zeta)=\pi_0(\zeta)+B''R\zeta=B''R\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a calcula tensiunile se utilizează (4) din § 59

$$\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\theta\theta} = 2\,(1+\varepsilon)\,\mathrm{Re}\,\varphi'(\zeta)/f'(\zeta).$$

Deoarece

$$4\varphi'(\zeta)/f'(\zeta) = \frac{1}{(\zeta^2 - m)\,\varepsilon}\,[4m\,(B - \delta B'') + 4\varepsilon B\zeta^2 - 2pe^{2i\nu}] = \tag{8}$$

$$= \frac{4B\varepsilon\rho^2 e^{2i\theta} + 4m\,(B - \delta B'') - 2p\,e^{2i\nu}}{(\rho^4 - 2m\,\rho^2\cos 2\theta + m^2)\,\varepsilon}\,(\rho^2 e^{-2i\theta} - m)$$

avem

$$\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\theta\theta} = \tag{9}$$

$$= \frac{2(1-\gamma)}{\varepsilon}\,\frac{2\varepsilon B\rho^4 - p\rho^2\cos 2(\theta-\nu) - 2m(\delta B'' - 2\gamma B)\rho^2\cos 2\theta - 2m^2(B - \delta B'') + pm\cos 2\nu}{\rho^4 - 2\,m\rho^2\cos 2\theta + m^2}.$$

Pentru $\rho = 1$ rezultă $\sigma_{\theta\theta} = 0$ și deci

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{(1 - 2m\cos 2\theta + m^2)\,\varepsilon}\left\{\frac{1}{(\varkappa+1)\,(1+\nu)}\,[(\varkappa + 1 + 2\varepsilon\nu)(\varepsilon - m^2 + \right.$$

$$+ 2\gamma m\cos 2\theta) + 2\,(1-\gamma)\,\delta\,(q - \nu p)\,(m^2 - m\cos 2\theta)] + \tag{10}$$

$$\left. + 2\,(1-\gamma)\,p\,(m\cos 2\nu - 2\cos 2\,(\theta - \nu))\right\}.$$

Se constată că pentru $q = \nu p$ și $\gamma = 0$, caz corespunzător aproximativ absenței deformației normale transversale, tensiunea stabilită e independentă de θ.

Luînd $\gamma = 0$, $\varepsilon = 1$, $q = 0$ și neglijînd ν, se obține soluția stabilită în teoria clasică de către C. E. Inglis [1], și restabilită pe alte căi de către T. Pöschl [1], L. Föppl [1] și N. I. Mushelișvili [4].

În cazul în care la infinit există un cîmp de tensiune constînd într-o întindere tridimensională,

$$\sigma_1 = \sigma_2 = p, \quad \sigma_3 \neq 0. \tag{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom suprapune soluțiile (6) și (7) pentru $\nu = 0$ și $\nu = \pi/2$ astfel că în locul soluțiilor φ_0, φ_0, π_0 din (6) și (7) vor interveni următoarele

$$\varepsilon\tilde{\varphi}_0(\zeta) = -\frac{2mR}{\zeta}(B - \delta B''),\quad \tilde{\psi}_0(\zeta) = 2\varphi_0(\zeta),\quad \bar{\pi}_0(\zeta) = 2\pi_0(\zeta),$$

$$\tilde{\varphi}(\zeta) = \tilde{\varphi}_0(\zeta) + 2BR\zeta,\quad \tilde{\psi}(\zeta) = \tilde{\psi}_0(\zeta),\quad \tilde{\pi}(\zeta) = \tilde{\pi}_0(\zeta) + 2B''R\zeta. \tag{12}$$

În cadrul teoriei clasice se obține pentru o incidență a forței $\nu=0$ și pentru $\theta = \pm\pi/2$ formula

$$\sigma_{\theta\theta} = p\left(1 + 2\frac{b}{a}\right) \tag{13}$$

a și b fiind semiaxele elipsei. Pentru $\theta = 0$ se obține valoarea tensiunii

$$\sigma_{\theta\theta} = -p$$

Aceste valori sînt limită pentru incidența considerată.

Pentru $b/a = k = 2/3$, s-a construit diagrama valorilor σ_{max} și σ_{min} asociate teoriei clasice conform formulelor (25) din § 83, care apar în figura 86. În figura 87 apar liniile pe care tensiunile tangențiale mediane sînt constante iar în figura 88 traiectoriile tensiunilor principale. Pentru $k=3/2$ apar respectiv în figurile 89, 90 și 91 aceleași elemente.

Rezultate pentru diferiți m apar în lucrările lui H. Czudek [1], K. Hirschfeld [1], Isida [1], Villagio Piero [1], I. I. Vorovici și A. C. Kosmodamianski [1].

Menționăm valorile trecute în tabloul de mai jos pentru $b/a=3/2$ sau $2/3$ iar $\gamma = 0$, $\nu=0$, corespunzătoare aproximației din teoria clasică.

În cazul golului circular, pe baza formulelor (6) din § 85, stabilite anterior și (25) din § 82, s-au construit pentru $\gamma = 0$, $\nu = 0$, în cadrul aproximației teoriei clasice, liniile pe care σ_{max} (în fig. 92) și σ_{min} (în fig.93) sînt egale. În figura 94 apar liniile de-a lungul cărora valorile maxime ale tensiunilor tangențiale sînt egale.

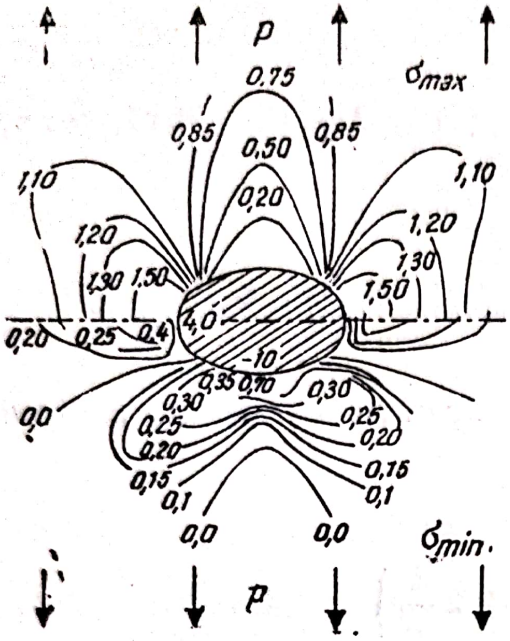


Fig. 86

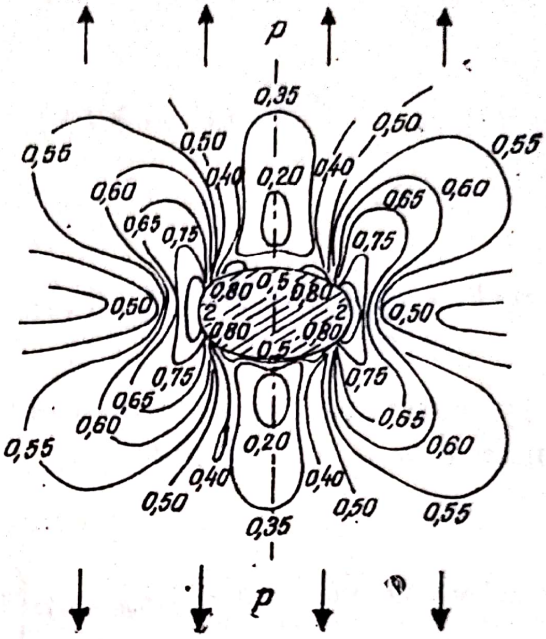


Fig. 87

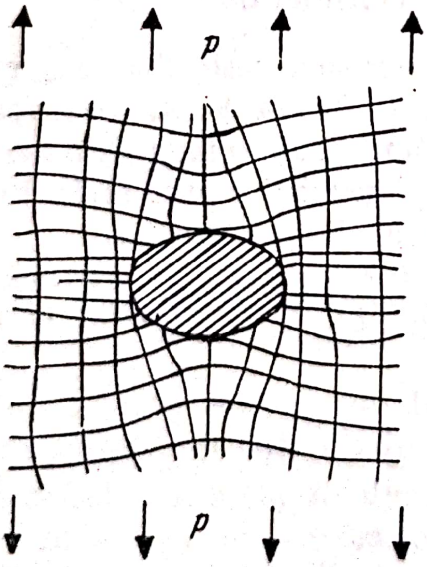


Fig. 88

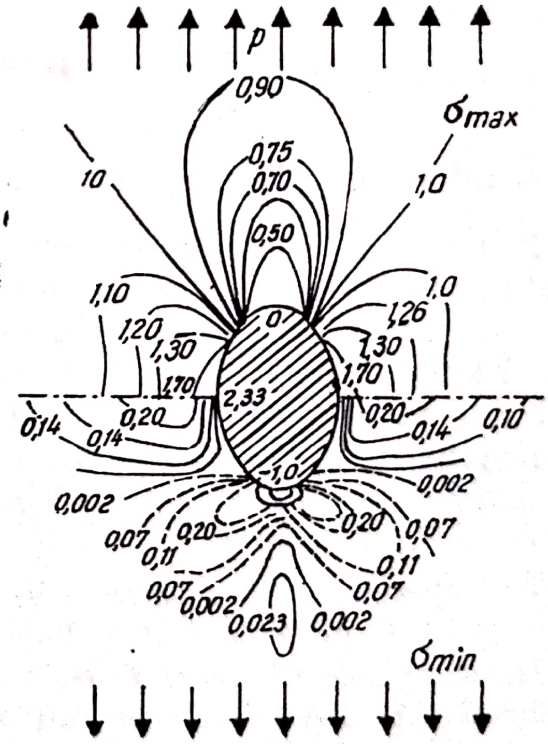


Fig. 89

Scanned with OKEN Scanner

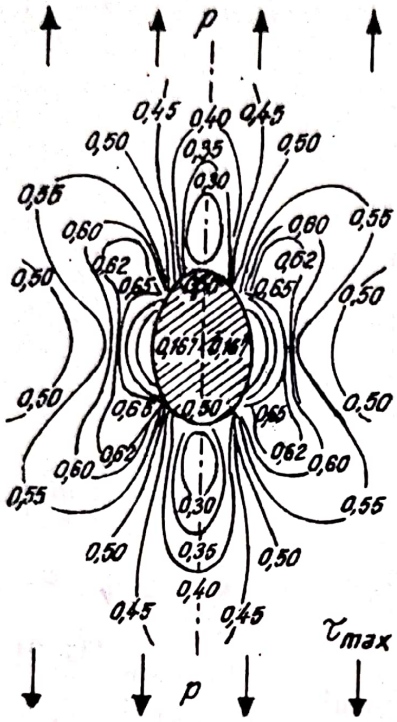


Fig. 90

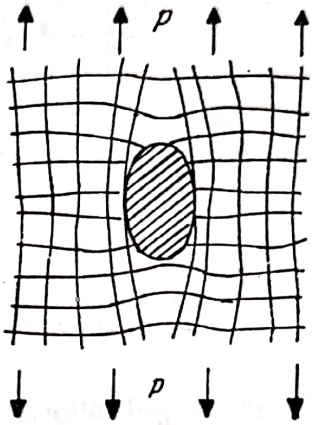


Fig. 91

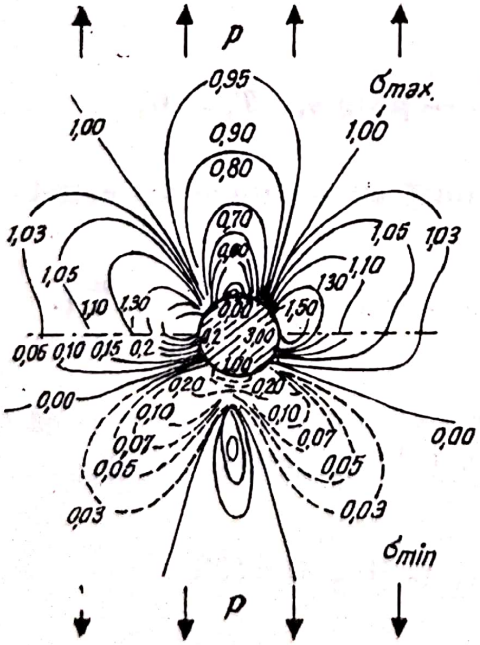


Fig. 92

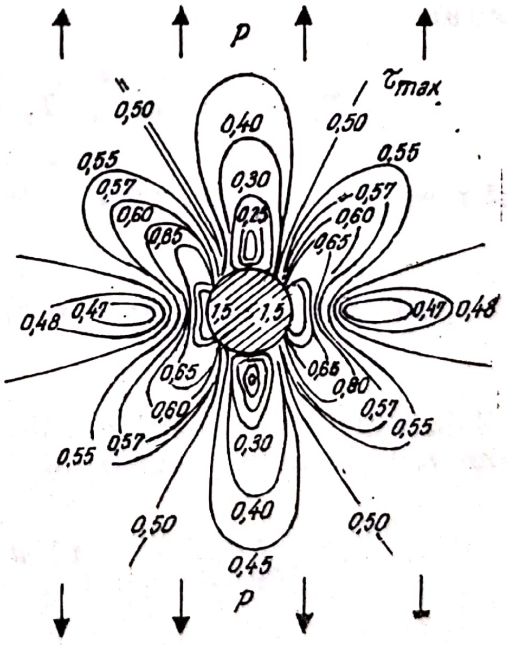


Fig. 93

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul

Valorilor $\sigma_{\theta\theta}$

θ	b/a	
	3/2	2/3
0	− 1,00	−1,00
10	− 0,93	−0,78
20	− 0,72	−0,23
30	− 0,35	0,43
40	0,19	1,04
50	0,93	1,54
60	1,86	1,90
70	2,85	2,15
80	3,67	2,29
90	4,00	2,38

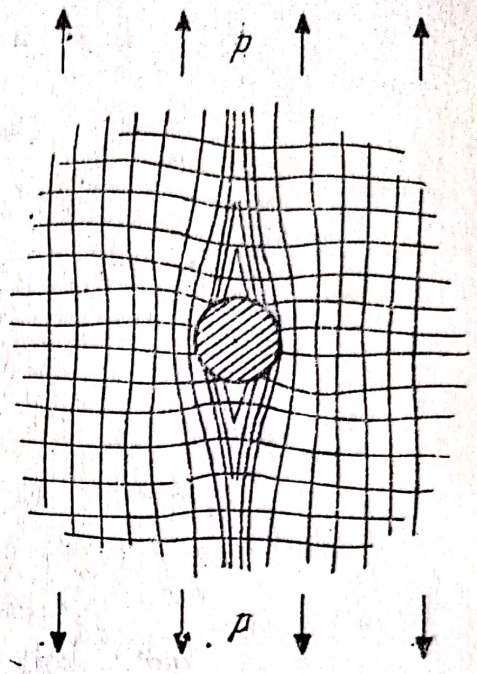


Fig. 94

§. 85 Placă avînd un gol eliptic pe conturul căruia se aplică o presiune hidrostatică

În acest caz intervin următoarele componente ale tensiunii aplicate pe contur

$$T_x = -p\cos\nu, \quad T_y = -p\sin\nu, \quad T_z = 0, \tag{1}$$

p fiind presiunea. Atunci, relația (2) din § 60 se integrează astfel

$$f_1 + if_2 = -ip\int(dy - idx) = -p\bar{z} = -pR\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right). \tag{2}$$

Substituind în (15) și (18) din § 83, se deduc, în ipoteza că tensiunile sînt nule la infinit, expresiile funcțiilor de reprezentare

$$\varepsilon\varphi(\zeta) = -\frac{pRm}{\zeta} + (1 + 2\delta)\pi(\zeta),$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{pR}{\zeta} - \frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m}\frac{pRm}{\varepsilon\zeta}, \quad \pi(\zeta) = \text{const.} \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $m=1$, golul se reduce la o fantă rectilinie ca în figura 95. Formulele (6) din § 59 dau următoarele expresii ale tensiunilor totale:

$$\sigma_{\rho\rho} = -p + \frac{p}{\varepsilon(\rho^4 - 2\rho^2\cos 2\theta + 1)}\{(\rho^2-1)^3(\rho^2+1) + 2\gamma\rho^2[3(\rho^4-1)\cos 2\theta - (\rho^2-1)\cos 4\theta + 2 - \rho^2 - \rho^6]\},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + \frac{p}{\varepsilon(\rho^4 - 2\rho^2\cos 2\theta + 1)^2}\{(\rho^4-1)(\rho^4 - 4\rho^2\cos 2\theta + 1 + 2\rho^2) + 2\gamma\rho^2[(\cos 2\theta - \rho^2)(\rho^4 - 2\rho^2\cos 2\theta + 1) - (2 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta + \rho^2)]\},$$

$$\sigma_{\theta\rho} = \frac{p\sin 2\theta}{\varepsilon(\rho^4 - 2\rho^2\cos 2\theta + 1)^2}\left\{2(\rho^2-1)^2\rho^2 + 2\gamma\rho^2\left[\rho^4 - 2\rho^2 - \frac{1}{\rho^2} + 2 - 2\rho^2\cos 2\theta + \frac{\sin 4\theta}{\sin 2\theta}\right]\right\}, \tag{4}$$

$$\sigma_{\theta\rho} = \frac{p\sin 2\theta}{\varepsilon(\rho^4 - 2\rho^2\cos 2\theta + 1)^2}\left\{2(\rho^2-1)^2\rho^2 + 2\gamma\rho^2\left[-\rho^4 - 2\rho^2 - \frac{1}{\rho^2} - 2 + 2\rho^2\cos 2\theta + \frac{\sin 4\theta}{\sin 2\theta}\right]\right\}.$$

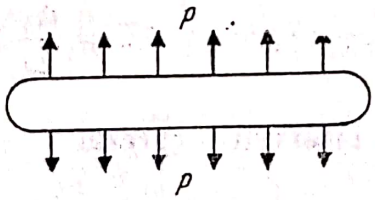


Fig. 95

Pentru $\rho = 1$ avem

$$\sigma_{\rho\rho} = -p, \quad \sigma_{\theta\rho} = 0. \tag{5}$$

Deplasările rezultă din (3), § 59. Pentru $\gamma = 0$ avem

$$u_\rho = -\frac{pR}{2\mu\rho}\frac{(\varkappa+1)\rho^2\cos 2\theta + 1 - \varkappa - 2\rho^2}{(\rho^4 - 2\rho^2\cos 2\theta + 1)^{1/2}},$$

$$u_\theta = -\frac{pR\rho}{2\mu}\frac{(1-\varkappa)\sin 2\theta}{(\rho^4 - 2\rho^2\cos 2\theta + 1)^{1/2}}. \tag{6}$$

Către marginea fantei tensiunile nu mai sînt mărginite. Astfel, luînd $x = 2R$, $\theta = 0$, $\nu = 0$, $\rho = 1$ deducem, în cadrul aproximației teoriei clasice,

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -p + \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} p, \quad \sigma_{xy} = 0. \tag{7}$$

Notînd prin s distanța de la marginea $x = \pm 2R$ la un punct pe contur, deducem că pentru $s \to 0$ avem

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{p\sqrt{R}}{\sqrt{s}} + \text{mărime marginită}. \tag{8}$$

Deplasările rămîn mărginite pe conturul fantei.

§ 86. Gol eliptic avînd un contur supus unor tensiuni tangențiale uniforme

Admitem următoarele încărcări pe contur definite conform cu (12) din § 52 : $T = \text{const.}$ și $T_2 = \text{const.}$, de unde

$$T_x + iT_y = ie^{-i\nu} T = \frac{d\zeta}{ds} T. \tag{1}$$

În (1) din § 53 va interveni expresia

$$T_x + T_y + 2\zeta \frac{k}{h} T_z = \frac{d\zeta}{ds} T + 2\zeta \frac{k}{h} T_z. \tag{2}$$

În (2) din § 60 vom avea deci, deoarece $ds = |d\zeta| = |\sigma d\rho|$, iar pe contur $\rho = 1$,

$$f_1 + if_2 = i\zeta T + 2\frac{k}{h} T_z \int_A^B \zeta ds =$$

$$= iR[(\sigma + m/\sigma)\ T + 2k(T_z/h)\ (m/\sigma - \sigma)], \tag{3}$$

$$if_3 = iT_z \int_A^B ds = iT_z\theta = T_z \log \sigma.$$

Scanned with OKEN Scanner

Substituind în (15) și (18) din § 83 și presupunînd că la infinit tensiunile sînt nule iar $T_z = 0$, rezultă

$$\varphi(\zeta) = -\frac{iTRm}{\varepsilon\zeta}, \quad \psi(\zeta) = -\frac{iTR}{\zeta} + \frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m} i\frac{TRm}{\varepsilon\zeta}, \tag{4}$$

$$\pi(\zeta) = \text{const.}$$

Dacă $T = 0$, funcțiile de reprezentare se exprimă astfel

$$\varphi(\zeta) = \frac{1 + 2\delta}{\varepsilon}\pi(\zeta), \quad \psi(\zeta) = -\zeta\frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m}\frac{1 + 2\delta}{\varepsilon}\pi'(\zeta). \tag{5}$$

Din (15) din § 83 deducem, observînd că funcția $\log \zeta$ are în afara lui γ un pol la infinit și aplicînd (18) din § 21

$$\pi'(\zeta) = \frac{kR(\zeta^2 - m)}{(1 + \delta)h\zeta^2} T_z \log \zeta. \tag{6}$$

Acest rezultat decurge direct din $(5)_2$, § 83. În definitiv avem

$$\pi(\zeta) = \frac{kRT_z}{(1 + \delta)h}\left\{\zeta(\log \zeta - 1) - \frac{m}{\zeta}(\log \zeta + 1)\right\}. \tag{7}$$

§ 87. Gol eliptic parțial acționat cu o presiune uniformă

În cazul în care o presiune uniformă p acționează pe o porțiune a conturului $\delta_1 M \delta_2$ conform figurii 96, iar tensiunile se anulează la infinit,

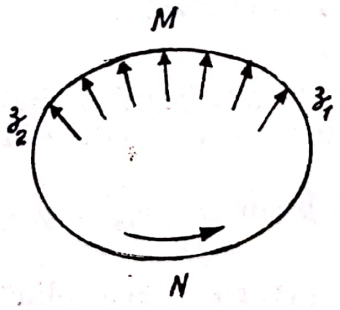


Fig. 96

vom avea, conform relațiilor (2) din § 85 și (3) din § 87 :

$$\begin{gathered} f_1 + if_2 = -pR(\sigma + m/\sigma) \quad \text{pe cercul } \delta_1 N \delta_2 \\ if_3 = T_z \log \sigma \\ f_1 + if_2 = -p\delta_2, \quad if_3 = iT_z\theta_2 \quad \text{pe cercul } \delta_2 N \delta_1 \end{gathered} \tag{1}$$

Formulele (19) din § 83 se scriu astfel

$$f_1^* + if_2^* = f_1 + if_2 + \frac{X+iY}{2\pi}\log\sigma +$$

$$+\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}\left\{\left[\frac{X-iY}{2\pi} - 2(1+\delta)p\right]\frac{1}{\chi+\varepsilon} - \frac{\delta kZR}{2\pi(1+\delta)}\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2} + \delta p\right\} +$$

$$+(1+\delta)\frac{\sigma^2+m}{m-\sigma^2}\left(\frac{kZR(\sigma^2+m)}{2\pi(1+\delta)h} + p\right), \qquad (2)$$

$$f_3^* = f_3 - \frac{(1+\delta)}{2i}\left\{\frac{\sigma^2}{\sigma^2-m}\left[\left(1-\frac{m}{\sigma^2}\right)\log\sigma + 1 + \frac{m}{\sigma^2}\right] +\right.$$

$$\left. +\frac{1}{1-m\sigma^2}[(1-m\sigma^2)\log\sigma - 1 - m\sigma^2]\right\}z$$

Conform formulelor (2) din § 60 se mai deduc următoarele

$$X + iY = -i(f_1 + if_2)/\tfrac{1}{2} = pi(\delta_1 - \delta_2),$$
$$Z = f_3/\tfrac{1}{2} = T_z(\theta_1 - \theta_2). \qquad (3)$$

§ 88. Întinderea plăcii cu un gol avînd forme diferite într-o singură direcție mediană

Vom presupune o întindere la infinit avînd intensitatea p și formînd unghiul ν cu axa Ox. Conform relației (12) din § 49 avem

$$\sigma_{xx} = p\cos^2\nu, \quad \sigma_{yy} = p\sin^2\nu, \quad \sigma_{xy} = p\sin\nu\cos\nu = \sigma_{yx}. \qquad (1)$$

Funcțiile de reprezentare pentru placa plină rezultă din (17), § 56, pentru $\sigma_1 = p$, $\sigma_2 = 0$ și $\sigma_3 = 0$

$$B = \varepsilon_1\frac{p}{4}, \quad C = 0, \quad \Gamma' = -\frac{p}{2}e^{-2i\nu},$$

$$B'' = -\frac{\nu^* p}{2(\varkappa+1)}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{1-\gamma}\left\{\frac{1}{1+\nu} + \frac{2\varepsilon\nu^*}{\varkappa+1}\right\}, \quad \nu^* = \frac{\nu}{\nu+1}. \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

În consecință, funcțiile (11) din § 56 se vor scrie astfel

$$\varphi^{**}(\zeta) = \varepsilon_1 \frac{p}{4}\zeta + \varphi_0(\zeta), \quad \psi^{**}(\zeta) = -\frac{p}{2}e^{-2i\nu}\zeta + \psi_0(\zeta),$$
$$\pi^{**}(\zeta) = -\frac{\nu^* p}{2(\varkappa+1)}\zeta + \pi_0(\zeta). \tag{3}$$

În domeniul transformat de (1), § 82, pe interiorul cercului γ avem, conform formulelor (16) din § 82,

$$\varphi(\zeta) = \varepsilon_1 \frac{p}{4} f(\zeta) + \varphi_0(\zeta), \quad \psi(\zeta) = -\frac{p}{2}e^{-2i\nu} f(\zeta) + \psi_0(\zeta),$$
$$\pi(\zeta) = -\frac{\nu^* p}{2(\varkappa+1)} f(\zeta) + \pi_0(\zeta). \tag{4}$$

Condițiile (19) din § 82 se vor înlocui prin următoarele derivate direct din (4), § 82,

$$f_1^* + if_2^* = f_1 + if_2 - \{f(\sigma)\,[\varepsilon\Gamma + \overline{\Gamma} - \delta(\Gamma'' + \overline{\Gamma''})] +$$
$$+ \overline{\Gamma'}\overline{f(\sigma)}\} = -\frac{p}{2}\,[f(\sigma) - e^{2i\nu}\overline{f(\sigma)}], \quad f_3^* = f_3 = 0. \tag{5}$$

În locul funcțiilor φ, ψ, π vor interveni φ_0, ψ_0, π_0 din (16), § 82.

§ 89. Întinderea mediană în placă având un gol în formă de pătrat

Vom aplica transformarea (13) din § 19 în care reținem primii doi termeni și luăm $c = R = 3a/5$, a fiind lungimea laturilor pătratului orientat paralel cu axele Ox și Oy:

$$\zeta = f(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta^3}{6}\right). \tag{1}$$

Pentru $\rho = 1$ se obține ecuația complexă a conturului care se descompune în ecuațiile reale

$$x = R(\cos\theta - \frac{1}{6}\cos 3\theta), \quad y = -R(\sin\theta + \frac{1}{6}\sin 3\theta). \tag{2}$$

Notăm că pentru această transformare intervin rotunjiri ale colţurilor situate pe dreptele $\theta = \pm 45°$ de rază $R/10 = 3a/50$. Funcţiile de reprezentare sînt date de (4) din § 88 :

$$\varphi(\zeta) = \varepsilon_1 \frac{p}{4} f(\zeta) + \varphi_0(\zeta), \quad \psi(\zeta) = -\frac{p}{2} e^{-2i\nu} f(\zeta) + \psi_0(\zeta),$$
$$\pi(\zeta) = -\frac{\nu^* p}{2(\varkappa+1)} f(\zeta) + \pi_0(\zeta), \tag{3}$$

iar condiţiile la limită pe conturul golului capătă forma (5) din § 88 :

$$f_1^* + i f_2^* = \frac{p}{2}[e^{2i\nu}\overline{f(\sigma)} - f(\sigma)] =$$
$$= -\frac{pR}{2}\left[\frac{1}{\sigma} - \frac{\sigma^3}{6} - e^{2i\nu}\left(\sigma - \frac{1}{6\sigma^3}\right)\right], \quad f_3^* = 0. \tag{4}$$

Vom calcula cîturile şi integralele care intervin în (15) şi (12) din § 82, aplicînd teoremele din § 21 :

$$\frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)} = \frac{\sigma}{6}\left(1 - \frac{13}{2\sigma^4+1}\right), \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\frac{f(\sigma)}{\overline{f'(\sigma)}}(\overline{\varphi_0'(\sigma)} - \delta\overline{\pi_0'(\sigma)}) =$$
$$= \frac{1}{6}(\overline{\varphi}_1 - \delta\overline{\pi}_1)\zeta + \frac{1}{3}(\overline{\varphi}_2 - \delta\overline{\pi}_2), \quad \frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)} = \frac{\sigma}{3}\left(1 - \frac{8}{\sigma^4+2}\right),$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)}\pi'(\sigma) = f(\zeta)\frac{\pi'(\zeta)}{f'(\zeta)},$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}(f_1^* + i f_2^*) = \frac{pR}{12}(\zeta^2 + 6e^{2i\nu})\zeta,$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}(f_1^* - i f_2^*) = -\frac{pR}{12}(e^{-2i\nu}\zeta^2 + 6)\zeta, \quad \frac{\overline{f(\sigma)}}{f'(\sigma)} = \frac{1}{6\sigma}\left(1 - \frac{13\sigma^4}{\sigma^4+2}\right),$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\frac{\overline{f(\sigma)}}{f'(\sigma)}(\varphi_0'(\sigma) - \delta\pi_0'(\sigma)) = \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{\sigma}[\varphi_0'(\zeta) - \delta\pi'(\zeta) -\right.$$
$$\left. - \varphi'(0) - \delta\pi'(0)] - \frac{13\sigma^3}{\sigma^4+2}(\varphi_0'(\xi) - \delta\pi_0'(\xi))\right\}. \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\frac{\overline{f(\sigma)}}{\overline{f'(\sigma)}}\pi'(\sigma) = -(2\pi_2 + 3\pi_3\zeta + \ldots) +$$

$$+\frac{2}{3}(6\pi_6 + 7\pi_7\,\zeta + \ldots) - \frac{1}{2}(10\pi_{10} + 11\pi_{11}\zeta + \ldots) + \ldots$$

$$\overline{f(\sigma)}/\overline{f'(\sigma)} = (4/3(1+2\sigma^4) - 1)/\sigma,\quad f'(\zeta)/\overline{f'(\zeta)} = [1 + 3/(1+2\sigma^4)]/2$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\frac{f'(\sigma)}{\overline{f'(\sigma)}}\overline{\pi'(\sigma)} = \frac{\bar{\pi}_1}{2},\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}f'(\sigma) = -R\zeta^2/2.$$

În cele de mai sus, φ_i, ψ_i, π_i sînt coeficienții dezvoltărilor funcțiilor $\varphi_0(\zeta) = \varphi_1\zeta + \varphi_2\zeta^2 + \ldots$ etc. Substituind expresiile integralelor din (5) în ecuațiile (12) și (15) din § 82 și egalînd coeficienții acelorași puteri ale variabilei ζ, se obține un sistem algebric de ecuații dat mai jos. Remarcăm că în locul funcțiilor f_i, se consideră funcțiile f_i^* conform (4) și (19) din 82. În definitiv se obțin următoarele:

$$\pi_0(\zeta) = 0,\quad \varepsilon\varphi_1 + \frac{1}{6}\bar{\varphi}_1 = \frac{pR}{2}e^{2i\nu},\quad \varepsilon\varphi_3 = \frac{pR}{12},$$

$$\varphi_p = 0,\ p \neq 1,3,\quad \varphi(\zeta) = \varphi_1\zeta + \varphi_3\zeta^3,\quad \varphi_1 = 3pR\left(\frac{a}{7}\cos 2\nu + i\frac{b}{5}\sin 2\nu\right),$$

$$a = \frac{1-12\gamma/5}{c},\quad b = \frac{1-12\gamma/7}{c},\quad c = 1 + \frac{36}{35}4(\gamma^2-\gamma),\quad \varphi_3 = pR/12\varepsilon, \qquad (6)$$

$$\psi_0(\zeta) = -\frac{pR}{12}\left\{e^{-2i\nu}\zeta^3 - \frac{12\gamma}{\varepsilon}\zeta + \right.$$

$$\left. + \frac{13}{\zeta^4+2}\left[\zeta - 2\left(\frac{3a}{7}\cos 2\nu + i\frac{3a}{5}\sin 2\nu\right)\zeta^3\right]\right\}.$$

Din (3) rezultă și funcțiile:

$$\varphi(\zeta) = pR\left\{\frac{\varepsilon_1}{4\zeta} + \left[\frac{3a}{7}\cos 2\nu + i\frac{3b}{5}\sin 2\nu\right]\zeta + \left(2 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)\frac{\zeta^3}{24}\right\},$$

$$\psi(\zeta) = -pR\left\{\frac{e^{-2i\nu}}{2\zeta} - \frac{\gamma}{\varepsilon}\zeta + \frac{13}{12(\zeta^4+2)}\left[\zeta - 2\left(\frac{3a}{7}\cos 2\nu + \right.\right.\right. \qquad (7)$$

$$\left.\left.\left. + i\frac{3a}{5}\sin 2\nu\right)\zeta^3\right]\right\},\quad \pi(\zeta) = -\frac{\nu^* p}{2(\varkappa+1)}f(\zeta).$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\nu = 0$ avem $\sigma_{xx}(\infty) = p$ iar din (4), § 59, rezultă că pe conturul golului $\rho = 1$ intervine tensiunea

$$\sigma_{\theta\theta} = 4(1+\varepsilon)\left\{\frac{2\varepsilon+\varepsilon_1}{8\varepsilon} + \frac{(1+\varepsilon)\varepsilon_1 - 2\varepsilon}{4\varepsilon} - \frac{9a}{7}\cos 2\nu \cos 2\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{3b}{5}\sin 2\nu \sin 2\theta\right\} + \delta\frac{\nu^* p}{\varkappa+1}, \quad \sigma_{\rho\rho} = 0. \tag{8}$$

În figura 97 sînt indicate variațiile tensiunilor σ_{max} și σ_{min}, în figura 98 ale lui τ_{max} iar în figura 99 ale tensiunilor principale.

Dacă se consideră reprezentarea

$$f(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta^3}{6} + \frac{\zeta^7}{56}\right) \tag{9}$$

raza de racordare la colțurile golului pătratului se reduce la $R = 0{,}0245\ a$. În acest caz se poate arăta că funcțiile de reprezentare pentru $\gamma = 0$ și $\varepsilon = 1$ sînt

$$\varphi(\zeta) = pR\left[\frac{0{,}25}{\zeta} + 0{,}426\zeta + 0{,}046\zeta^3 + 0{,}008\zeta^5 - 0{,}004\zeta^7\right],$$

$$\psi(\zeta) = -pR\left[\frac{0{,}5}{\zeta} + \frac{0{,}548\zeta - 0{,}457\zeta^3 - 0{,}026\zeta^5 - 0{,}029\zeta^7}{1 + 0{,}5\zeta^4 - 0{,}125\zeta^6}\right]. \tag{10}$$

(G. N. Savin [5]).

În tabloul de mai jos sînt date valorile $\sigma_{\theta\theta}$ în funcție de θ în cazul A corespunzător transformărilor conforme (1) și în cazul B pentru (9).

Tablou

Valorile $\sigma_{\theta\theta}/p$

	$\nu = 0$		$\nu = \pi/4$	
$\theta°$	A	B	A	B
0	−0,808	−0,936	0,333	0,412
35	−0,268	−0,544	3,880	6,564
40	0,980	0,605	6,223	9,672
45	3,000	4,368	7,800	11,516
50	3,860	4,460	6,223	9,672
55	3,366	2,888	3,880	6,564
90	1,472	1,760	0,333	0,412

Scanned with OKEN Scanner

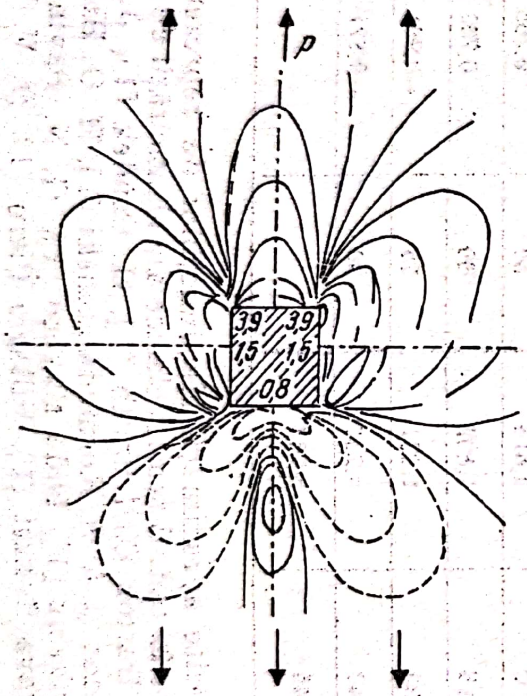


Fig. 97

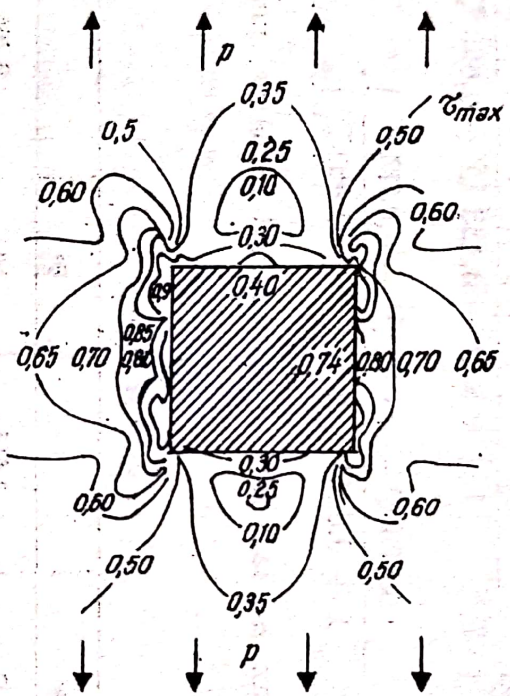


Fig. 98

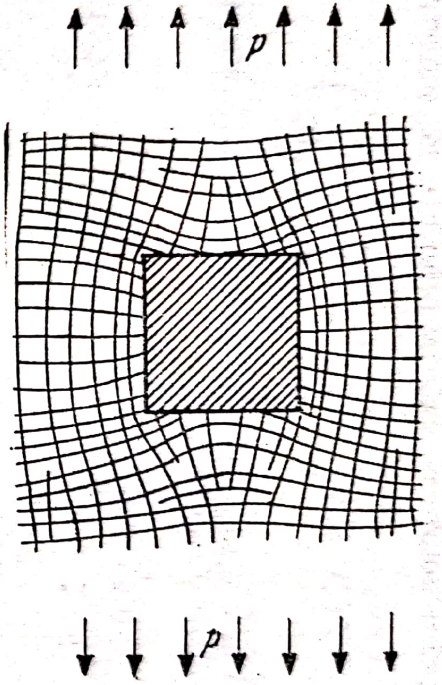


Fig. 99

Mai menţionăm conform aceleaşi referinţe că pentru reprezentarea

$$f(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta^3}{6} + \frac{\zeta^7}{56} + \frac{\zeta^{11}}{176}\right) \tag{11}$$

raza de racordare la colţurile golului pătratic este $r=0{,}014\,a$ iar funcţiile de reprezentare pentru $\gamma = 0$ sînt

$$\varphi(\zeta) = pR\left\{\frac{0{,}25}{\zeta} - 0{,}4254\,\zeta + 0{,}0476\,\zeta^3 - 0{,}0086\,\zeta^5 - \right.$$

$$\left. - 0{,}0060\,\zeta^7 + 0{,}0024\,\zeta^9 + 0{,}0014\,\zeta^{11}\right\}$$

$$\psi(\zeta) = pR\left\{\frac{0{,}5}{\zeta} - \frac{0{,}479\,\zeta - 0{,}457\,\zeta^3 + 0{,}269\,\zeta^5 - 0{,}037\,\zeta^7}{1 + 0{,}5\,\zeta^4 - 0{,}125\,\zeta^8 + 0{,}063\,\zeta^{12}} - \right. \tag{12}$$

$$\left. - \frac{0{,}073\,\zeta^9 - 0{,}017\,\zeta^{11} - 0{,}031\zeta^{13}}{1 + 0{,}5\,\zeta^4 - 0{,}124\,\zeta^8 + 0{,}063\zeta^{12}}\right\}.$$

În acest caz $\sigma_{\theta\theta}$ ia valorile din tabloul următor, pentru $\nu = \pi/2$.

Tablou

Valorile $\sigma_{\theta\theta}/p$

θ°		θ°	
0	1,616	50	0,265
15	1,802	60	−0,702
30	1,932	75	−0,901
40	4,230	90	−0,871
45	5,763		

Pentru diferite aproximaţii ale funcţiilor de reprezentare au fost obţinute rezultate în cadrul teoriei clasice ale elasticităţii de diferiţi autori ca de exemplu : Barton Cliff Smith [1], H. Czudek [1], J. J. Geerlings [1], V. M. Gurianov şi A. S. Kosmodamianski [1], H. G. Hahn [1], Isida [1], Kunert Karlheinz [1], Isida Makoto [1], G. N. Savin [5], Takeuti Yoitiro şi Yurikava Takasi [1], Villagio Piero [1], D. V. Vainberg [1].

Scanned with OKEN Scanner

§ 90. Întinderea transversală a plăcii cu gol în formă de pătrat

Vom presupune o întindere transversală de intensitate q provenită din acțiunea unei forfecări. Conform (17) din § 56 avem

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = q, \quad B = \varepsilon_2 q/8, \; C = 0$$

$$\varepsilon_2 = 8\delta/(1+\varepsilon)(\varkappa+1)(1+\nu),$$

$$\Gamma' = 0, \quad B'' = q \,/\, 2(\varkappa+1)(1+\nu).$$

(11) din § 56 conduce la dezvoltările

$$\varphi(\zeta) = \varepsilon_2 q\zeta/8 + \varphi_0(\zeta), \quad \psi^{**}(\zeta) = \psi_0(\zeta),$$
$$\pi(\zeta) = q\zeta/2(\varkappa+1)(1+\nu) + \pi_0(\zeta). \tag{2}$$

În domeniul transformat de (1) din § 82 pe interiorul cercului γ avem, conform (16) din § 82,

$$\varphi(\zeta) = \varepsilon_2 q f(\zeta)/8 + \varphi_0(\zeta), \quad \psi(\xi) = \psi_0(\zeta),$$
$$\pi(\zeta) = qf(\zeta)/2(\varkappa+1)(1+\nu) + \pi_0(\zeta). \tag{3}$$

Din (4), § 82, deducem condițiile la limită

$$f_1^* + if_2^* = -\frac{q\delta f(\sigma)}{2(\varkappa+1)(1+\nu)}, \quad f_3^* = 0. \tag{4}$$

Vom înlocui în (16) din § 82 funcțiile $\varphi(\zeta)$, $\psi(\xi)$, $\pi(\zeta)$ prin funcțiile $\varphi_0(\xi)$, $\psi_0(\zeta)$, $\pi_0(\xi)$ și vom considera reprezentarea (1) din § 89. Aplicăm (5) din § 89, (12) și (15) din § 82, în care înlocuim funcțiile f_i prin funcțiile f_i^*. Deoarece

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{d\sigma - \zeta}(f_1^* + if_2^*) = \frac{q\delta R}{12(\varkappa+1)(1+\nu)}\zeta^3,$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}(f_1^* - if_2^*) = -\frac{q\delta R}{2(\varkappa+1)(1+\nu)}\zeta, \tag{5}$$

rezultă condițiile

$$\pi_0(\zeta) = 0, \quad \varphi_3 = q\delta R/12\varepsilon(\varkappa+1)(1+\nu), \quad \varphi_p = 0, \quad (p \neq 3)$$

$$\varphi_0(\zeta) = \varphi_3 \zeta^3, \quad \psi_0(\zeta) = -\frac{q\delta R\zeta}{12(\varkappa+1)(1+\nu)} - \tag{6}$$

$$-\frac{1}{6}\left[\frac{1}{\zeta} - \frac{13\zeta^3}{\zeta^4+2}\right]\varphi_0'(\zeta) = -\frac{13}{12\varepsilon}\frac{q\delta R\zeta}{(\varkappa+1)(1+\nu)}\left[\frac{1}{\zeta^4+2} - \frac{12}{13}\gamma\right].$$

Din (4), § 59, rezultă pe conturul golului

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{(1+\varepsilon)\,b\,K}{\varepsilon(\varkappa+1)(1+\nu)}, \quad K = \frac{1+2\cos 4\theta}{5+4\cos 4\theta} \tag{7}$$

iar din (5), § 51,

$$W = q/E. \tag{8}$$

Remarcăm că (4) din § 59 va arăta ca

$$\sigma_{z\rho} = \sigma_{z\theta} = 0. \tag{9}$$

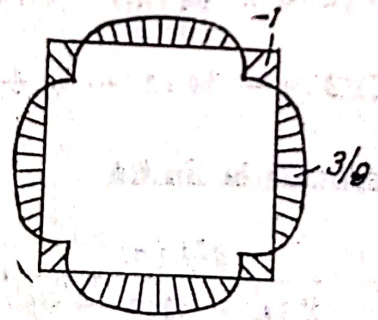


Fig. 100

În figura 100 apare variația tensiunii și anume a cîtului K.

§ 91. Întinderea mediană a plăcii cu gol triunghiular

Vom utiliza transformarea conformă din (19), § 19,

$$f(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta^2}{3}\right) \tag{1}$$

Scanned with OKEN Scanner

relativă la triunghiul echilateral din figura 101, transformare în care reținem primii doi termeni. Pentru $\zeta = \rho e^{i\theta}$ rezultă ecuațiile conturului $\rho = 1$ sub formă parametrică

$$x = R\left(\cos\theta + \frac{1}{3}\cos 2\theta\right), \quad y = -R\left(\sin\theta - \frac{1}{3}\sin 2\theta\right), \qquad (2)$$

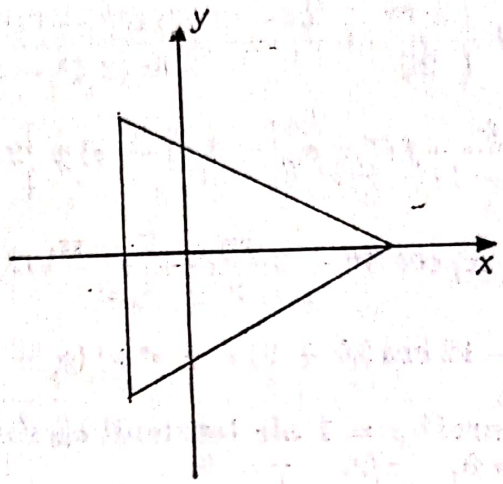


Fig. 101

raza de racordare la colțuri fiind $r = R/21$ sau, notînd prin H înălțimea triunghiului, $r = H/14$. Se obțin, procedînd analog ca în cazurile anterioare, următoarele rezultate (vezi (3), (4), § 89)

$$\frac{f(\sigma)}{\overline{f'(\sigma)}} = -\frac{1}{3} + \frac{11}{3(2-3\sigma^3)},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\frac{f(\sigma)}{\overline{f'(\sigma)}}\overline{\varphi_0'(\sigma)} = -\frac{\overline{\varphi_1}}{3},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}(f_1^* + if_2^*) = \frac{pR}{6}(3e^{2iv} - \zeta)\,\zeta, \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}(f_1^* - if_2^*) = \frac{pR}{6}(e^{-2iv}\,\zeta - 3)\,\zeta,$$

$$\frac{\overline{f(\sigma)}}{f'(\sigma)} = -\frac{1}{3} + \frac{11\sigma^3}{3(2\sigma^3-3)}, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\frac{\overline{f(\sigma)}}{f'(\sigma)}\varphi_0'(\sigma) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{11\zeta^3}{2\zeta^3-3} - 1\right]\varphi_0'(\zeta), \quad \pi_0(\zeta) = 0, \quad \varepsilon\varphi_1 = \frac{pR}{2}e^{2iv}, \quad \varepsilon\varphi_2 = -$$

$$-\frac{pR}{6}, \quad \varphi_p = 0, \quad p > 2, \quad \varphi_0(\zeta) = \frac{pR}{6\varepsilon^2}(3\varepsilon\, e^{2iv}\,\zeta - \varepsilon\zeta^2),$$

$$\psi_0(\zeta) = pR\left\{e^{-2i\nu}\frac{\zeta^2}{6} - \frac{(3+9\zeta^3)\,e^{2i\nu} - 11\zeta - 12\gamma\zeta^4}{6\varepsilon(2\zeta^2-3)}\right\},$$

$$\varphi(\zeta) = pR\left\{\frac{\varepsilon_1}{4\zeta} + \frac{e^{2i\nu}\zeta}{2\varepsilon} - \frac{2-\varepsilon\varepsilon_1}{12\varepsilon}\zeta^2\right\},$$

$$\psi(\zeta) = -pR\left\{\frac{e^{-2i\nu}}{2\zeta} + \frac{(3+9\zeta^3)\,e^{2i\nu} - 11\zeta - 12\gamma\zeta^4}{6\varepsilon(2\zeta^2-3)}\right\},$$

$$\pi(\zeta) = -\frac{\nu^* p}{2(\varkappa+1)}f(\zeta),\quad \sigma_{\theta\theta} = 3(1+\varepsilon)p\left\{2\cos(2\nu-\theta) - \right.$$

$$\left. - 3\cos(2\nu+\theta) - \varepsilon\varepsilon_1\cos 3\theta + 3\frac{\varepsilon\varepsilon_1}{2} - \frac{2-\varepsilon\varepsilon_1}{3}(2-3\cos 3\theta)\right\}/$$

$$(4 - 12\cos 3\theta + 9)\,\varepsilon + \nu^* p/(\chi+1).$$

Valorile pe conturul $\rho = 1$ ale tensiunii $\sigma_{\theta\theta}$ sînt date în tabloul (*) de mai jos pentru $\nu = 0,\quad \pi/2,\quad \gamma = 0$.

Considerînd în locul transformării (1) transformarea cu un termen în plus care rezultă din (19), § 19, se obţin valori care diferă sensibil faţă de cele din tabloul (*) şi care apar în tabloul (**)

Tabloul (*)

	$\sigma_{\theta\theta}$	
θ	$\nu = 0$	$\nu = \pi/2$
0	− 1,000	11,000
10	− 0,037	3,871
15	0,222	
30	0,492	0,277
90	1,770	− 1,000
115	8,160	− 1,064
120	8,000	2,000
125	3,032	4,064
135	− 0,772	2,987
180	− 1,000	− 1,400

Tabloul (**)

	$\sigma_{\theta\theta}$	
θ	$\nu = 0$	$\nu = \pi/2$
0	− 1,600	17,600
10	0,056	2,543
15	0,222	
30	0,439	− 0,021
90	1,632	− 0,912
115	8,863	− 2,173
120	12,800	3 200
125	1,628	5,062
135	− 1,060	2,478
180	− 1,086	1,657

*) Vezi G. N. Savin [5].

Scanned with OKEN Scanner

§. 92 Întinderea transversală în placa cu gol triunghiular

Conform (3), (4) din § 90, rezultă

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}(f_1 \pm i f_2) = \frac{-q\delta R\zeta^2}{6(\varkappa+1)(1+\nu)},$$

$$= \frac{-q\delta R\zeta}{2(\varkappa+1)(1+\nu)},$$

$$\pi_0(\zeta)=0, \quad \varphi_2 = -\frac{q\delta R}{6\varepsilon(\varkappa+1)(1+\nu)}, \quad \varphi_0(\zeta)=\varphi_2\zeta^2,$$

$$\psi_0(\zeta) = -\frac{q\delta R\zeta}{2(\varkappa+1)(1+\nu)} - \frac{1}{3}\left[\frac{11\zeta^3}{2\zeta^3-3}-1\right]\varphi_0'(\zeta), \tag{1}$$

$$= \frac{11q\delta R[2+9\varepsilon+12\gamma\zeta^3]\zeta}{6\varepsilon(\varkappa+1)(1+\nu)(2\zeta^2-3)} = \psi(\zeta),$$

$$\varphi(\zeta) = \frac{\delta q}{2(\varkappa+1)(1+\nu)}f(\zeta)+\varphi_0(\zeta), \quad \pi(\zeta)=\frac{qf(\zeta)}{2(\varkappa+1)(1+\nu)},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{(1+\varepsilon)q\delta}{\varepsilon(\varkappa+1)(1+\nu)}K, \quad \left(K=\frac{2-3\cos 3\theta}{13-12\cos 3\theta}\right).$$

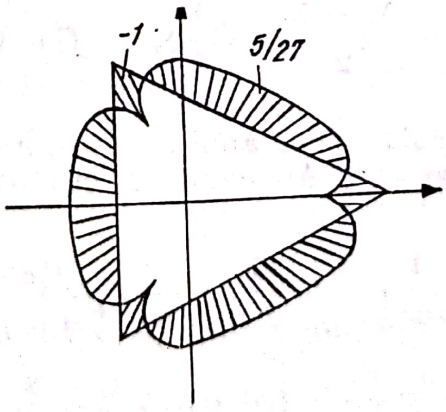


Fig. 102

În figura 102 apare variația tensiunii. Numerele reprezintă valorile cîtului K.

§ 93. Întinderea mediană a plăcii cu un gol avînd un contur curbiliniu în două direcţii mediane

Vom admite următorul cîmp elastic la infinit

$$\sigma_{xx}(\infty) = p_x = \lambda_1 p, \quad \sigma_{yy}(\infty) = p_y = \lambda_2 p,$$
$$\sigma_{xy}(\infty) = \sigma^0_{xy}(\infty) = \sigma^0_{yx}(\infty) = 0. \tag{1}$$

Se deduc, conform (17) din § 56 şi (16) din § 82, următoarele relaţii

$$\varphi(z) = \frac{\varepsilon_1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2) pf(\zeta) + \varphi_0(\zeta),$$
$$\psi(\zeta) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} pf(\zeta) + \psi_0(\zeta), \tag{2}$$
$$\pi(\zeta) = -\frac{\nu^*}{2(\varkappa+1)}(\lambda_1 + \lambda_2) pf(\zeta) + \pi_0(\zeta).$$

Din (5), § 88, rezultă

$$f_1^* + if_2^* = -\left\{\left[(1+\varepsilon)\frac{\varepsilon_1}{4} + \frac{\delta\nu^*}{\varkappa+1}\right](\lambda_1 + \lambda_2) f(\zeta) + \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\overline{f(\zeta)}\right\} p, \qquad f_3^* = 0. \tag{3}$$

Pentru golul circular vom aplica transformarea (1) din § 19 în care luăm $c = R$ iar $m = 0$. Aplicăm (12) şi (15) din § 92, şi teoremele din § 21

$$\frac{f(\sigma)}{\overline{f'(\sigma)}} = -\frac{1}{\sigma^3}, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}\frac{f(\sigma)}{\overline{f'(\sigma)}}\overline{\varphi_0'(\sigma)} = 0,$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}(f_1^* + if_2^*) = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} pR\zeta,$$
$$\varphi_0(\zeta) = \frac{pR}{2\varepsilon}(\lambda_1 - \lambda_2)\zeta, \qquad \pi_0(\zeta) = 0, \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}(f_1^* - if_2^*) = -\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}pR\zeta, \qquad \frac{\overline{f(\sigma)}}{f'(\sigma)} = -\sigma^3,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\frac{\overline{f(\sigma)}}{f'(\sigma)}\varphi_0'(\sigma) = -\zeta^3\frac{pR}{4}\left[\frac{2(\lambda_1-\lambda_2)}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon_1(\lambda_1+\lambda_2)}{\zeta^2}\right],$$

$$\psi_0(\zeta) = \frac{pR}{2}\left\{\varepsilon_1\frac{(\lambda_1+\lambda_2)}{2}\zeta - (\lambda_1+\lambda_2)\zeta - \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2\varepsilon}\zeta^3\right\},$$

$$\varphi(\zeta) = \frac{pR}{4}\left\{\varepsilon_1(\lambda_1+\lambda_2)\frac{1}{\zeta} + 2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\varepsilon}\zeta\right\},$$

$$\psi(\zeta) = \frac{pR}{2}\left\{(\lambda_2-\lambda_1)\frac{1}{\zeta} - (\lambda_1+\lambda_2)\zeta - \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\varepsilon}\zeta^3\right\},$$

$$\pi(\zeta) = -\frac{\nu^* pR}{2(\varkappa+1)\zeta}.$$

Se deduc, conform (6) din § 59, următoarele componente ale tensiunilor

$$\sigma_{\rho\rho} = \left\{(\lambda_1+\lambda_2)(1-\rho^2) - (\lambda_2-\lambda_1)\left(1 - \frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}\rho^2 + \frac{3\rho^4}{\varepsilon}\right)\cos 2\theta\right\},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p}{2}\left\{(\lambda_1+\lambda_2)(1+\rho^2) + (\lambda_2-\lambda_1)\left(1 - \frac{4\gamma}{\varepsilon}\rho^2 + \frac{3}{\varepsilon}\rho^4\right)\cos 2\theta\right\}, \tag{5}$$

$$\sigma_{\theta\rho} = (\lambda_1-\lambda_2)\frac{p}{2}\left(1 + \frac{3-\varepsilon}{\varepsilon}\rho^2 - 3\rho^4\right),$$

$$\sigma_{\rho\theta} = (\lambda_1-\lambda_2)\frac{p}{2}\left(1 + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\rho^2 - 3\rho^4\right).$$

Este mai simplu însă de a utiliza soluțiile parțiale pentru întinderi mediane simple.

În figura 103 și figura 104 apar diferite cazuri de încărcare și anume pentru $\sigma_{xx}(\infty) = p/4$, $\sigma_{xy}(\infty) = \sigma_{yy}(\infty) = 0$, $\sigma_{xx}(\infty) = \sigma_{xy}(\infty) = 0$, $\sigma_{yy}(\infty) = p$, în cazul elipsei avînd raportul semiaxelor $a/b = 3/2$. Rezultatele figurate corespund teoriei clasice și sînt obținute prin suprapunerea rezulta-

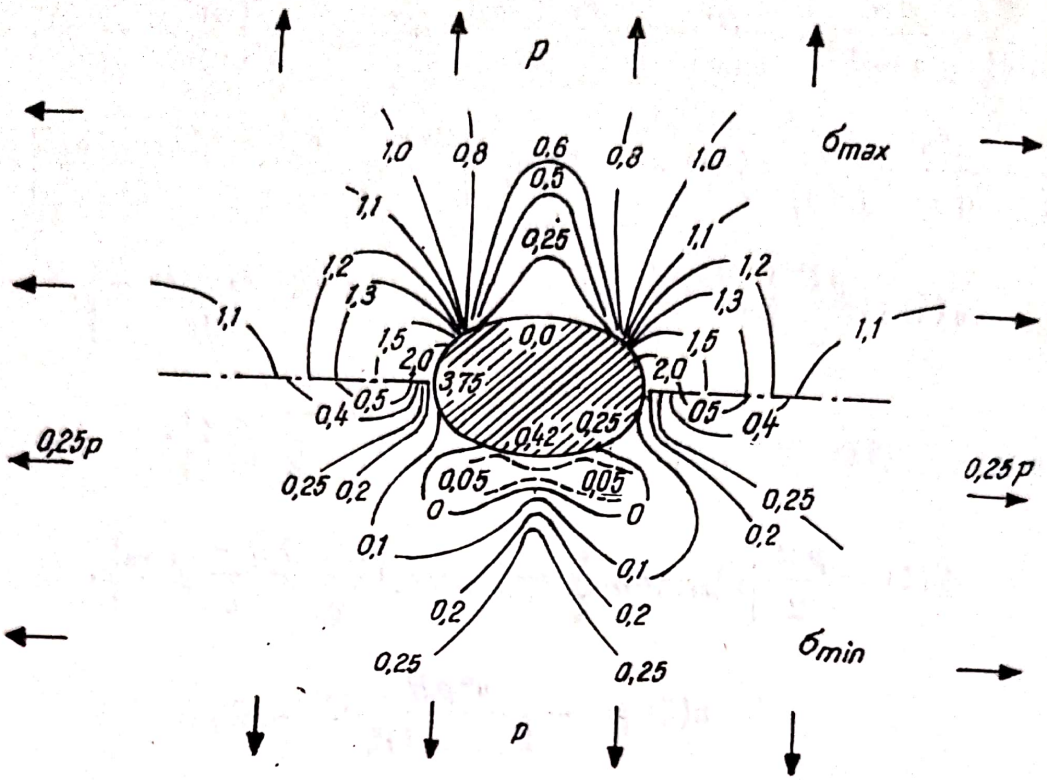


Fig. 103

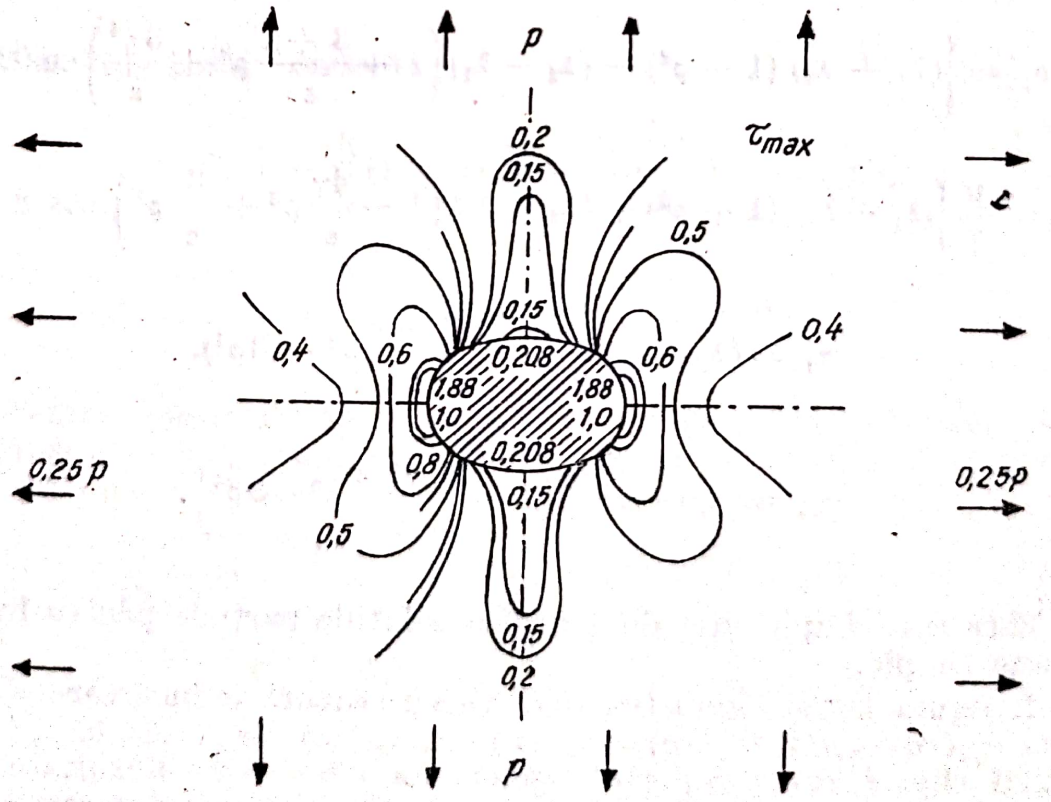


Fig. 104

telor obținute în mod separat pentru întinderea simplă a plăcii cu gol-eliptic date anterior.

§ 94. Lunecare în placa avînd un gol

Luînd

$$\sigma_{xx}(\infty) + \sigma_{yy}(\infty) = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{[xy]}(\infty) = 0, \quad \nu = \pi/2 \tag{1}$$

și notînd ((17) din § 56)

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau, \tag{2}$$

rezultă

$$\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta), \quad \psi(\zeta) = i\tau f(\zeta) + \psi_0(\zeta), \quad \pi(\zeta) = \pi_0(\zeta) \tag{3}$$

sau, din (5), § 88, decurge relația variabilă pe conturul golului liber,

$$f_1^* + if_2^* = i\tau\overline{f(\sigma)}. \tag{4}$$

Deducem în continuare, pentru cazul golului pătratic și utilizînd transformarea conformă (1) din § 82,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}(f_1^* + if_2^*) = i\tau R\zeta,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}(f_1^* + if_2^*) = i\tau\frac{R}{6}\zeta^3, \quad \pi_0(\zeta) = 0 \tag{5}$$

$$\varepsilon\varphi_1 + \frac{\overline{\varphi_1}}{6} = i\tau R, \qquad \varphi_p = 0, \qquad p \neq 1,$$

$$\varphi(\zeta) = i\tau R \frac{6}{5} a\zeta, \qquad a = \frac{5 - 12\gamma}{5 - \frac{36}{35} 4\gamma (1 - \gamma)},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \frac{\overline{f(\sigma)}}{f'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) = - i\tau R \frac{13\zeta^3}{5(\zeta^4 + 2)},$$

$$\psi(\zeta) = i\tau R \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{13a\zeta^3}{5(\zeta^4 + 2)} \right),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{48}{5} (1 - \gamma)\, a\varepsilon \frac{\sin 2\theta}{5 + 4 \cos 4\theta}.$$

În tabloul de mai jos sînt date valorile $\sigma_{\theta\theta}/a(1 - \gamma) = \Sigma$

Tablou

Valorile Σ

θ	Σ	θ	Σ	θ	Σ
0	0,000	60	2,771	135	− 9,600
20	1,084	80	0,407	140	− 7,618
30	2,771	90	0,000	150	− 2,771
40	7,618	100	−0,407	160	− 1,084
45	9,600	110	−1,084	170	− 0,407
50	7,618	130	−7,618	180	0,000

Rezultatele ce se obţin coincid cu cele din teoria clasică (pentru $\gamma = 1$).

În cazul golului dreptunghiular, în funcţie de raportul laturilor a/b şi al razei de racordare la colţuri şi o latură r/b, au fost stabilite valorile raporturilor τ_{max}/τ de către E. P. Anikin [1] iar acestea sînt date mai jos.

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul

Valorilor τ_{max}/τ

a/b	r/b									
	0,03	0,06	0,09	0,12	0,16	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
1,0	7,7	5,5	4,5	3,8	3,3	3,0	2,7	2,4	2,2	2,0
1,4	8,2	5,8	5,0	4,2	3,7	3,3	2,9	2,7	2,4	2,2
1,8	8,6	6,3	5,2	4,5	3,9	3,6	3,2	2,9	2,6	2,4
2,0	8,8	6,5	5,3	4,7	4,1	3,7	3,3	3,0	2,7	2,5
2,4	—	6,8	5,7	5,0	4,4	4,0	3,5	3,2	2,9	2,7
2,8	—	7,2	6,1	5,3	4,7	4,2	3,7	3,4	3,1	2,8
3,0	—	7,3	6,2	5,5	4,8	4,3	3,9	3,5	3,2	3,9
3,5	—	7,6	6,5	5,7	5,1	4,6	4,2	3,8	3,4	3,1
4,0	—	7,9	6,8	6,0	5,4	4,8	4,4	4,0	3,6	3,3
4,5	—	8,1	7,0	6,2	5,6	5,0	4,6	4,2	3,7	3,4
5,0	—	8,2	7,2	6,4	5,8	5,2	4,8	4,3	3,8	3,5

Alte rezultate ale teoriei clasice au fost date de A. G. Avetisian [1] pentru golul rombic, A. Sen Grupta [1] pentru golul în formă de lemniscată, N. A. Savruk [1] pentru golul în formă de lunulă.

E. Soluții în problema dinamică mediană

§ 95. Ecuații și reprezentări fundamentale

Vom considera ecuațiile corespunzătoare elasticității dinamice a mediului elastic cu efecte de mobilitate de tip polar. Presupunem forțele de masă nule și efecte termice neglijabile.

Vom stabili în primul rînd ecuațiile diferențiale pentru tensiuni cu caracter de compatibilitate necesare obținerii soluțiilor. Prin derivarea

Scanned with OKEN Scanner

în raport cu x și y, apoi scăderea ecuațiilor de echilibru, se obține după aplicarea ecuațiilor de mobilitate (19) din § 11 și a formulelor (22) din § 11

$$\Box_t W = 0, \quad \sigma_{xx,xx} - \sigma_{yy,yy} = \rho\,(\ddot{e}_{xx} - \ddot{e}_{yy}) + (\sigma_{xy} - \sigma_{yx})_{,xy}, \tag{1}$$

$$-\sigma_{xz,xx} + \sigma_{yz,xy} = \frac{\rho}{2\mu}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^{\cdot\cdot} + 2\sigma_{[xy],xy} -$$

$$-\mu\,(W_{,xxx} - W_{,yyy}) - 2\beta\,\Delta W$$

în care

$$\Box_t = \Delta - \frac{\rho}{\mu - \beta}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{2}$$

Pe de altă parte au loc condițiile

$$\omega_{,x} = e_{xy,x} - e_{xx,y}, \quad \omega_{,y} = -e_{xy,y} + e_{yy,x} \tag{3}$$

din $(8)_1$ și $(8)_4$ de la § 3 și deci, în baza ecuațiilor de mobilitate (19) din § 11 și a formulelor (22) din § 11,

$$\sigma_{[xy],x} = 2\beta\left\{\frac{1}{2\mu}\,\sigma_{(xy),x} - \left[\frac{\sigma_{xx}}{2\mu} - \frac{\nu}{E}\Theta\right]_{,y}\right\}$$

$$= 2\beta\left\{\frac{\sigma_{(xy),x}}{2\mu} - \frac{[\sigma_{xx} - \nu\,(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]_{,y}}{E}\right\},$$

$$\sigma_{[xy],y} = 2\beta\left\{\left[\frac{\sigma_{yy}}{2\mu} - \frac{\nu}{E}\Theta\right]_{,x} - \frac{\sigma_{(xy),y}}{2\mu}\right\} = \tag{4}$$

$$= 2\beta\left\{\frac{[\sigma_{yy} - \nu\,(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]_{,x}}{E} - \frac{\sigma_{(xy),y}}{2\mu}\right\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

După derivarea termenilor acestor ecuații și sumare se obține condiția

$$2\sigma_{[xy],xy} = \frac{2\beta}{E}\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\sigma_{zz} - \right.$$

$$\left. -\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma_{yy} + \nu\left(\sigma_{zz,yy} - \sigma_{zz,xx}\right)\right\}. \tag{5}$$

Deoarece

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2\,(\lambda + \mu)\,\vartheta + 2\lambda W \tag{6}$$

pentru

$$\vartheta = u_{,x} + v_{,y} \tag{7}$$

rezultă relația utilă

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)\,W + \lambda\vartheta = (\lambda + 2\mu)\,W + \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - 2\lambda W\right) =$$

$$= EW + \nu\left(\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\right). \tag{8}$$

Eliminarea lui $\sigma_{[xy]}$ din (1) și (5) conduce la ecuația

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2\beta}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \nu^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^3}{\partial y^2}\right)\right)\right\}\sigma_{xx} -$$

$$-\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\rho}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2\beta}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nu^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right)\right\}\sigma_{yy} + \tag{9}$$

$$+ (\mu + 2\nu\beta)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)W + 2\beta\,\Delta W = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se constată atunci că au loc următoarele reprezentări prin funcții potențiali de tensiune

$$\sigma_{yy}=\left\{\left[1-\frac{\beta}{\mu}(1-\nu)\right]\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\nu\beta}{\mu}\frac{\delta^2}{\partial y^2}-\frac{\rho}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}F+G-H,$$

$$\sigma_{xx}=\left\{\left[1-\frac{\beta}{\mu}(1-\nu)\right]\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\nu\beta}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\rho}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}F+G+H. \tag{10}$$

Pentru compatibilitate sînt satisfăcute condițiile

$$\left[\left(1-\frac{\beta}{\mu}\right)\Delta-\frac{\rho}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]H=2\beta\,\Delta W=2\,\frac{\beta}{\mu}\,\frac{\rho}{\beta}\,\frac{\partial^2 W}{\partial t^2},$$

$$\left(1-\frac{\beta}{\mu}\right)G+4\beta\frac{\nu^2}{E}H=(\mu+2\nu\beta)\,W. \tag{11}$$

Aceste condiții sînt satisfăcute de soluțiile

$$G=aW,\quad H=bW. \tag{12}$$

Coeficienții a și b satisfac condițiile

$$b=\frac{4\beta}{1-\beta/\mu},\quad a=\frac{\mu+2\nu\beta-16\beta^2\nu^2/E(1-\beta/\mu)}{1-\beta/\mu}. \tag{13}$$

Deoarece, conform (10) și (8),

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}=EW+(1+\nu)(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})=$$

$$=(1+\nu)\left\{\left(1-\frac{\beta}{\mu}\right)\Box_t F+2(\mu+a)\,W\right\}=(3\lambda+2\mu)\,\theta \tag{14}$$

și ținînd seama de (4) din § 11, rezultă ecuația

$$\Box_t\Box_t F=-2\mu\,\frac{\mu+a}{\mu-b}\,\Box_t W. \tag{15}$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 96. Perturbări mobile

Vom considera o perturbare aplicată mediului care se propagă cu o viteză constantă c paralelă cu axa Ox. Vom introduce noile variabile

$$\xi = x - ct, \quad \eta = y. \tag{1}$$

Ecuația diferențială satisfăcută de funcția F ((15) din § 95) se transcrie astfel

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{s_t^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{s_t^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)F + 2\mu\frac{\mu + a}{\mu - \beta}W\right] = 0 \tag{2}$$

în care intervin coeficienții

$$s_l = (1 - c^2\rho/(\lambda + 2\mu))^{1/2}, \quad s_t = (1 - c^2\rho/(\mu - \beta))^{1/2}. \tag{3}$$

Formulele de reprezentare (10) se transcriu astfel

$$\sigma_{xx} = \left\{m\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - (n + q)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right\}P + G + H,$$

$$\sigma_{yy} = \left\{(m - n)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - q\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right\}P + G - H. \tag{4}$$

S-a notat

$$m = 1 - \frac{\beta}{\mu}(1 - \nu), \quad n = \frac{\rho c^2}{2\mu}, \quad q = \frac{\nu\beta}{\mu}. \tag{5}$$

Din (1), § 35, și (2) rezultă că soluțiile ecuației diferențiale sînt de forma

$$W = 2\,\mathrm{Re}\, g'(\zeta_t), \quad P = 2\,\mathrm{Re}\,\{f_l(\zeta_l) + f_t(\zeta_t)\} + \mathcal{P}. \tag{6}$$

Funcția $\mathcal{F}$ satisface ecuația

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{s_t^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\mathcal{P} + 4\mu\frac{\mu + a}{\mu - b}\,\mathrm{Re}\, g'(\zeta_t) = 0 \tag{7}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar z_l și $\bar{z}_l$ sînt variabilele complexe

$$z_l = \xi + is_l\,\eta, \quad \bar{z}_l = \xi + is_l\,\eta. \tag{8}$$

$f_l(z_l)$, $f_l(\bar{z}_l)$ și $g(z_l)$ sînt presupuse funcții analitice. Prin g' se notează derivata de ordinul întîi a funcției g în raport cu variabila complexă.

Ecuația (6) admite următoarea integrală

$$\mathcal{P} = -\mu(1+k)\,\mathrm{Re}\,\bar{z}_l\,g(z_l) \tag{9}$$

în care

$$k = \frac{\mu+a}{\mu-\beta} - 1 = \frac{a+\beta}{\mu-\beta} \tag{10}$$

Tensiunile normale vor avea deci expresiile ce decurg din (4) și (6)

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -2\mathrm{Re}\,\{(m\,s_l^2 + n + q)\,f_l'' + (m\,s_l^2 + n + q)\,f_l''\} + \sigma_{xx}^*,\\ \sigma_{yy} &= 2\mathrm{Re}\,\{(m - n + qs_l^2)\,f_l'' + (m - n + qs_l^2)f_l''\} + \sigma_{yy}^*,\end{aligned} \tag{11}$$

în care

$$\sigma_{xx}^* = -2\mathrm{Re}\,\{\mu(1+k)[m\,s_l^2\left(g' - \frac{\bar{z}_l}{2}g''\right) - (n+q)\left(g' + \frac{\bar{z}_l}{2}g''\right) - (a+b)\,g'\}, \tag{12}$$

$$\sigma_{yy}^* = 2\mathrm{Re}\left\{\mu(1+k)\left[q\left(g' - \frac{\bar{z}_l}{2}\,g''\right) - m\left(g' + \frac{\bar{z}_l}{2}\,g''\right) + (a-b)\,g'\right\}\right.$$

depind de funcția g.

Cu ajutorul acestor formule pot fi rezolvate diferite condiții pe conturul plăcii. În cele ce urmează vom considera problema mediană particulară corespunzătoare condiției $W = 0$, caz în care $g = 0$ iar

$$\sigma_{xx}^* = \sigma_{yy}^* = 0. \tag{13}$$

Pentru a obține deplasările mediane alegem următoarele expresii ale acestora

$$u = \mathrm{Re}\,(Af_l' + Bf_l'),\ v = \mathrm{Re}\,(Cf_l' + Df_l'). \tag{14}$$

Scanned with OKEN Scanner

Substituția acestor expresii în ecuațiile (11) ne dă sistemul

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu) A + \lambda i s_l C &= -2(m s_l^2 + n + q), \\
\lambda A + (\lambda + 2\mu) i s_l C &= 2(m - n + q s_l^2), \\
(\lambda + 2\mu) B + \lambda i s_l D &= -2(m s_l^2 + n + q), \\
\lambda B + (\lambda + 2\mu) i s_l D &= 2(m - n + q s_l^2),
\end{aligned} \tag{15}$$

ale cărui soluții sînt

$$A = -\frac{1}{2\mu(\lambda + \mu)} \{(\lambda + 2\mu)(m s_l^2 + n + q) + \lambda(m - n + q s_l^2)\}.$$

Cu ajutorul acestor rezultate se deduc expresiile tensiunilor tangențiale mediane date de (1) din § 11

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy} &= (\mu + \beta) v_{,x} + (\mu - \beta) u_{,y} = \\
&= \operatorname{Re}\{[(\mu + \beta) C + (\mu - \beta) i s_l A] f_l'' + [(\mu + \beta) D + (\mu - \beta) i s_l B] f_l''\}, \\
\sigma_{yz} &= (\mu - \beta) v_{,x} + (\mu + \beta) u_{,y} = \operatorname{Re}\{[(\mu - \beta) C + (\mu + \beta) i s_l A] f_l'' + \\
&\quad + [(\mu - \beta) D + (\mu + \beta) i s_l B] f_l''\}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Reprezentările obținute extind cele obținute de către I.R.M. Radok în cadrul teoriei clasice (în care caz $\beta = 0$, $g = 0$). Acestea din urmă coincid, abstracție făcînd de notații diferite, cu formulele stabilite de I. N. Sneddon [1], [2].

§ 97. Presiune cu caracter impulsiv aplicată într-un punct mobil pe suprafața unui semiplan

Vom considera suprafața $y = 0$ mărginind spațiul $y \geqslant 0$ astfel ca axa Ox să fie situată pe aceasta. Pe conturul $y = 0$ vom impune condițiile la limită

$$\sigma_{yy} = -\frac{1}{2}[P''(x - vt) + \overline{P}''(x - vt)], \quad \sigma_{xy} = 0, \quad (y = 0, v - c). \tag{1}$$

Aceste condiții se referă la încărcarea globală pe conturul corpului eterogen. Cu ajutorul expresiilor (9) din § 96 obținute pentru tensiuni, aceste condiții se scriu astfel, în ipoteza că W și g sînt nuli:

$$2\,\mathrm{Re}\,\{(m-n+q\,s_i^2)\,f_i''(\xi)+(m-n+q\,s_i^2)\,f_i''(\xi)\}=-\,\mathrm{Re}\,P''(\xi), \tag{2}$$

$$[(\mu+\beta)\,C+(\mu-\beta)\,is_i\,A]\,f_i''(\zeta)+[(\mu+\beta)\,D+(\mu-\beta)\,is_i\,B]\,f_i''(\zeta)=0,$$

ultima condiție din (2) se scrie astfel

$$f_i''(\zeta)=-\,Kf_i''(\zeta) \tag{3}$$

dacă se notează

$$K=\frac{\mathrm{Re}[(\mu+\beta)\,C+(\mu-\beta)\,is_i\,A]}{\mathrm{Re}\,[(\mu+\beta)\,D+(\mu-\beta)\,is_iB]} \tag{4}$$

astfel că prima condiție din (2) dă expresia funcției

$$f_i(z_{0i})=-\,\frac{P''(z_{0i})}{2\mathrm{Re}\,\{(m-n)\,(1-K)+q(s_i^2-Ks_i^2)\}}. \tag{5}$$

Cu acestea problema sarcinii mobile pe o placă plană este rezolvată, deoarece din (3) avem

$$f_i''(z_{0i})=-\,Kf_i''(z_{0i}). \tag{6}$$

§ 98. Dislocație mobilă

Vom considera o soluție satisfăcînd condițiile la limită

$$\sigma_{yy}=0,\ [u_L]=\mathrm{const.},\ (y=0), \tag{1}$$

$[u_L]$ reprezentînd variația componentei u a deplasării pe un circuit închis L.

Prima condiție este satisfăcută dacă, în baza expresiilor obținute pentru tensiuni (11) din § 96, avem

$$f_i''(\xi)=-\,Lf_i''(\xi) \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care

$$L = \frac{m - n + qs_i^2}{m - n + qs_i^2}. \tag{3}$$

A doua condiție din (1) se îndeplinește luînd soluții de forma

$$f_i'(z_{0i}) = b \log z_{0i},\ f_i'(z_{0i}) = -\frac{b}{L} \log z_{0i}. \tag{4}$$

astfel că deplasările vor avea expresiile

$$u = \mathrm{Re}\, b \left\{ A \log z_{0i} - \frac{B}{L} \log z_{0i} \right\},\ v = \mathrm{Re}\, b \left\{ \left(\log z_{0i} - \frac{D}{L} \log z_{0i} \right\}. \tag{5}$$

Pentru $\beta = 0$ se obține soluția dată de J. D. Eshelby [1]

$$f_i''(z_{0i}) = -f_i''(z_{0i}),\ u = -\mathrm{Re} \frac{b}{\mu} \left\{ \log z_{0i} - \frac{1 + s_i^2}{2} \log z_{0i} \right\},$$

$$v = \mathrm{Re} \frac{b}{i\mu} s_i \left\{ \log z_{0i} - \left(1 + \nu \frac{s_i^2}{s_i^2} \right) \log z_{0i} \right\},$$

$$C = \frac{1}{2\mu(\lambda + \mu) i s_i} \{ (\lambda + 2\mu)(m - n + q s_i^2) + \lambda (m s_i^2 + n + q) \}, \tag{6}$$

$$B = -\frac{1}{2\mu(\lambda + \mu)} \{ (\lambda + 2\mu)(m s_i^2 + n + q) + \lambda (m - n + q s_i^2) \},$$

$$D = \frac{1}{2\mu(\lambda + \mu) i s_i} \{ (\lambda + 2\mu)(m - n + q s_i^2) + \lambda (m s_i^2 + n + q) \}.$$

Pentru $\beta = 0$ avem $m = 1, q = 0$ iar

$$A = -1/\mu,\ C = s_i/i\mu,\ D = s_i(1 + V s_i^2/s_i^2)/i\mu,$$

$$B = -1/\mu + (\lambda + 2\mu)(s_i^2 - s_i^2)/2\mu(\lambda + \mu). \tag{7}$$

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA a II-a

Elasticitatea Polară

Scanned with OKEN Scanner

Medii cu neomogeneitate structurală ca modele ale teoriei mobilității elastice generalizate (spectrale)

CAPITOLUL V

În capitolul I a fost dezvoltată teoria liniară a elasticității tensionale a cărei legătură cu teoria clasică a elasticității și cu cazurile uzuale întîlnite în practică, apare în mod nemijlocit. În acest capitol vom expune o generalizare a acestei teorii astfel elaborată de autor încît să fie compatibilă cu aplicarea ei efectivă și naturală în alte cazuri și mai numeroase, de asemenea de un interes practic real.

Sub acest raport, teoria expusă diferă de diferitele teorii cunoscute în literatură sub numele de teoria mediilor Cosserat sau de tip structural, prin aceea că este formulată independent de restricțiile uzual acceptate, restricții care introduc asemenea particularizări încît sfera de aplicație se restrînge în mod excesiv iar aproximațiile devin prea mari.

Totodată sînt prezentate căile care conduc în mod simplu și natural de la modelul general considerat, la modele concrete relative la cîmpuri elastice particulare de tip tensional care se întîlnesc în tehnică.

Pornind de la o structură neomogenă a căror coeficienți de elasticitate variază cvasiperiodic, se ajunge la un model mecanic nou. Analiza parametrică a acestuia, pe baza considerării unor anumite legi de variație a mărimilor care intervin, conduce la un model mai simplu, polar, al cărui studiu este dezvoltat în acest capitol. Precizarea problemelor la limită și aplicarea metodei funcțiilor complexe propusă inițial de autor [5], [6] și de R. D. Mindlin [2] într-un caz mai simplu permite studiul unor cazuri concrete. Modelul este aplicabil și pentru anumite structuri în cadre.

A. Reducerea ecuațiilor mediului cu neomogeneitate structurală la teoria modelelor spectrale

§ 99. Cîmp elastic cvasiperiodic

Vom stabili un model mecanic particular pornind de la teoria elasticității tensionale în cadrul căreia presupunem că tensiunile și deplasările au o variație cvasiperiodică, în sensul următor.

Scanned with OKEN Scanner

Tensiunile, deplasările, constantele de elasticitate etc. se descompun sub forma

$$f = \sum_{\mathbf{n}} [\bar{f}(\mathbf{n}) \cos \mathbf{k}(\mathbf{n})\, \mathbf{x} + f(\mathbf{n}) \sin \mathbf{k}(\mathbf{n})\, \mathbf{x}] \tag{1}$$

în care $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{k}(\mathbf{n}) = (k_1)(\mathbf{n}), k_2(\mathbf{n}), k_3(\mathbf{n}))$, $\mathbf{k}(\mathbf{n})\, x = k_1(\mathbf{n})\, x_1 + k_2(\mathbf{n})\, x_2 + k_3(\mathbf{n})\, x_3$, $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ iar $f(\mathbf{n})$ și $f(\mathbf{n})$ sînt funcții de x, y, z și depind totodată de numerele n_i. În locul funcțiilor f vom substitui funcțiile $\sigma, u, \lambda, \mu, \beta, \tau, \rho, T$ etc. Constantele $k_i(\mathbf{n})$ vor fi de forma

$$k_i(\mathbf{n}) = 2n_i\, \pi/l_i, \quad (i = 1, 2, 3; \quad n_i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Funcțiile $\bar{f}(\mathbf{n})$ și $f(\mathbf{n})$ sau cele care le înlocuiesc au rolul unor coeficienți de descompunere spectrală.

Produsul a două funcții f și g care admit descompuneri de forma (1) poate fi exprimat sub forma unei descompuneri de același tip dacă se recurge la formulele trigonometrice

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= (\cos (a + b) + \cos (a - b))/2, \\ \sin a \sin b &= (\cos (a - b) - \cos (a + b))/2, \\ \sin a \cos b &= (\sin (a + b) + \sin (a - b))/2. \end{aligned} \tag{3}$$

Se deduce legea de descompunere

$$\begin{aligned} fg = (1/2) \sum_{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{n}} \{ & \bar{f}(\mathbf{m})\, \bar{g}(\mathbf{n}) [\cos (\mathbf{k}(\mathbf{m}) + \mathbf{k}(\mathbf{n}))\, \mathbf{x} + \cos (\mathbf{k}(\mathbf{m}) - \mathbf{k}(\mathbf{n}))\, \mathbf{x}] + \\ & + f(\mathbf{m})\, g(\mathbf{n}) [\cos (\mathbf{k}(\mathbf{m}) - \mathbf{k}(\mathbf{n}))\, \mathbf{x} - \cos (\mathbf{k}(\mathbf{m}) + \mathbf{k}(\mathbf{n}))\, \mathbf{x}] + \\ & + \bar{f}(\mathbf{m})\, g(\mathbf{n}) [\sin (\mathbf{k}(\mathbf{m}) + \mathbf{k}(\mathbf{n})\, \mathbf{x} - \sin (\mathbf{k}\, \mathbf{m} - \mathbf{k}\, \mathbf{n})\, \mathbf{x}] + \\ & + f(\mathbf{m})\, \bar{g}(\mathbf{n}) [\sin (\mathbf{k}(\mathbf{m}) + \mathbf{k}(\mathbf{n}))\, \mathbf{x} + \sin (\mathbf{k}(\mathbf{m}) - \mathbf{k}(\mathbf{n}))\, \mathbf{x}]\} = \\ = \sum_{\mathbf{n}} & \{(\{\bar{f}\bar{g}\}\, (\mathbf{n}) + [fg]\, (\mathbf{n})) \cos \mathbf{k}(\mathbf{n})\, x + \\ & + (<\bar{f}g>(\mathbf{n}) + (f\bar{g})\, (\mathbf{n})) \sin \mathbf{k}(\mathbf{n})\, x, \end{aligned}$$

$$\{\bar{f}\bar{g}\}\, (\mathbf{n}) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{m}} \bar{f}(\mathbf{m}) [\bar{g}(\mathbf{n} - \mathbf{m}) + \bar{g}(\mathbf{m} - \mathbf{n}) + \bar{g}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) - \delta_{\mathbf{n}0}\, \bar{g}(\mathbf{m})],$$

Scanned with OKEN Scanner

$$[fg](\mathbf{n}) = \frac{1}{2}\sum_{m} f(\mathbf{m})[g(\mathbf{m}-\mathbf{n}) - g(\mathbf{n}-\mathbf{m}) + g(\mathbf{m}+\mathbf{n}) - \delta_{no}\bar{g}(\mathbf{m})],$$

$$<\bar{f}g>(\mathbf{n}) = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{m}} \bar{f}(\mathbf{m})\ [g(\mathbf{n}-\mathbf{m}) + g(\mathbf{m}+\mathbf{n}) -$$

$$- g(\mathbf{m}-\mathbf{n})], \qquad (f\bar{g}) = f(m)(\bar{g}(n-m) + \bar{g}(m-n) - \bar{g}(m+n)). \quad (4)$$

În aceste formule vom suma pentru valori $m, n = (0, 0, 0,) (1, 0, 0), \ldots$ şi vom presupune $g(p) = 0$ pentru p compus din cel puţin un număr negativ*). Derivarea unei funcţii care admite o descompunere de forma (1) se scrie astfel

$$f_{,j} = \sum_{n} \Big\{[\bar{f}_{,j}(\mathbf{n}) + k_j(\mathbf{n})\, f(\mathbf{n})] \cos(\mathbf{k}(\mathbf{n})\,\mathbf{x}) + \\ + [f_{,j}(\mathbf{n}) - k_j(\mathbf{n})\,\bar{f}(\mathbf{n})] \sin(\mathbf{k}(\mathbf{n})\,x)\Big\}. \quad (5)$$

În funcţie de diferitele valori luate de constantele l_i se pot distinge următoarele tipuri de structuri: omogene şi simple ($n_i = 0$, $k_i = 0$), stratificate şi regulate ($n_1 = n_2 = n_3 = 1, 2, 3, \ldots$), regulate şi fibrate ($n_1 = n_2 = n_3 = 1$, l_i ia două grupe de valori), granulare şi regulate ($n_1 = n_2 = n_3 = 1$, l_i ia trei grupe de valori), granulare oarecari (n_i sînt arbitrare, l_i ia mai multe grupuri de valori).

Pentru a interpreta din punct de vedere fizic descompunerile (1), vom considera, conform figurii, un element de volum de dimensiuni $a = l_1$, $b = l_2$, $c = l_3$ măsurate în sensul axelor de coordonate Ox, Oy, Oz. Vom considera de exemplu funcţiile $f = \sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{yy}$ pentru $n = (0, 0, 2)$. Variaţia pe conturul unui element de volum a componentelor spectrale ale acestor funcţii apare în figura 105. Se constată că, de exemplu, $\sigma_{xx}(0, 0, 2)$ avînd o variaţie antisimetrică în raport cu axele mediane ale elementului de volum determină apariţia unui moment aplicat pe acest element.

Dacă $f = \lambda, \mu, \beta, \rho$, atunci mediul are un caracter neomogen existînd o cvasiperiodicitate a valorilor luate de coeficienţii de elasticitate care se suprapune peste un cîmp de valori constante $\lambda(0, 0, 0)$ etc. Această cvasiperiodicitate apare în toate cele trei direcţii din spaţiu, corespunzînd unui corp cu celule paralelipipedice solidare dar poate corespunde, pentru unele din lungimile a, b, c ale elementelor de volum foarte mari, la un corp stratificat sau fibrat (fig. 106).

*) În (4) parantezele cu acolade, drepte şi unghiulare, conţin cîte doi termeni care pot fi comutaţi.

Scanned with OKEN Scanner

Existența unor numere $n_i (i = 1, 2, 3)$ implică un model neomogen mai general, putînd descrie proprietăți ale celulelor, fibrelor sau straturilor oarecari, de exemplu pentru variații ale coeficienților de elasticitate ca în figura 107, variații care sînt uzuale pentru numeroase corpuri utilizate în tehnică.

În mod uzual se poate admite o variație a coeficienților de elasticitate mai particulară și anume

$$\lambda = \bar{\lambda}(0) + \bar{\lambda}(\mathbf{n}) \cos(\mathbf{n}\,\mathbf{x}). \tag{6}$$

În cazul unei structuri cubice (izotrope) avem $a = b = c$. În figura 108 apare structura corespunzătoare, într-o secțiune plană. Liniile corespund valorilor constante λ și μ.

§ 100. Condițiile de compatibilitate ale componentelor spectrale cinematice

Coeficienții descompunerii spectrale de forma (1) din § 99 pentru funcțiile deplasărilor u și cei pentru deformații și rotații satisfac anumite condiții de legătură care se stabilesc în cele de mai jos.

Vom utiliza relațiile (1) și (5) din § 99 cu ajutorul cărora se obțin expresiile derivatelor

$$u_{i,j} = \sum_{\mathbf{n}} \{d_{ij}(\mathbf{n}) \cos(\mathbf{k}(\mathbf{n})\,\mathbf{x}) + c_{ij}(\mathbf{n}) \sin(\mathbf{k}(\mathbf{n})\,\mathbf{x})\}, \tag{1}$$

în care intervin funcțiile *distorsiunii* și *curburii*

$$d_{ij}(\mathbf{n}) = \bar{u}_i(\mathbf{n})_{,j} + k_j(\mathbf{n})\, u_i(\mathbf{n}), \quad c_{ij}(\mathbf{n}) = u_i(\mathbf{n})_{,j} - k_j(\mathbf{n})\, \bar{u}_i(\mathbf{n}). \tag{2}$$

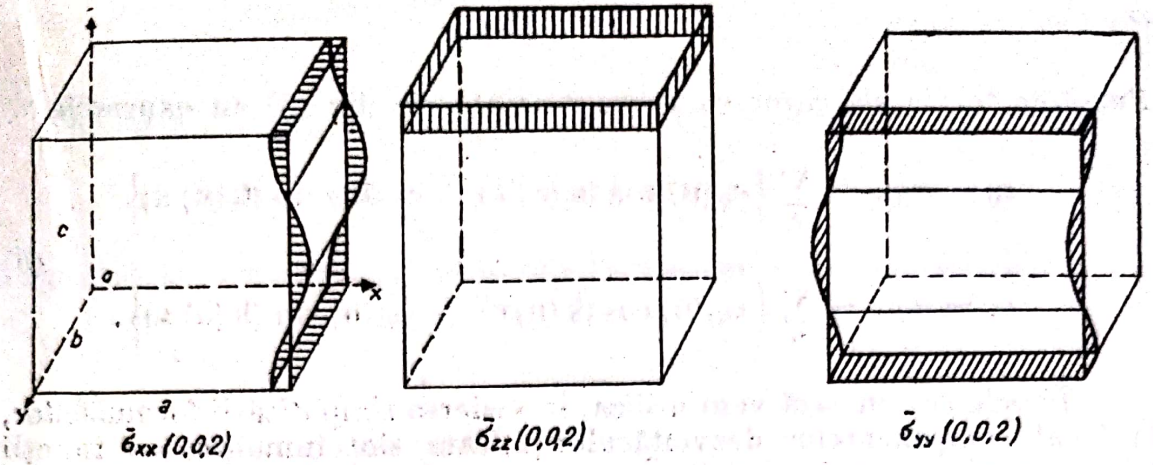
Se deduc următoarele expresii pentru deformații și rotații

$$\begin{aligned} 2e_{ij}(\mathbf{n}) &= \bar{u}_i(\mathbf{n})_{,j} + \bar{u}_j(\mathbf{n})_{,i} + k_j(\mathbf{n})\, u_i(\mathbf{n}) + k_i(\mathbf{n})\, u_j(\mathbf{n}), \\ 2\omega_{ij}(\mathbf{n}) &= \bar{u}_j(\mathbf{n})_{,i} - \bar{u}_i(\mathbf{n})_{,j} + k_j(\mathbf{n})\, u_i(\mathbf{n}) - k_i(\mathbf{n})\, u_j(\mathbf{n}). \end{aligned} \tag{3}$$

Mai notăm

$$\begin{aligned} \vartheta(\mathbf{n}) &= e_{ii}(\mathbf{n}) = \bar{u}_i(\mathbf{n})_{,i} + k_i(\mathbf{n})\, u_i(\mathbf{n}), \\ \varkappa(\mathbf{n}) &= c_{ii}(\mathbf{n}) = u_i(\mathbf{n})_{,i} - k_i(\mathbf{n})\, \bar{u}_i(\mathbf{n}). \end{aligned} \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner



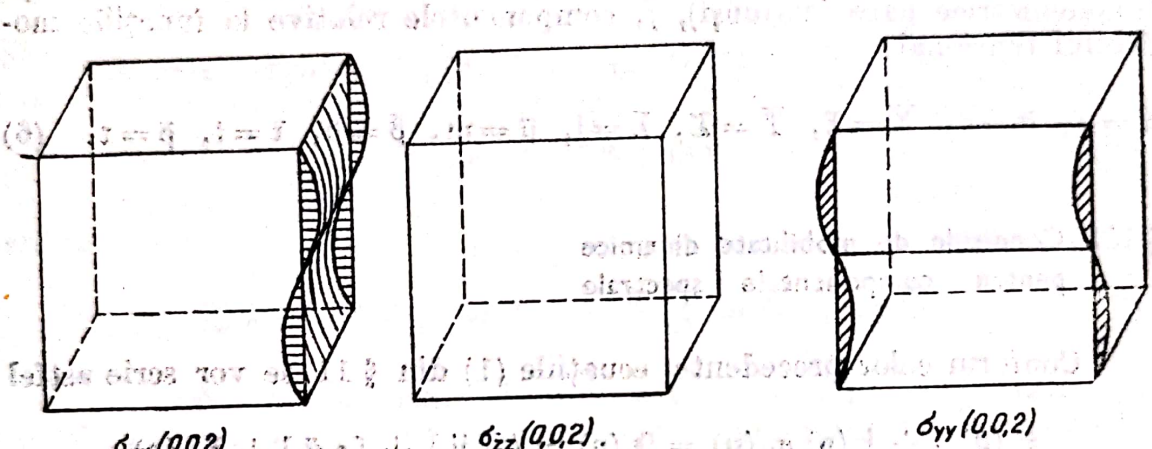


Fig. 105

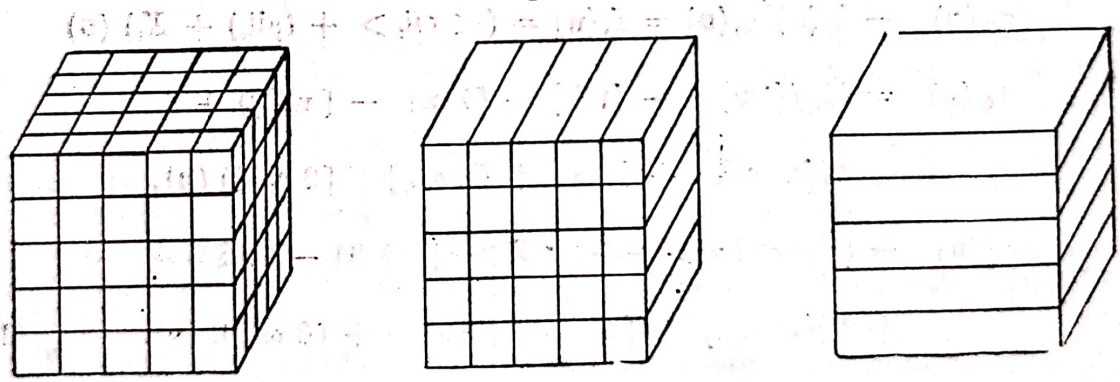


Fig. 106

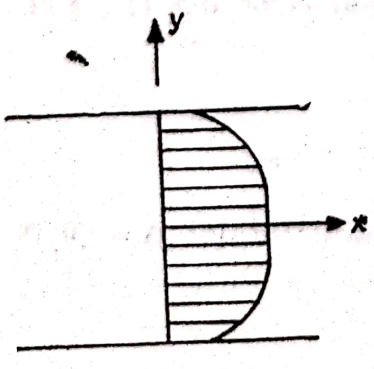


Fig. 107

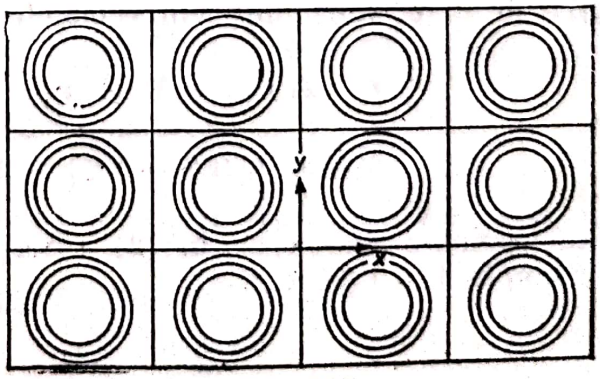


Fig. 108

Funcţiile totale ale căror componente sînt cele din (3) au expresiile

$$e_{ij} = u_{(i,j)} = \sum_{\mathbf{n}} \left\{ e_{ij}(\mathbf{n}) \cos(\mathbf{k}(\mathbf{n})\,\mathbf{x}) + c_{(ij)}(\mathbf{n}) \sin(\mathbf{k}(\mathbf{n})\,\mathbf{x}) \right\}$$

$$\omega_{ij} = u_{[j,i]} = \sum_{\mathbf{n}} \left\{ \omega_{ij}(\mathbf{n}) \cos(\mathbf{k}(\mathbf{n})\mathbf{x}) + c_{[ji]}(\mathbf{n}) \sin(\mathbf{k}(\mathbf{n})\,\mathbf{x}) \right\}. \tag{5}$$

În cele ce urmează vom utiliza, în vederea simplificării formulărilor, în locul componentelor dezvoltăriilor (1) care sînt înmulţite cu funcţii trigonometrice pare (cosinuşi), $\bar{f}$, componentele relative la funcţiile modelului tensional

$$\bar{u} = \mathfrak{u},\ \bar{\sigma} = \mathfrak{s},\ \bar{X} = \mathfrak{X},\ \bar{T} = \mathfrak{T},\ \bar{\lambda} = \mathfrak{l},\ \bar{\mu} = \mathfrak{m},\ \bar{\beta} = \mathfrak{b},\ \bar{\tau} = \mathfrak{t},\ \bar{\rho} = \mathfrak{r}. \tag{6}$$

§ 101. Condiţiile de mobilitate dinamice pentru componentele spectrale

Conform celor precedente, ecuaţiile (1) din § 11 se vor scrie astfel

$$\mathfrak{s}_{ij}(\mathbf{n})_{,j} + k_j(\mathbf{n})\,\sigma_{ij}(\mathbf{n}) = \mathfrak{F}_i(\mathbf{n}) = (\{\mathfrak{r}\,\mathfrak{u}_i\} + [\rho\,\ddot{u}_i] + \mathfrak{X}_i)(\mathbf{n})$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{n})_{,j} - k_j(\mathbf{n})\,\mathfrak{s}_{ij}(\mathbf{n}) = I_i(\mathbf{n}) = (<\mathfrak{r}\ddot{u}_i> + (\rho\ddot{u}_i) + X_i)(\mathbf{n})$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}_{ij}(\mathbf{n}) &= (\delta_{ij}(\{\mathfrak{l}\,\vartheta\} - \{\mathfrak{t}\,\mathfrak{T}\} + [\lambda\,\varkappa] - [\tau\,T]) + \\
&\quad + 2(\{\mathfrak{m}\,e_{ij}\} + \{\mathfrak{b}\,\omega_{ij}\} + [\mu\,c_{(ij)}] + [\beta\,c_{[ji]}))(\mathbf{n}), \\
\sigma_{ij}(\mathbf{n}) &= (\delta_{ij}(<\mathfrak{l}\,\varkappa> - <\mathfrak{t}\,T> + (\lambda\,\vartheta) - (\tau\,\mathfrak{T})) + \\
&\quad + 2(\{\mathfrak{m}\,c_{(ij)}\} + \{\mathfrak{b}\,c_{[ji]}\} + [\mu e_{ij}] + [\beta\,\omega_{ij}]))(\mathbf{n}).
\end{aligned} \tag{1}$$

Ansamblele $\mathbf{n}$ conţin numere pozitive sau nule. Vom observa că pentru $\mathbf{m} = (0, 0, 0)$, intervin ecuaţiile de tipul celor din (1), § 11 :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}_{ij,j} &= \mathfrak{r}\,\mathfrak{u}_i + \mathfrak{X}_i = \mathfrak{F}_i, \\
\mathfrak{s}_{ij} &= \delta_{ij}(\mathfrak{l}\,\vartheta - \mathfrak{t}\,\mathfrak{T}) + 2\,\mathfrak{m}\,e_{ij} + 2\,\mathfrak{b}\,\omega_{ij}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Toate mărimile care apar în (2) corespund ansamblului $\mathbf{n} = (0, 0, 0)$, de exemplu $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(0)$ etc.

Ecuația (24) din § 9, a conductibilității termice

$$\Delta T - \gamma T - \eta \dot{\theta} = - qQ \tag{3}$$

în care notăm $1/\varkappa = \gamma$, $1/k = q$, admite descompunerea spectrală

$$(\Delta - k^2(\mathbf{n}))\, \mathfrak{T}(\mathbf{n}) + 2 k_j(\mathbf{n})\, T(\mathbf{n})_{,j} = (\{\mathfrak{c}\, \mathfrak{T}\} + [\gamma\, T] +$$

$$+ \{\mathfrak{i}\, \vartheta\} + [\eta\, \varkappa] - \{\mathfrak{q}\, \mathfrak{Q}\} - [q\, Q])\, (\mathbf{n}),$$

$$(\Delta - k^2(\mathbf{n}))\, T(\mathbf{n}) - 2 k_j(\mathbf{n})\, \mathfrak{T}(\mathbf{n})_{,j} = (\{\mathfrak{c}\, T\} + [\gamma\, \mathfrak{T}] +$$

$$+ \{\mathfrak{i}\, \chi\} + [\eta\, \vartheta] - \{\mathfrak{q}\, Q\} - [q\, \mathfrak{Q}])\, (\mathbf{n}) \tag{4}$$

pentru

$$k^2(\mathbf{n}) = \sum_j k_j(\mathbf{n})\, k_j(\mathbf{n}),\ \mathfrak{c} = \overline{\gamma},\ q = \overline{q},\ Q = \overline{Q},\ \mathfrak{r} = \overline{\eta}. \tag{5}$$

Menționăm posibilitatea înlocuirii analizei de mai sus pe baza înlocuirii funcțiilor trigonometrice prin funcții mai generale, de exemplu prin funcții ortonormate, pe linia unor lucrări ale autorului [14], [15]. Modelul mecanic definit de ecuațiile (1) apare ca un model compus din mai multe faze materiale cuplate caracterizate prin funcții dependente de cîte un ansamblu $\mathbf{m}$. Acest model este definit cu ajutorul unor tensiuni $\varepsilon_{ij}(\mathbf{n})$, $\sigma_{ij}(\mathbf{n})$ și a unor deplasări $u_i(\mathbf{n})$, $u_i(\mathbf{n})$. Modelul este de tip spectral și are un caracter foarte general, din el putîndu-se deduce prin particularizări modele de alt tip. Astfel, după cum apare în paragraful următor, pentru medii cu neomogeneitate slabă și o structură de tip granular, el e reductibil la modelul polar. Acesta e mai general decît cel considerat uzual în literatură și este definit mai jos (vezi și lucrările autorului [7], [8], [9]).

În acest sens, urmînd calea adoptată în cap. I, înlocuim (1) — (3) din § 6 prin următoarele expresii

$$-\rho S = \Xi^i v_i + \Xi^{ij} v_{i,j} + X^{ij} v_{i,j} + \Xi^{ijk} v_{i,jk}/2 + X^{ijk} v_{ij,k}/2$$

$$i^k = \sigma^{jk} v_j + \sigma^{ijk} v_{i,i}/2 + s^{ijk} v_{ji}/2 - q^k = \tag{6}$$

$$\mathcal{K} = (\rho\, v^i v_i + K\, v^{i,j} v_{i,j} + L\, v^{i,i} v_{j,i} + M\, v^{ij} v_{ij} + N\, v^{ij} v_{ji} +$$

$$+ P\, v^{i,j} v_{ij} + Q\, v^{i,j} v_{ji})/2,\ (v\ldots = \ldots)$$

pentru care relaţiile (6) — (8) din § 6 se înlocuiesc prin următoarele

$$\mathcal{L} = \pi^i v_i + \pi^{ij} v_{i,j} + p^{ij} v_{ij} + \pi^{ijk} v_{i,jk}/2 + p^{ijk} v_{ij,k}/2 - q^i{}_{,i}$$

$$\pi^i = \sigma^{ij}{}_{,j} - F^i, \quad F^i = \rho \ddot{u}^i + \Xi^i,$$

$$\pi^{ij} = \sigma^{ij} + \sigma^{jik}{}_{,k}/2 - \Phi^{ij}, \quad \Phi^{ij} = K \ddot{u}^{i,j} + L \ddot{u}^{j,i} - P \ddot{u}^{ij} - Q \ddot{u}^{ji} + \Xi^{ij}$$

$$p^{ij} = s^{jik}{}_{,k}/2 - F^{ij}, \quad F^{ij} = M \ddot{u}^{ij} + N \ddot{u}^{ji} + P \ddot{u}^{i,j} + Q \ddot{u}^{j,i} + X^{ij},$$

$$\pi^{ijk} = \sigma^{jik} - \Xi^{ijk}, \quad p^{ijk} = s^{jik} - X^{ijk}. \tag{7}$$

Condiţia (15) din § 6 pentru invarianţa lucrului mecanic faţă de rotaţii rigide (condiţia de mobilitate apolară) se transformă în următoarea

$$\pi_{[ij]} + p_{[ij]} = 0. \tag{8}$$

Componentele u_{ij} au fost considerate de natura unor distorsiuni ca şi funcţiile $u_{i,j}$.

În locul funcţiei lui Helmholtz (4) din § 7 considerăm funcţia $A(u_i, u_{i,j}, u_{ij}, u_{i,jk}, u_{ij,k}, \vartheta)$. Sistemul $(6)_{1,3}$ din § 6 se completează în acest caz cu următoarele condiţii

$$p^{ij} = A_{,u_{ij}}, \quad \pi^{ijk} = A_{,u_{i,jk}}, \quad p^{ijk} = A_{,u_{ij,k}}. \tag{9}$$

Această funcţie este în cazul liniar anizotrop un polinom de gradul doi în deplasări, distorsiuni, curburi şi temperatură. În cazul izotrop coeficienţii acestui polinom sînt de natura unor produse ale componentelor tensorului lui Kronecker δ_{ij}. Datorită complexităţii acestor ecuaţii, omitem enunţarea lor. În cazul în care A este o funcţie de T, u_i, $\omega_{ij} = u_{[j,i]} = e_{ijk}\omega_k$, $o_{ij} = u_{[ji]} = e_{ijk}o_k$, $\varkappa_{ijk} = \omega_{ij,k}$, $h_{ijk} = o_{ij,k}$, particularizarea ecuaţiilor de mobilitate pentru modelul izotrop conduce la următoarea explicitare a ecuaţiilor (9)

$$\pi_i = cu_i + 2\pi\varkappa_{ijj} + 2ph_{ijj}, \quad \pi_{ij} = e_{ikl}\pi_{klj}/2 = (\mathcal{M} + \mathcal{A})\varkappa_{ij} +$$

$$+ (\mathcal{M} - \mathcal{A})\varkappa_{ji} + (B + C)h_{ij} + (B - C)h_{ji} + \pi e_{ijk}u_k,$$

$$P_{ij} = e_{ikl}p_{klj}/2 = \delta_{ij}Lh + (M + A)h_{ij} + (M - A)h_{ji} +$$

$$+ (B + C)\varkappa_{ij} + (B - C)\varkappa_{ji} + p e_{ijk}u_k,$$

$$\pi_{ij} = \delta_{ij}(\lambda\theta - \tau T) + 2[\mu e + \alpha o + \beta\omega]_{ji}, \quad (\alpha = -\beta). \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece apar numai funcțiile u, ω, va trebui să considerăm cuplele de tensiune și volum

$$\mu_{ijk} = e_{ijl}\,\mu_{lk} = (\sigma_{ijk} - \sigma_{jik})/2,$$
$$m_{ijk} = e_{ijl}\,m_{lk} = (s_{ijk} - s_{jik})/2, \tag{11}$$
$$\Phi_{[ij]} = \mathfrak{M}_{ij} = e_{ijk}\,\mathfrak{M}_k, \quad F_{[ij]} = M_{ij} = e_{ijk}\,M_k$$

care apar în (7)

$$\pi_{(ij)} = \sigma_{(ij)}, \quad \pi_{ij} = \sigma_{ij} - \mu_{ijk,k}/2 = \mathfrak{M}_{ij},$$
$$p_{[ij]} = -\,m_{ijk,k}/2 - M_{ij}. \tag{12}$$

După sumarea termenilor ultimelor două ecuații din (12) rezultă ecuația momentelor

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ji} = (\mu + m)_{ijk,k} + (\mathfrak{M} + M)_{ij} \tag{13}$$

sau

$$e_{ijk}\,\sigma_{jk} = (\mu + m)_{ij,j} + (\mathfrak{M} + M)_i. \tag{14}$$

§ 102. Analiza parametrică a modelului spectral

În funcție de diferitele caracteristici ale cîmpului neomogen și de diferitele solicitări asociate acestuia, pot fi distinse categorii de cîmpuri elastice mai particulare și totodată mai simple. În cele ce urmează ne vom limita la cazul corespunzător următoarelor restricții.

Condiția 1. Neomogeneitatea corespunde unor componente spectrale ale descompunerilor diferitelor funcții f care caracterizează cîmpurilor fizice asociate mediului, avînd următoarele ordine de mărime:

— Primele componente $\bar{f}(0)$ ale descompunerilor funcțiilor f menționate sînt de un prim ordin de mărime.

— Componentele $\bar{f}(\mathbf{n})$ pentru $\mathbf{n} \neq (0, 0, 0)$ și $f(\mathbf{n})$ pentru $\mathbf{n}$ arbitrar sînt de un ordin de mărime mai mic, astfel că produsele unor asemenea componente pot fi neglijate.

În alți termeni, se pot considera descompunerile menționate avînd coeficienții funcțiilor trigonometrice înmulțiți cu un parametru mic $\varepsilon\,(<1)$ a cărui notare se va omite. Puterile acestui număr fiind foarte mici, termenii care îi înmulțesc se vor anula. În acest caz neomogenitatea se va numi *slabă*.

Scanned with OKEN Scanner

În cele ce urmează vom considera ansamblele de numere $n = (n_1, n_2, n_3)$ pe care, pentru simplitate, le vom nota cu ajutorul șirului de numere întregi $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, conform unei reguli ce poate fi specificată de la caz la caz, în funcție de tipul structurii.

În general, pentru modelele compuse din faza $\mathrm{n} = (0, 0, 0)$ și fazele definite de ansamblele n_k pentru $k = 1, 2, 3$ sau $1, 2, \ldots, p$, se poate elabora o formulare mai sugestivă recurgînd la următoarele notații pentru componentele dezvoltărilor care apar, notații care în general nu aduc nici o restricție față de cele precedente

$$f \ldots (i) = f_i \ldots, \quad \bar{f} \ldots (i) = \bar{f}_i \ldots . \tag{1}$$

Punctele reprezintă indici care pot apare pentru diferitele funcții ce se pot considera. Ecuațiile $(1_{1,2})$ și (2) din § 101 se pot atunci formula astfel

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{s}_{kij,j} + k_j(k)\,\sigma_{kij} = \mathrm{r}\,\mathrm{ii}_{ki} + \mathrm{r}_k\,\mathrm{ii}_i + \mathfrak{X}_{ki} \equiv \mathfrak{I}_{ki},\\
&\sigma_{kij,j} - k_j(k)\,\mathfrak{s}_{kij} = \mathrm{r}\,ii_{ki} + \rho_k\,\mathrm{ii}_i + X_{ki} \equiv I_{ki},\\
&\mathfrak{s}_{kij} = \delta_{ij}\,[\mathrm{l}\,\vartheta_k + \mathrm{l}_k\,\vartheta - \mathrm{t}\,\mathfrak{T}_k - \mathrm{t}_k\,\mathfrak{T}] +\\
&\quad + 2\,[\mathrm{m}\,e_{kij} + \mathrm{m}_k\,e_{ij} + \mathfrak{b}\,\omega_{kij} + \mathfrak{b}_k\,\omega_{ij}],\\
&\sigma_{kij} = \delta_{ij}\,[\mathrm{l}\,\varkappa_k + \lambda_k\,\vartheta - \mathrm{t}\,T_k - \tau_k\,\mathfrak{T}] +\\
&\quad + 2\,[\mathrm{m}\,c_{k(ij)} + \mu_k\,e_{ij} + \mathfrak{b}\,c_{k[ji]} + \mathfrak{b}_k\,\omega_{ij}],\\
&\Delta\mathfrak{T} - \mathfrak{c}\,\mathfrak{T} - \mathfrak{i}\,\vartheta = -\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{D},\\
&[\Delta - k^2(k)]\,\mathfrak{T}_k + 2\,k_j(k)\,T_k - [\mathfrak{c}\,\mathfrak{T}_k +\\
&\quad + \mathfrak{c}_k\,\mathfrak{T} + \mathfrak{i}\,\vartheta_k + \mathfrak{i}_k\,\vartheta] = -\,[\mathfrak{q}\,\mathfrak{D}_k + \mathfrak{q}_k\,\mathfrak{D}],\\
&[\Delta - k^2(k)]\,T_k - 2\,k_j(k)\,\mathfrak{T}_{k,j} - [\mathfrak{c}\,T_k +\\
&\quad + \gamma_k\,\mathfrak{T} + \mathfrak{i}\,\varkappa_k + \eta_k\,\vartheta] = -\,[q\,Q_k + \mathfrak{q}_k\,Q],
\end{aligned} \tag{2}$$

în care, conform (4) din § 100, intervin funcţiile

$$\begin{matrix} 2e \\ 2\omega_{kij} \end{matrix} = \mathfrak{u}_{ki,j} \pm \mathfrak{u}_{kj,i} + k_i(k)\, u_{kj} \pm k_j(k)\, u_{ki} \quad \begin{matrix} \text{(deformaţie),} \\ \text{(rotaţie constrînsă),} \end{matrix}$$

$$c_{kij} = u_{ki,j} - k_j(k)\, \mathfrak{u}_{ki}, \qquad \text{(curbură),}$$

$$\vartheta_k = e_{kii}, \quad \varkappa_k = c_{kii}. \tag{3}$$

S-a notat

$$\mathfrak{l} = \bar{\lambda}(0), \quad \mathfrak{m} = \bar{\mu}(0), \quad \mathfrak{b} = \bar{\beta}(0), \quad \mathfrak{t} = \bar{\tau}(0),$$

$$\mathfrak{u} = \bar{u}(0), \quad \vartheta = \vartheta(0), \quad e = e(0), \quad \omega = \omega(0), \quad \mathfrak{T} = \bar{T}(0),$$

$$\mathfrak{c} = \bar{\gamma}(0), \quad \mathfrak{i} = \bar{\eta}(0), \quad \mathfrak{q} = \bar{q}(0), \quad \mathfrak{c}_k = \bar{\gamma}(k), \quad \mathfrak{i}_k = \bar{\eta}(k),$$

$$\mathfrak{q}_k = \bar{q}(k), \quad \mathfrak{X}_{ki} = \mathfrak{X}_i(k). \tag{4}$$

Sistemul obţinut împreună cu ecuaţiile (2) din § 101 admit următoarea rezolvare:

— Ecuaţiile (2) din § 101 se rezolvă ca în cazul modelului clastic tensional simplu (în $\mathfrak{u}_i$, $\mathfrak{s}_{ij}$).

— Ecuaţiile (2) de mai sus dau soluţiile $\mathfrak{u}_{ki}$, u_{ki}, $\mathfrak{s}_{kij}$, σ_{kij} pentru k fixat în funcţie de soluţiile $\mathfrak{u}_i$.

Se constată că analiza parametrică determină o decuplare între fazele (k) ale modelului spectral general, rămînînd un cuplaj între faza (0) şi fiecare fază (k) în mod separat.

În cele ce urmează mai admitem următoarele condiţii care restrîng generalitatea modelului de tip spectral considerat.

Condiţia 2. Fazele k sînt în număr de cel mult trei ($k = 1, 2, 3$) şi corespund fie unui mediu granular (dacă $k = 1, 2, 3$), fie unui mediu stratificat (dacă $k = 1, 2$), fie unui mediu fibrat (dacă $k = 1$).

Condiţia 3. Efectele de mobilitate descrise de termenii dependenţi de rotaţii sînt neglijabile ceea ce revine la a admite restricţiile

$$\beta = 0 \text{ sau } (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_k, \beta_k) = 0. \tag{5}$$

Aceste condiţii permit deducerea din sistemul $(2)_{1,2}$ a unor ecuaţii corespunzătoare unui model mecanic mai simplu, de tip polar. Astfel, vom înmulţi termenii primei ecuaţii din (2) cu k_i/K la care vom adăuga termenii ecuaţiei (21) din § 101. Notăm $K = (\Sigma\, k_i^2)^{1/2} = 1/\Lambda$, $k_i = 1/\Lambda_i = \nu_i/\Lambda$ pentru $\Sigma_i\, \nu_i^2 = 1$. Vom împărţi apoi termenii celei de-a doua

ecuaţii din (2) cu K. Rezultă sistemul, valabili pentru un număr k dat:

$$\pi_i = \nu_{ij,j} - F_i, \quad \nu_{ij} = \pi_{ij}, \quad p_{ij} = s_{jik,k}/2 - F_{ij},$$
$$s_{jik} = p_{ijk}, \quad \pi_{[ij]} + p_{[ij]} = 0, \tag{6}$$

în care

$$\pi_i = P_i/\Lambda^2, \quad P_i = -\nu_j(i)\,\nu_k(i)\,p_{ijk}/2,$$
$$\pi_{ij} = \nu_k(i)\,\mathfrak{s}_{ijk} + \mathfrak{s}_{ij}, \quad p_{ijk} = -2\Lambda\,\sigma_{ijk}, \quad F_i = \nu_j(i)\,\mathfrak{I}_{ij} + I_i \tag{7}$$
$$p_{ij} = \mathfrak{s}_{ij} - \pi_{ij}, \quad F_{ij} = -\Lambda I_{ij}.$$

Ecuaţiile (6) corespund forţelor, cuplelor şi condiţiei de mobilitate apolară ale modelului polar din (7), § 101, în care înlocuim σ_{ij} prin ν_{ij} şi luăm $\pi_{ijk} = 0$, $\Phi_{ij} = 0$, $\Xi_{ijk} = X_{ijk} = 0$.

Vom remarca că π_i poate fi neglijat în $(6)_1$ într-un caz destul de general şi anume conform următoarelor condiţii:

Condiţia 4. În interiorul elementelor structurale care conform condiţiei 2 pot fi granule, straturi sau fibre, deplasările, tensiunile şi forţele de volum nu păstrează necesarmente valori constante şi pot varia. În alţi termeni admitem existenţa unor cîmpuri cinematice şi dinamice locale astfel încît analiza teoretică are un grad de precizie destul de înaintat înglobînd atît efectele macrostructurale cît şi cele microstructurale.

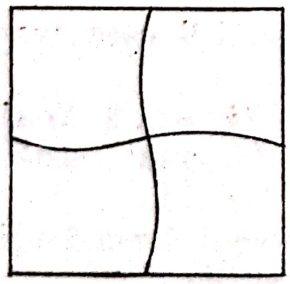


Fig. 109

Caracterul de „pătrundere" ale analizei în microstructură poate fi pus în evidenţă în modul următor. Utilizăm notaţiile introduse mai înainte. Constatăm că Λ_i sînt lungimi caracteristice ale elementelor structurale, presupuse pentru simplificarea expunerii de acelaşi ordin de mărime. Fie $\mathcal{L}$ o lungime caracteristică a variaţiei funcţiilor menţionate (deplasări etc.). Presupunînd că în interiorul unor intervale de lungime $\mathcal{L}$ aceste variaţii se menţin în limite date — fiind de exemplu foarte mici — rezultă, conform condiţiei de mai sus că, pentru tot corpul, va trebui ca $\mathcal{L} \ll \Lambda$ astfel că $\varepsilon = \mathcal{L}/\Lambda$ este un parametru mic ($\ll 1$). Vom efectua substituţia de variabile $x_i = \xi_i/\mathcal{L}$ ceea ce permite transcrierea primei ecuaţii din (6) sub forma $\nu_{ij:j} = \mathcal{L}F_i - \varepsilon^2 P_i$ pentru $(\ )_{:i} = \partial(\ )/\partial\,\xi_i$. Rezultă că efectiv ultimul termen este de un ordin de mărime superior şi poate fi neglijat, ceea ce revine la omiterea forţelor de volum π_i în (6).

Scanned with OKEN Scanner

În ceea ce privește ecuațiile constitutive relative la mărimile din (6), ele diferă de cele ale unui model polar dar, omițînd o serie de restricții în concordanță cu ipoteza slabei neomogenități, pot fi reduse la ecuații de forma (10) din § 101. Condițiile corespunzătoare acestor restricții sînt următoarele.

Condiția 5. Ne restrîngem atenția la cazul unor corpuri neomogene ale căror mișcări se caracterizează prin aceea că elementele structurale suferă variații simetrice în raport cu axele lor ale deplasărilor $u_{ij} = \overline{u}_j(i)$ neglijabile față de deplasările centrelor acestor elemente $u_i = \overline{u}_i(0)$ sau față de variațiile antisimetrice $u_{ij} = u_j(i)$ în raport cu aceleași axe. De asemenea considerăm cazul în care variația locală a temperaturii simetrică în raport cu axele elementelor structurale $\mathfrak{T}_i$ este de asemenea neglijabilă față de valoarea temperaturii $\mathfrak{T}$ în centrul elementelor sau față de T_i. Această condiție, compatibilă cu o formulare corectă dar mai particulară, corespunde unei structuri cu elemente periodice destul de mici pentru ca să nu apară în interiorul lor variații simetrice prea mari ale deplasărilor și temperaturii.

Se poate atunci constata că ecuațiile (7) se exprimă cu ajutorul ecuațiilor $(2)_2$ și $(2)_3$ în funcție de u_i și u_{ij}, fără însă a putea fi pus în evidență un potențial elastic ca în (6) sau în (9), § 101. Un asemenea potențial intervine, echivalența cu un model polar fiind totală, dacă se mai admit condițiile de asemenea compatibile cu ipoteza slabei neomogeneități.

Condiția 6. Elementele structurale au mișcări relative față de celelalte elemente definite de componentele u_{ij}. Aceste mișcări sînt în principal rotații relative $\Omega_{ij} = o_{ij} - \omega_{ij} = e_{ijk}\Omega_k = (u_{ij} - u_{ji})/2\ \Lambda$ față de care deformațiile relative $(u_{ij} + u_{ji})/2$ sînt neglijabile. Există deci o constrîngere a elementelor de a se deforma ca și ansamblul, aceasta datorită slabei neomogeneități. Un exemplu de asemenea constrîngere, corespunzător altui tip de structură dar care permite înțelegerea imediată, apare în figura 109 și se referă la o structură a căror noduri fiind foarte rigide se rotesc fără o deformare apreciabilă (fibrele medii normale rămînînd și după deformare normale la noduri).

Condiția 7. Admitem ipoteza simplificatoare a unei variații pur macrostructurale a temperaturii astfel că $T = 0$, $T_k = 0$.

Condiția 7. Cuplele de volum simetrice $\mathfrak{X}_{(ij)}$ sînt neglijabile.

Conform celor de mai sus, relațiile (3) se reduc la următoarele

$$2\varepsilon_{kij} = (\nu_i(k)\,\delta_{jl} + \nu_j(k)\,\delta_{il})\,\Omega_{kl},\ c_{kij} = \Lambda\Omega_{ki,j} \tag{8}$$

$$c_{kij} = \Lambda\Omega_{ki,j},\ \varkappa_k = \Lambda\Omega_{ki,i},\ c = c_{ii} = \Lambda\Omega_{ii}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Conform $(2)_3$, $(2)_4$ vom avea în (7)

$$\nu_{ij} = (\delta_{ij} l + \nu_j(i) l_i) - \delta_{ij} t \mathfrak{T} - \nu_j(i) t_i \mathfrak{T} +$$
$$+ 2(m\delta_{ik} + m_i \nu_k(i)) \varepsilon_{jk} + m(\nu_j(i) \nu_k(i) + \delta_{jk}) \Omega_{ik}, \tag{9}$$
$$F_i = (r + \nu_j(i) r_j) \ddot{u}_i + \mathfrak{X}_i,$$

$$\mu_{ij} = e_{ikl} s_{klj}/2 = \Lambda\{\Lambda[-\delta_{ij} m \Omega_{k,k} + (l + 3m)\Omega_{i,j} - l\Omega_{j,i}] +$$
$$+ \mu^*_{ij}\}, \quad \mu^*_{ij} = e_{ilk}[\delta_{jk}(\lambda_1 \vartheta - \tau_1 \mathfrak{T}) + 2\mu_1 \varepsilon_{jk}], \tag{10}$$
$$F_{ij} = -\Lambda(r\Lambda\Omega_{ij} + \rho_{[i}\ddot{u}_{j]} + X_{[ij]}) = e_{ijk} M_k.$$

În cazul unei structuri izotope pentru care sînt satisfăcute condițiile $\nu_i(j) = \delta_{ij}$, $r_i = \bar{r}$ iar elementele structurale prezintă simetrie în raport cu centrul lor astfel ca $\lambda_i = \mu_i = 0$, $\tau_i = 0$, $\rho_i = 0$, $l_i = \bar{l}$, $m_i = \bar{m}$, $t_i = \bar{t}$, vom avea în primele trei relații din (9)

$$\nu_{ij} = \delta_{ij}(\lambda\vartheta - \tau\mathfrak{T}) + 2(\mu e_{ij} + \alpha o_{ij} + \beta\omega_{ij}),$$
$$\mu_{ij} = L\delta_{ij} h + (M + A) h_{ij} + (M - A) h_{ji} + \tag{11}$$
$$+ (\mathcal{M} + \mathcal{A}) \varkappa_{ij} + (\mathcal{M} - \mathcal{A}) \varkappa_{ji}$$

iar

$$\lambda = l + \bar{l}, \quad \tau = t + \bar{t}, \quad \mu = m + \bar{m}, \quad \alpha = -\beta = m/2, \tag{12}$$
$$L = -\Lambda^2 m, \quad M = \Lambda^2 3m/2 = -\mathcal{M}, \quad A = \Lambda^2(2l + 3m)/2 = -\mathcal{A},$$

$$\mu^*_{ij} = 0. \tag{13}$$

Ecuațiile (7) se restrîng sub forma ecuațiilor $(7)_2$, (14) din § 101

$$\nu_{ij,j} = F_i, \quad \mu_{ij,j} = e_{ijk}\mu_{jk} = M_i \tag{14}$$

în care, conform (9), avem pentru structura izotropă

$$F_i = (r + \bar{r})\ddot{u}_i + \mathfrak{X}_i. \tag{15}$$

Ecuațiile constitutive pentru tensiuni și cuple de tensiune din (11), în cazul absenței efectelor termice și conform tuturor ipotezelor se pot

Scanned with OKEN Scanner

inversa sub forma

$$e_{ij} = (\nu_{(ij)} - \delta_{ij}\,\nu n)/2\mu, \quad o_{ij} + \beta_{ij}/\alpha = \nu_{[ij]}/2\alpha, \tag{16}$$
$$h_{(ij)} + \mathcal{M}x_{(ij)}/M = (\mu_{(ij)} - \mu^*_{(ij)} - \delta_{ij}N\,(m - m^*))/2M,$$
$$h_{[ij]} + \mathcal{A}x_{[ij]}/A = (\mu_{[ij]} - \mu^*_{[ij]})/2A,$$

pentru

$$\nu = \lambda/(3\,\lambda + 2\mu), \quad n = \nu_{ii}, \quad N = L/(3L + 2\,M), m = \mu_{ii}. \tag{17}$$

§ 103. Condiții și probleme la limită pentru modelul spectral de tip neomogen

Datorită descompunerilor de forma (1) din § 99 și condițiilor din paragraful precedent, deplasările și tensiunile pe conturul C al corpului sînt

$$\overline{u}_i(0) + \sum_j \frac{1}{k}\,\Omega_{ij} \sin(kx_j) = u_i(C) = \overline{u}_i(C) + \sum_j \frac{1}{k}\,\Omega_{ij}(C) \sin(kx_j),$$
$$\left[\overline{\sigma}_{ij}(0) + \sum_j \frac{1}{2k}\,\mu_{kij} \sin(kx_k)\right]\nu_j = \sigma_i(C) = \tag{1}$$
$$= \overline{\sigma}_i(C) + \sum_j \frac{1}{2k}\,\mu_{ki}(C) \sin(kx_k).$$

ν_j reprezintă cosinușii normalei la elementul de contur. Rezultă următoarele condiții pe contur.

$$\overline{u}_i(0) = \overline{u}_i(C), \quad \Omega_{ij} = \Omega_{ij}(C), \tag{2}$$
$$\overline{\sigma}_{ij}(0)\,\nu_j = \overline{\sigma}_i(C), \quad \mu_{kij}\nu_j = \mu_{kj}(C). \tag{3}$$

În cadrul problemelor la limită poate fi admis primul grup (2) sau al doilea grup (3) de condiții de mai sus.

§ 104. Echivalența modelului spectral (avînd neo-mogeneitate cvasiperiodică) cu unele structuri reale

Vom presupune, în concordanță cu relațiile din § 102, că modulii de elasticitate au o parte constantă și o parte variind conform formulei (6) din § 99.

Se poate arăta de exemplu în cazul în care $l_i = l$ și conform (11) din § 103 în care luăm $n_i = 1, k = \pi/l$ — vezi relațiile (2) din § 99, că se poate pune în evidență o echivalență pentru un mediu constituit dintr-o fază continuă și granule cubice de diametru sau laturi $d/2$, astfel dispuse

Scanned with OKEN Scanner

încît distanța între fețe să fie $l/2$ în sensul celor trei axe de coordonate (fig. 110 și 111). Se constată, notînd modulii de elasticitate ai granulelor prin $\lambda_g = \mathrm{I} + \bar{\lambda}$ etc., iar ai fazei continui prin $\lambda_c = \mathrm{I} - \bar{\lambda}$ etc., că relațiile (6) din § 99 corespund unor variații ai coeficienților de elasticitate avînd valorile maxime și minime egale cu cele ale fazelor mediului granular. Totodată aceste variații au o semiperioadă care coincide cu dimensiunile granulelor și intervalelor dintre acestea, pentru $n_i = 1$, $l_i = l$. O altă echivalență corespunde condiției ca masa modelului de tip spectral (cvasi-periodic) în domeniul unui element structural să fie egală cu masa mediului granular considerat. Presupunînd că în acest mediu avem densitatea ρ_c a fazei continui și ρ_g a granulelor

$$\iiint_0^{l/2} (\mathfrak{r} - \bar{\rho})\, dx\, dy\, dz = \rho_c\, (l/2)^3$$

$$\iiint_0^{l/2} (\mathfrak{r} + \bar{\rho})\, (\cos kx + \cos ky + \cos kz)\, dx\, dy\, dz = \rho_g\, (l/4)^3 \tag{1}$$

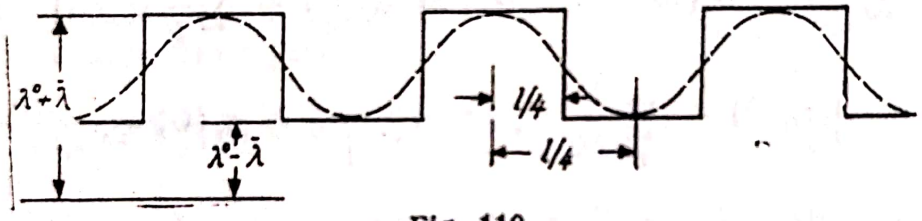


Fig. 110

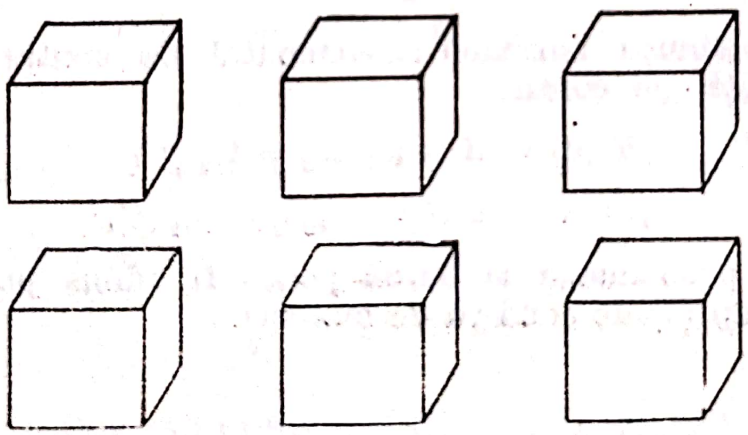


Fig. 111

rezultă

$$3l^3\, (\mathfrak{r} + \bar{\rho})/4\pi = \rho_g\, l^3/64,\ \mathfrak{r} + \bar{\rho} = \rho_g\, \pi/24,$$

$$\mathfrak{r} - \bar{\rho} = \rho_c,\ \mathfrak{r} + \bar{\rho} = \rho_g\, \pi\, /24, \tag{2}$$

de unde

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{2}\left[\rho_g \frac{\pi}{24} + \rho_c\right],\ \bar{\rho} = \frac{1}{2}\left[\rho_g \frac{\pi}{24} - \rho_c\right]. \tag{3}$$

Aplicînd cele precedente, avem

$$l = (\lambda_g + \lambda_c)/2, \quad \bar{\lambda} = (\lambda_g - \lambda_c)/2 \text{ etc.} \tag{4}$$

În acest mod efectuăm trecerea la modelul spectral. În cazul unei distribuții a granulelor ca în figura 112, va trebui să efectuăm o descompunere în sume de funcții trigonometrice astfel că vor rezulta o serie de ecuații

Fig. 112

de forma (1) din § 101 și implicit o serie de modele spectrale, de forma dată în § 102. Așadar, analiza armonică a funcțiilor $\lambda, \ldots$ conduce la diferite modele asociate.

Vom menționa cîteva materiale care pot fi descrise cu ajutorul modelelor spectrale.

a) *Betonul.* Amestecul dintre ciment sau mortar cu pietriș conduce la un corp aglomerat. $l/2$ va reprezenta atunci diametrul mediu al particulelor de pietriș, λ_c etc., coeficienții de elasticitate ai mortarului, iar λ_g ai particulelor, dacă presupunem o distribuție regulată de tipul celei considerate mai înainte.

Ca valori indicative menționăm următoarele pentru pietriș de bazalt :

$E = 530\,000$ kg/cm²	pentru o compresiune	$= 45$ kg/cm²,
$= 594\,000$	ca medie pentru	$= 0-45$,
$= 480\,000$	pentru	$= 30$,
$= 562\,000$	ca medie pentru	$= 0 - 30$,

λ și μ se deduc pentru $\nu = 1/5-1/6$.

Variația locală a tensiunilor poate produce zone de desprindere între pietriș și mortar sau fisuri în acesta, motiv pentru care efectul de concentrare al tensiunilor datorat materialelor aglomerate este important.

b) *Metale granulare, sinterizate, policristaline.* Datorită existenței unor incluziuni dispuse regulat sau datorită aglomerării prin presiune a unor granule, se creează o structură metalică avînd o neomogeneitate periodică. Fontele nodulare sau metalele policristaline prezintă de asemenea neomogeneități datorate existenței unor aglomerări materiale avînd coeficienți de elasticitate mai ridicați, înconjurate de o fază mai puțin rigidă, în care structura este mai regulată iar microcristalele sînt dispuse după direcții care se intersectează.

În cazul unor tipuri de materiale sinterizate, prin presarea parțială a granulelor se creează o structură în care apar zone de contacte și goluri astfel că cel mai simplu model de descompunere, va corespunde condițiilor

$$\lambda_c = l - \bar{\lambda} = 0. \tag{5}$$

c) *Lemnul.* Structura fibroasă şi nodulară a lemnului induce o neomogeneitate de tipul celei studiate. Datorită varietăţilor de esenţe lemnoase, cifrele care caracterizează această neomogeneitate sînt foarte diferite dar sînt cunoscute în general proiectantului.

§ 105. Echivalenţa structurilor reticulare cu modelul spectral avînd polaritate restrînsă

Vom considera un sistem de bare elastice solidarizate elastic la noduri. Notăm prin l lungimea barelor orientate în direcţia axelor de coordonate, h lăţimea secţiei lor transversale presupusă de a avea forma unui

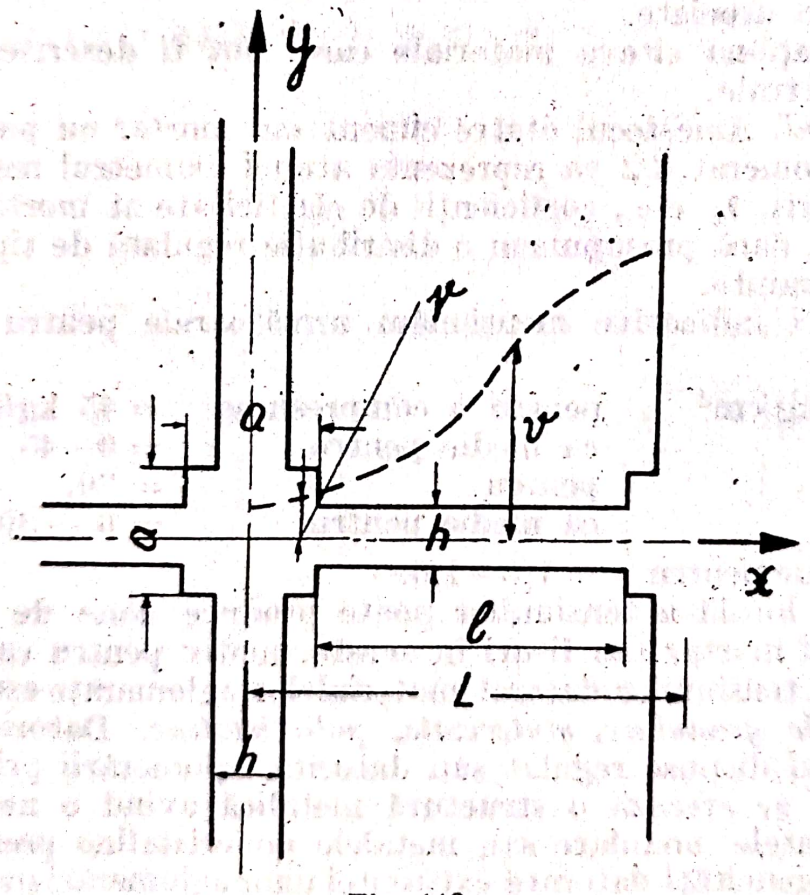


Fig. 113

pătrat. a este latura elementului la nod eventual egală cu h. Pentru $a = h = l$, structura se reduce la un corp compact. Ecuaţia de încovoiere a barelor în direcţia axei Ox este

$$\mathcal{E} I v^{IV} = 0, \quad (v' = dv/dx) \tag{1}$$

Scanned with OKEN Scanner

v fiind deplasarea în direcția axei Oy iar

$$\mathcal{E} = E/(1 - \nu^2), \quad I = h\int_A y^2 \mathrm{d}y = h^4/12 \tag{2}$$

reprezintă modulul de elasticitate și momentul de inerție. Rezultă soluția valabilă în intervalul $x = a/2$, $x = l + a/2$

$$v(x) = v(0) + xv'(0) + x^2 v''(0)/2 + x^3 v'''(0)/6. \tag{3}$$

$v(0)$ este deplasarea în punctul $x = a/2$, $v'(0)$ înclinarea în același punct etc.

Forța tăietoare și momentul încovoietor în bară la capăt au expresiile

$$Q = -\mathcal{E} Iv'''(0), \quad M = -\mathcal{E} Iv''(0). \tag{4}$$

Datorită deformării nodului, fibra care înainte de deformare coincide cu axa barei în intervalul $x = 0$, $x = a/2$ va avea deplasările

$$\mathfrak{v}_S(x) = x\mathfrak{v}'(0) + \mathfrak{v}(0) \tag{5}$$

$\mathfrak{v}'(0)$ fiind înclinarea în centrul nodului $x = 0$. Pentru continuitate va trebui ca

$$\mathfrak{v}_S(a/2) = \mathfrak{v}(0) + a\mathfrak{v}'(0)/2 = v(0), \quad \mathfrak{v}'(0) = v'(0). \tag{6}$$

În mod analog,, în intervalul $x = L - a/2 = b + a/2$, $x = L = l + a$, avem deplasările

$$\mathfrak{v}_D(x) = (x + a/2 - L)\mathfrak{v}'(L) + v(l) \tag{7}$$

iar pentru continuitate

$$v(l) = v(0) + lv'(0) + l^2 v''(0)/2 + l^3 v'''(0)/6 = \mathfrak{v}(L) - a\mathfrak{v}'(L)/2$$

$$v'(l) = v'(0) + lv''(0) + l^2 v'''(0)/2 = \mathfrak{v}'(L). \tag{8}$$

Eliminăm din (8) și (9) termenii

$$v'''(0) = -12\,Ld/l^3, \quad v''(0) = -(L/l)^2 c. \tag{9}$$

S-a notat

$$d = \frac{l}{L}\left[(\mathfrak{v}(L) - \mathfrak{v}(0))/l - \frac{1}{2}(1 + a/l)(\mathfrak{v}'(L) + \mathfrak{v}'(0))\right], \tag{10}$$

$$c = -\frac{l^2}{L^2}\frac{6}{l}\left[\frac{\mathfrak{v}(L) - \mathfrak{v}(0)}{l} - \mathfrak{v}'(0) - \right.$$

$$\left. - \frac{\mathfrak{v}'(L) - \mathfrak{v}'(0)}{3} - \frac{a}{l}\frac{\mathfrak{v}'(L) + \mathfrak{v}'(0)}{2}\right].$$

Aşadar, solicitările (4) capătă expresiile

$$Q = 12\ kd/l,\quad M = kLc \tag{11}$$

pentru

$$k = \mathcal{E}IL/l^2. \tag{12}$$

Putem considera de asemenea momentele de torsiune în bare şi forţele axiale

$$M_t = Cl\vartheta,\quad N = K\,l\varepsilon \tag{13}$$

în care

$$K = \mathcal{E}A/l,\quad C = GJ/l, \tag{14}$$

G fiind modulul de elasticitate la lunecare, J momentul polar de inerţie al secţiei transversale, $A = h^2$ aria secţiei transversale a barei iar

$$\varepsilon = (u(l + a/2) - u(a/2))/l,\quad \vartheta = (o_t(l + a/2) - o_t(a/2))/l. \tag{15}$$

u şi o_t sînt deplasări în direcţia axei barei şi răsuciri ale acesteia.

În zona nodului se produce însă un cîmp de tensiune spaţial astfel că N este rezultanta tensiunilor în secţia $x = a/2$, pentru h foarte apropiat de a

$$N = h^2(l\,\vartheta + 2\,m\,e),\quad (h = a), \tag{16}$$

$e = u'$ fiind deformaţia în direcţia barei considerate la nod, iar ϑ funcţia dilatării la nod. l şi $m = G$ sînt coeficienţii lui Lamé ai materialului din nod.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece

$$u(a/2) = u(0) + ae(0)/2, \quad u(l + a/2) = u(l) - ae(L)/2 \tag{17}$$

avem, pentru ca cele două expresii pentru N să fie compatibile,

$$\varepsilon = [u(L) - u(0) - a(e(0) + e(L))/2]/l = h^2(\vartheta + 2me)/Kl. \tag{18}$$

Vom efectua o analiză parametrică a ecuațiilor stabilite punînd în evidență următoarele mărimi:

$\mathcal{L}$ = lungimea (diametrul) corpului la scară macrostructurală

$\xi = x/\mathcal{L}$ = coordonata intrinsecă a structurii

$\epsilon = l/\mathcal{L}$ = parametru structural.

Vom nota prin $f' = df/d\xi$ funcțiile derivate în raport cu ξ și vom presupune următoarele:

a) Valorile $u(0)$, $u(L)$, $v(0)$, $v(L)$ sînt date în centrele nodurilor întregii structuri de către funcții notate pentru simplificare u, v.

b) Valorile în centrele tuturor nodurilor $u(0)$, $u(L)$, $v'(0)$, $v'(L)$, $o_i(0)$, $o_i(L)$ sînt date de funcții continui notate u, r, o_i.

c) Funcțiile derivate de un număr de ori arbitrar v',..., r,..., o_i,... au același ordin de mărime ca și funcțiile respective v', r, o_i.

d) ϵ este un parametru mic.

e) Diferențele $v'(0) - r(0)$ pot fi de un ordin de mărime egal cu al funcțiilor v', r, o_i înmulțit cu ϵ.

Atunci, în primă aproximație, au loc relațiile

$$\begin{aligned} d &= v'(0) - (r(0) + Lr'(0)/2), \\ c &= -6((v'(0) - r(0))/L + 3v''(0) - 2(1 + a/2L)r'(0)), \\ \vartheta &= o_i', \\ \varepsilon &= Lu'(0)/l - a\left(e(0) + \frac{L}{2}e'(0)\right)/l = h^2(\vartheta + 2me\,0))/Kl. \end{aligned} \tag{19}$$

Notăm că termenii în $r'(0)$, $e'(0)$ sînt de un ordin de mărime superior și pot fi neglijați.

Trecînd la sistemul de bare cu nodurile în punctele $(x = mL)_i$, $(i = 1,2,3)$, vom nota prin M_{ij} și Q_{ij} momentele încovoietoare și forțele tăietoare (pentru $i \neq j$) avînd orientările versorilor în direcția axei Ox_i și acționînd în secțiile transversale ale barelor orientate în sensul axelor Ox_j. Presupunem dimensiuni identice ale barelor ($L_i = L$ etc.).

Scanned with OKEN Scanner

Fie atunci mărimile raportate la elementele de suprafață

$$\nu_{ii} = N_i/\mathfrak{F}, \quad \nu_{ij} = Q_{ij}/\mathfrak{F}, \quad \mu_{ii} = M_{ii}/\mathfrak{F}, \quad \mu_{ij} = M_{ij}/\mathfrak{F} \tag{20}$$

pentru

$$\mathfrak{F} = L^2. \tag{21}$$

$M_{ii} = M_{ii}$ și $N_i = Q_{ii}$ reprezintă momente de torsiune și forțe axiale în bara paralelă cu axa Ox_i.

Scriind ecuațiile de echilibru în jurul unui nod ale forțelor și momentelor avem

$$\sum_j (Q^+ - Q^-)_{ij} = 0, \quad \sum_j (M^+ - M^-)_{ij} = Le_{ijk} (Q^+ - Q^-)_{jk/2}. \tag{22}$$

S-a notat

$$f_j^{\pm} = f(x_i, x_j \pm L/2, x_k). \tag{23}$$

Vom mai considera faptul că la nod apare un cîmp spațial de lunecare astfel că, pentru $h = a$, să avem

$$Q_{(ij)} = (Q_{ij} + Q_{ji})/2 = 2\mathrm{m}\, h^2\, \mathrm{e}_{ij}, \quad i \neq j. \tag{24}$$

Relațiile (19) se vor transcrie, respectînd ipotezele admise astfel

$$d_{ij} = u_{i,j} - r_{ji}, \quad i \neq j,$$

$$d_{(ij)} = (u_{i,j} + u_{j,i} - r_{ji} - r_{ij})/2 = (l\, h^2/12\mathrm{k})2\mathrm{m}\, \mathrm{e}_{ij},$$

$$\varepsilon_{ii} = (L/l)\, u_{i,i} - (a/l)\, \mathrm{e}_{ii} = (h^2/Kl)\,(l\,\vartheta + 2\mathrm{m}\mathrm{e}_{ii})$$

$$(i \text{ fix}) \tag{25}$$

$$c_{ijj} = -\,(3u_{i,jj} - 2\,(1 + a/2\,L)\, r_{ji,j} + 6d_{ij}/L)$$

$$(i \neq j, \ j \text{ fix})$$

$$\vartheta_{ijk} = (L/2\,l)\,(r_{ij} - r_{ji})_{,k}, \ (i \neq j \neq k \neq i).$$

Scanned with OKEN Scanner

În ultima relație intervine diferența rotațiilor la nod a barelor i și j, presupusă egală cu rotația barei k $(\neq i,j)$ iar în a doua suma relațiilor la nod a barelor i și j

$$(r_{ij} - r_{ji})/2 = o_{ij}, \quad (r_{ij} + r_{ji})/2 = e_{ij} \tag{26}$$

astfel că

$$r_{ij} = e_{ij} + o_{ij}. \tag{27}$$

Din $(25)_1$ și $(25)_2$ rezultă expresiile explicitate în funcție de deplasările nodale

$$\begin{aligned} e_{ij} &= e_{ij}/(1+n), \quad i \neq j \\ e_{ii} &= \frac{(L/a)}{1+m}\,(e_{ii} - nm\Theta/(1-2n+(1+n)\,m)) \\ \varepsilon_{ii} &= \frac{L/a}{(1+m)(1+n)}(e_{ii} + n\Theta/(1-2n+(1+n)\,m)). \end{aligned} \tag{28}$$

S-a notat

$$\begin{aligned} &e_{ij} = u_{(i,j)} = \text{deformația liniilor trecînd prin noduri} \\ &\Theta = \Sigma u_{i,i}, \; n = l/2\,(l+m), \; m = 2m\,h^2/Ka = l/a\,(1+n), \\ &n = 2ml\,h^2/12k = \frac{2m}{\mathcal{E}}\frac{l}{L}\left(\frac{l}{h}\right)^2. \end{aligned} \tag{29}$$

De asemenea vom mai nota

$$\begin{aligned} &(u_{j,i} - u_{i,j})/2 = \omega_{ij} = \text{rotația liniilor trecînd prin noduri,} \\ &\Omega_{ij} = o_{ij} - \omega_{ij} = \text{rotația relativă,} \\ &\vartheta_{ijk} = (L/l)\,h_{ijk}, \; \varkappa_{ijk} = \omega_{ij,k}, \; e_{ij,k} = e_{ij,k}, \\ &h_{ijk} = o_{ij,k} = e_{ijk}\,h_k, \; (i \neq j \neq k \neq i, \; h_k = o_{k,k}), \; i \text{ fix,} \end{aligned} \tag{30}$$

(curburi).

Cu acestea, o serie de relaţii din (25) se transcriu astfel

$$d_{ij} = ne_{ij}/(1+n) + \Omega_{ij}, \quad i \neq j,$$

$$c_{iij} = 3\varkappa_{iij} - 2(1 + a/2L)\, h_{iij} - (3 - 2(1 + a/2L)/(1+n))\, e_{ij,j} - \quad (31)$$

$$- (6/L_j)(ne_{ij}/(1+n) + \Omega_{ij}), \ (i \neq j, \ j \ \text{fix}),$$

$$c_{ijk} = h_{ijk}, \ (i \neq j \neq k \neq i). \quad (32)$$

Ecuaţiile (11) şi (13) se vor înlocui conform celor de mai sus prin următoarele, presupunînd dimensiuni şi caracteristici ale barelor egale.

$$\nu_{ii} = \lambda\theta + 2\mu_1 e_{ij}, \ \nu_{ij} = 2\mu_2 e_{ij} + 2\alpha\,\Omega_{ij},$$

$$\mu_{iij} = (\mathcal{M} + \mathcal{A})\,\varkappa_{iij} + (M + A)\, h_{iij} + 2Pe_{ij,j} + \quad (33)$$

$$+ (Q + R)_j (e_{ij} + \Omega_{ij}) + (Q - R)(e_{ij} - \Omega_{ij}), \ i \neq j$$

$$\mu_{ijk} = 2M' h_{ijk} = e_{ijk}\,\mu_{kk}, \ i \neq j \neq k \neq i$$

sau

$$\mu_{kk} = 2\,M'\,h_{kk}, \ k \ \text{fix}.$$

S-au notat coeficienţii

$$\lambda = l\,(h/L)^2\,\lambda_1, \ \lambda_1 = \mu'(1 - m(1+n)/(1 - 2n + (1+n)\,m))$$

$$E' = 2m(1+n), \ \mu' = \mathcal{E}L/E'(1+m)\,a, \ \mu_1 = m\,(h/L)^2\,\mu'$$

$$2\alpha = \mathcal{E}\,(h/L)^4\,(L/l)^3, \quad \mu_2 = m\,(h/L)^2/(1+n)$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{A} = 3F/2, \ F = \mathcal{E}\,(h/L^4)\,L^4/l^2\,12, \ M = A = -(1 + a/2L)\,F, \quad (34)$$

$$2P = -(3 - 2(1 + a/2L)/(1+n))F, \ 2Q_j = -6nF/(1+n)\,L_j$$

$$2R_j = -6F/L_j, \ (L_j = L), \ 2M' = GJ/L\,l = Gh^4/6Ll.$$

În cele ce urmează vom considera cazul particular al unei structuri cu bare foarte scurte ($l < L$). Pentru aceasta vom utiliza notaţiile

$$q = h/l, \quad \epsilon = l/L \quad (35)$$

Scanned with OKEN Scanner

și vom presupune următoarele:

a) Parametrul ϵ este mic ($\ll 1$) astfel încît funcțiile care intervin în ecuații admit dezvoltări convergente de forma

$$f = \sum \epsilon^n f_n. \tag{36}$$

b) Parametrul q^2 este mult mai mare decît ϵ ($q^2 > \epsilon$).

c) Barele sînt formate din același material ca și nodurile ($E = E'$; $\nu = \nu$).

d) Coeficientul lui Poisson se va presupune, ca și în cadrul teoriilor tehnice ale barelor, neglijabil, ($\nu \ll 1$).

m, n și coeficienții (33) vor avea la rîndul lor, în primă aproximație, următoarele expresii

$$m = \epsilon,\ n = \epsilon\ 2m/\mathcal{E} q^2, \quad \mu' = 1,$$

$$\lambda = \epsilon^2 l\, q^2, \quad \mu_1 = \mu_2 = \epsilon^2 m \quad q^2 = \mu$$

$$2\alpha = \epsilon \mathcal{E} q^4,\ F = \epsilon^2 \mathcal{E} q^4 L^2/12, \tag{37}$$

$$M = A = -(3 - \epsilon) F/2, \quad \mathcal{M} = \mathcal{A} = 3F/2, \quad 2P = -\epsilon F,$$

$$2Q_j = -12 \epsilon m F/\mathcal{E} q^2 L, \quad 2R_j = -6 F/L, \quad 2M' = \epsilon F.$$

Vom observa că dezvoltările de forma (36) pentru rotațiile relative Ω și deformațiile e implică în baza ecuațiilor (32), (34) și a expresiilor (37) pentru λ, μ, α că, dacă $e_0 = 0$, atunci $\Omega_0 = 0$, $\Omega_1 = 0$ sau, în alți termeni, ordinul de mărime al deformațiilor fiind proporțional cu ϵ, ordinul de mărime al rotațiilor Ω va fi proporțional cu ϵ^2. Pe de altă parte, deoarece deformațiile au un caracter infinitesimal iar rotațiile pot fi arbitrar de mari, vom putea presupune că rotațiile o, ω sînt proporționale cu unitatea.

În consecință ecuațiile (22) și (32) se reduc la următoarele

$$\nu_{ij,j} = 0,\ \mu_{ijk,k} = \nu_{ij} - \nu_{ji},$$

$$\nu_{ij} = \delta_{ij}\ \lambda\theta + 2\mu e_{ij} + 2\alpha\Omega_{ij},\ \mu_{ijk} = 2M'\ h_{ijk},\ (i \neq j). \tag{38}$$

Așadar, pentru o structură cu bare foarte scurte, se obține, ca un caz limită, modelul mecanic cu polaritate constrînsă. În general însă, ecuațiile conduc la un model polar anizotrop fără restrîngeri. Dacă se admit alte ipoteze privind dimensiile barelor, de exemplu dacă se presupune că intervin rețele de tipul celor considerate cuplate între ele la noduri dar avînd orientări diferite se ajunge în cazul unor distribuții continui sau regulate a orientărilor, la modele izotrope.

B. Formularea problemei mediane a modelului spectral

§ 106. Problema mediană a modelului spectral polar

Vom admite existenţa următorului cîmp elastic cinematic, cîmp denumit median sau plan

$$u_3 = 0,\ o_\alpha = 0,\ u_{\alpha,3} = 0,\ o_{,3} = 0,\ (\alpha = 1,2\ ;\ o = 0_3,\ \omega = \bar{\omega}_3). \quad (1)$$

Omitem notaţia barei superioare pentru deplasări, rotaţii, deformaţii şi notaţia indicelui 0 pentru constante.

Ecuaţiile (10) şi (17) din § 102 pentru cazul static şi fără efecte termice se reduc la următoarele

$$\nu_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\,\lambda\vartheta + (\mu - \beta)\,d_{\alpha\beta} + (\mu + \beta)\,d_{\beta\alpha} = \delta_{\alpha\beta}\lambda\vartheta + 2(\mu e_{\alpha\beta} + \alpha o_{\alpha\beta} + \beta\omega_{\alpha\beta}), \quad (2)$$

$$\nu_{33} = \nu_{zz} = \lambda\vartheta,\ \mu_{3\alpha} = (M + A)\,\varkappa_\alpha,\ \mu_{\alpha 3} = [(M - A)\,o + (\mathcal{M} - \mathcal{A})\,\omega]_{,\alpha}$$

şi

$$\nu_{\alpha\beta,\beta} = X_\alpha,\ \mu_{3\beta,\beta} - e_{3\alpha\beta}\,\sigma_{\alpha\beta} = \mathcal{Y}_3, \quad (3)$$

$$d_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\,o_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta},\ \vartheta = d_{\alpha\alpha},\ \varkappa_\alpha = \left[o + \frac{\mathcal{M} + \mathcal{A}}{M + A}\,\omega\right]_{,\alpha}$$

Substituind expresiile din (2) şi (3), rezultă ecuaţiile diferenţiale

$$\begin{aligned}
&(\lambda + 2\mu)\,\vartheta_{,x} - 2\,(\mu - \beta)\,\omega_{,y} + 2\alpha o_{,y} = \mathcal{X}_x,\\
&(\lambda + 2\mu)\,\vartheta_{,y} + 2\,(\mu - \beta)\,\omega_{,x} - 2\alpha 0_{,x} = \mathcal{X}_y, \quad (4)\\
&(M + A)\,\Delta o + (\mathcal{M} + \mathcal{A})\,\Delta\omega - 4\ (\alpha o + \beta\omega) = \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_3.
\end{aligned}$$

Ansamblul ecuaţiilor (4) permite rezolvarea unor probleme la limită pentru funcţiile u_α şi o.

Notăm că în cazul problemei dinamice plane nu vom mai presupune $w = 0$, ci vom impune condiţia $w_{,z} = 0$, de unde

$$\bar{w}_{,z} = -\,\lambda\,(\bar{u}_{,x} + \bar{v}_{,y})/(\lambda + 2\mu). \quad (5)$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuirea acestei funcții în ecuațiile constrînse menține forma lor dată anterior cu deosebire că λ va trebui înlocuit în orice relație prin

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}. \tag{6}$$

Rezultă deci că $\varkappa$ se va înlocui prin

$$\varkappa = \frac{\lambda^* + 3\mu - \alpha - \beta}{\lambda^* + \mu + \alpha + \beta} = \frac{5\lambda + 2\mu - (\alpha + \beta)(\lambda + 2\mu)}{3\lambda + 2\mu + (\alpha + \beta)(\lambda + 2\mu)}. \tag{7}$$

§ 107. Condiții de compatibilitate pentru modelul spectral polar

Pentru elaborarea unor procedee de rezolvare sînt utile condițiile de compatibilitate satisfăcute de deformații, rotații și curburi. Stabilirea acestor condiții se poate face pe baza următoarelor relații

$$(e - \omega)_{\alpha\beta,\alpha} = e_{\alpha\alpha,\beta}, \tag{1}$$

$$\mathcal{H}_\alpha = (1 - km)\, o_{,\alpha} - m d^A_\alpha, \tag{2}$$

în care am notat

$$k = \frac{\alpha}{\beta},\ m = \frac{\mathcal{M} + \mathcal{A}}{M + A},\ \omega_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta 3}\ \omega,\ d^A = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta 3} d_{\alpha\beta} = \frac{d_{12} - d_{21}}{2}. \tag{3}$$

Aceste relații rezultă din (17), § 102, și (3) din § 106. Cu ajutorul relației (2) putem explicita derivatele funcției $o_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta 3}\, o$

$$-k o_{\alpha\beta,\alpha} = -k e_{\alpha\beta 3} \frac{\mathcal{H}_\alpha + m d^A_{,\alpha}}{1 - km},\ (\alpha \text{ fix}) \tag{4}$$

și deci, ținînd seama de definiția dată în (3), § 106, pentru funcția distorsiunii, avem în (1) respectiv (2) condițiile de compatibilitate

$$d_{\alpha\beta,\alpha} + \frac{k}{1 - km} e_{\alpha\beta 3} (\mathcal{H}_\alpha + m d^A_{,\alpha}) = d_{\alpha\alpha,\beta} \quad (\alpha \text{ fix} \neq \beta), \tag{5}$$

$$\mathcal{H}_{\alpha,\beta} = \mathcal{H}_{\beta,\alpha}. \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom elimina funcţiile care apar în aceste condiţii cu ajutorul ecuaţiilor constitutive (2) din § 106 puse sub formă inversă

$$d_{(\alpha\beta)} = e_{\alpha\beta} = [\nu_{(\alpha\beta)} - \nu\delta_{\alpha\beta}(\nu_{xx} + \nu_{yy})]/2\mu, \quad (\nu = \lambda/2(\lambda + \mu)),$$

$$-d^A = ko + \omega = \nu^A/2\beta, \quad (\nu^A = (\nu_{xy} - \nu_{yz})/2), \tag{7}$$

$$\mathcal{H}_\alpha = (o + m\omega)_{,\alpha} = \mu_\alpha/(M + A).$$

Se obţine sistemul diferenţial

$$[\nu_{(\alpha\beta)}/2\mu - \nu_{[\alpha\beta]}/2\beta]_{,\alpha} + \frac{k}{1 - km} e_{\alpha\beta 3}[\mu_\alpha/(M + A) - m\,\nu^A_{,\alpha}/2\beta] =$$

$$= [\nu_{\alpha\alpha} - \nu(\nu_{xx} + \nu_{yy})]_{,\beta}/2\mu, \quad (\alpha \text{ fix} \neq \beta), \quad \mu_{\alpha,\beta} = \mu_{\beta,\alpha}, \quad (\alpha \neq \beta). \tag{8}$$

Se constată că cele două ecuaţii (5) împreună cu o ecuaţie (6) şi cu cele trei ecuaţii de echilibru (3) din § 106 permit determinarea tensiunilor (ν) şi cuplelor de tensiune (μ) care formează un sistem de şase funcţii necunoscute.

§ 108. Reprezentări prin potenţiali în cadrul problemei mediane (plane) a modelului spectral polar

În cadrul unor metode de rezolvare a problemelor la limită pentru problema mediană (plană) a modelului spectral polar statică şi fără efecte de masă se utilizează următoarea reprezentare compatibilă cu ecuaţiile de echilibru din (3), § 106 :

$$\nu_{\alpha\beta} = e_{\beta\gamma}[e_{\alpha\delta}F_{,\delta\gamma} - G_{,\alpha\gamma}], \quad \mu_{3\alpha} = \mu_\alpha = G_{,\alpha} + e_{\alpha\beta}H_{,\beta}, \tag{1}$$

$$(e_{12} = -e_{21} = 1, \quad e_{11} = e_{22} = 0; \quad \alpha, \quad \beta = 1,2).$$

Pentru mai multă claritate transcriem aceste reprezentări sub formă explicită

$$\nu_{xx} = F_{,yy} - G_{,xy}, \quad \nu_{yy} = F_{,xx} + G_{,xy}, \quad \nu_{xy} = -F_{,xy} + G_{,xx}, \tag{2}$$

$$\nu_{yx} = -F_{,xy} - G_{,yy}, \quad \mu_x = G_{,x} + H_{,y}, \quad \mu_y = G_{,y} - H_{,x}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Observăm, în baza ultimei condiții din (8) de la § 107, că are loc ecuația

$$\Delta H = 0. \tag{3}$$

Prin urmare există condiția de conjugare armonică

$$H_{,\beta} = e_{\alpha\beta} G'_{,x}. \tag{4}$$

Conform (1) decurge faptul că în reprezentarea prin potențiali a cuplelor de tensiune, G' se poate îngloba în G, astfel că H se poate lua identic nul

$$H = 0. \tag{5}$$

Înlocuind în (8) din § 107, se obține sistemul

$$\begin{aligned} q(1 - h^2\Delta)\, G_{,x} + 2(1 - \nu)\, l^2\, \Delta F_{,y} &= 0, \\ q(1 - h^2\Delta)\, G_{,y} - 2(1 - \nu)\, l^2\, \Delta F_{,x} &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

în care

$$q = \frac{k}{km - 1}, \quad h^2 = \frac{M + A}{4}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{q\mu}\right). \tag{7}$$

Cu ajutorul ecuațiilor constitutive (16) din § 102 și a reprezentărilor (2) din § 68, rezultă condițiile pentru problema plană

$$\begin{aligned} &2\mu e_{xx} = F_{,yy} - G_{,xy} - \nu\Delta F, \quad 2\mu e_{yy} = F_{,xx} + G_{,xy} - \nu\Delta F, \\ &2\mu e_{xy} = -F_{,xy} + (G_{,xx} - G_{,yy})/2, \\ &4\beta(ko + \omega) = \Delta G, \quad (M + A)(o + m\omega) = G \end{aligned} \tag{8}$$

S-au utilizat notațiile din § 107. Ținînd seama de (6), rezultă prin integrarea primelor trei ecuații

$$2\mu u = -(F_{,x} + G_{,y}) + 4(1 - \nu)\, p, \quad 2\mu v = G_{,x} - F_{,y} + 4(1 - \nu) q. \tag{9}$$

Funcțiile p și q sînt armonic conjugate și satisfac ecuațiile

$$4p_{,x} = 4q_{,y} = \Delta F, \quad p_{,y} + q_{,x} = 0. \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu ajutorul ultimelor două ecuaţii din (8) rezultă reprezentările pentru rotaţii

$$4\mu l^2 o = (1 - mq + ml^2 \Delta)\ G,$$

$$\omega = -k\,(o - \Delta G/4\alpha) = (q/4\mu l^2 + k(1/\alpha - m/\mu)\,\Delta/4)\ G. \qquad (11)$$

§ 109. Formularea complexă a deplasărilor şi rotaţiilor pentru modelul spectral polar

Vom considera funcţia complexă (1) din § 51. Primele două ecuaţii din (4), § 106, se scriu astfel

$$2\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}[f - 2i\,\alpha\,\Omega] = \mathfrak{X}_x + i\,\mathfrak{X}_y = \mathfrak{X} \qquad (1)$$

în care intervin funcţiile

$$f = (\lambda + 2\mu)\,\vartheta + 2i(\mu - \alpha - \beta)\,\omega, \qquad \Omega = 0 - \omega. \qquad (2)$$

Prin integrare obţinem expresia funcţiei f:

$$f = f(\zeta) + 2i\alpha\Omega + \Xi. \qquad (3)$$

Ξ satisface ecuaţia

$$2\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \bar{\zeta}} = \mathfrak{X}. \qquad (4)$$

Aplicînd prima egalitate din (4) şi (5), rezultă condiţia

$$2\frac{\partial U}{\partial \zeta} = \vartheta + 2i\omega =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{f(\zeta) + \overline{f(\zeta)} + \Xi + \bar{\Xi}}{\lambda + 2\mu} + \frac{f(\zeta) + \Xi - \overline{f(\zeta)} - \bar{\Xi} + 4i\alpha\Omega}{\mu - \alpha - \beta}\right] \qquad (5)$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci, prin integrare, rezultă formula de reprezentare pentru deplasare și implicit pentru dilatare și rotație

$$2(\mu - \alpha - \beta)\, U = \varkappa\varphi(\zeta) - \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} + 8i\alpha\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\bar{\zeta}}, \tag{6}$$

$$2(\mu - \alpha - \beta)\frac{\partial U}{\partial\zeta} = (\mu - \alpha - \beta)(\vartheta + 2i\omega) =$$

$$= \varkappa\varphi'(\zeta) - \overline{\varphi'(\zeta)} + 2i\alpha\,\Delta\mathfrak{M}. \tag{7}$$

Au intervenit notațiile

$$\varphi'(\zeta) = f(\zeta)/(\varkappa + 1), \tag{8}$$

$$\varkappa = (\lambda + 3\mu - \alpha - \beta)/(\lambda + \mu + \alpha + \beta). \tag{9}$$

Funcția $\mathfrak{M}$ satisface ecuația

$$\Delta\mathfrak{M} = \Omega - (\varkappa\Xi - \bar{\Xi})/2i\alpha(\varkappa + 1)$$

sau

$$\Omega = \mathrm{Re}[\Delta\mathfrak{M} + (\varkappa\Xi - \bar{\Xi})/2i\alpha(\varkappa + 1)]. \tag{10}$$

Se constată că funcția $\mathfrak{M}$ este reală în cazul problemei omogene, pentru care $\Xi = 0$.

Ultima ecuație din (4), § 106, în care eliminăm funcțiile ω și o din (7) și (10), se scrie astfel:

$$\frac{4\alpha\mu}{\mu - \alpha - \beta}(h^2\Delta - 1)\,\Delta\,\mathrm{Re}\,\mathfrak{M} =$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)(\varkappa + 1)}{i(\mu - \alpha - \beta)}(\varphi'(\zeta) - \overline{\varphi'(\zeta)}) + \mathfrak{y}^*, \tag{11}$$

în care

$$h^2 = \frac{M + A}{4}\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{km - 1}{k\mu}\right],$$

$$\mathfrak{y}^* = \mathfrak{y} - \frac{M + A}{\varkappa + 1}\left(\Delta - \frac{4\alpha}{M + A}\right)\mathrm{Re}\frac{\varkappa\Xi - \bar{\Xi}}{2i\alpha}. \tag{12}$$

Cu ajutorul reprezentărilor (6), (10) și ecuației (11), se pot stabili soluții ale problemei mediane. Astfel (11) admite soluția

$$\mathfrak{M} = K(\bar{\zeta}\varphi(\zeta) - \zeta\overline{\varphi(\zeta)} + \mathfrak{M}_0 \tag{13}$$

în care

$$K = -\frac{\alpha+\beta}{16i\alpha\mu}(\varkappa+1) \tag{14}$$

iar $\mathfrak{M}_0$ este o soluție a ecuației (11) în care anulăm funcția $\varphi(\zeta)$.

Rezultatele obținute extind cele stabilite de autor (5], [6] și de R. D. Mindlin [2] în cadrul teoriei elasticității cu polaritate constrînsă ($o = \omega$, $\alpha = -\beta \to \infty$), precum și altele ulterioare.

§ 110. Formularea complexă a tensiunilor și cuplelor de tensiune pentru modelul spectral polar

Vom considera eforturile complexe din (1) — (3), § 52, la care adăugăm cuplul complex

$$M_z = \mu_x + i\mu_y. \tag{1}$$

Ecuațiile (2) din § 106 permit formularea relațiilor

$$\frac{\mu-\alpha-\beta}{\mu}T_{xx} = 4(\mu-\alpha-\beta)\frac{\partial U}{\partial\bar{\zeta}} =$$

$$= -2[\zeta\overline{\varphi''(\zeta)} + \overline{\psi'(\zeta)}] + 16i\alpha\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial\bar{\zeta}^2},$$

$$\frac{\mu-\alpha-\beta}{\mu}T_{xy} = \left[2(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial U}{\partial\zeta}+\frac{\partial\overline{U}}{\partial\bar{\zeta}}\right)-\right.$$

$$\left.-2(\alpha+\beta)\left(\frac{\partial U}{\partial\zeta}-\frac{\partial\overline{U}}{\partial\bar{\zeta}}\right)-4i\alpha\Omega\right]\frac{\mu-\alpha-\beta}{\mu} = 2\left\{\varepsilon\varphi'(\zeta)+\overline{\varphi'(\zeta)}-\right.$$

$$\left.-2\alpha\left[i\,\mathrm{Re}\left(\Delta\mathfrak{M}+\frac{\mu-\alpha-\beta}{\mu(\varkappa+1)}\,\frac{\varkappa\Xi-\overline{\Xi}}{2i\alpha}\right)+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\,\mathrm{Im}\,\Delta\,\mathfrak{M}\right]\right\}, \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$M_z = 2(M+A)\frac{\partial\Omega}{\partial\bar{z}} + 2(M+A+\mathfrak{M}+\mathcal{A})\frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial\overline{U}}{\partial\bar{z}}\right) =$$

$$= 2\left\{\left[M+A+(M+A+\mathcal{M}+\mathcal{A})\frac{\alpha}{\mu-\alpha-\beta}\right]\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\Delta\,\mathrm{Re}\,\mathfrak{M} -\right.$$

$$-(M+A+\mathcal{M}+\mathcal{A})\frac{\varkappa+1}{4i(\mu-\alpha-\beta)}\overline{\varphi''(z)} +$$

$$\left.+\frac{M+A}{2i\alpha(\varkappa+1)}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\mathrm{Re}\,(\varkappa\Xi-\overline{\Xi})\right\}.$$

ε este definit în (6) din § 52 şi anume este

$$\varepsilon = 1-(\alpha+\beta)(\varkappa+1)/\mu.$$

Formulele (7), (8) din § 52 au următoatele corespondenţe:

$$\frac{\mu-\alpha-\beta}{\mu}(T_x+iT_y) = -i\frac{d\mathfrak{F}}{ds} - 8i\alpha\frac{d\bar{z}}{ds}\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2}\mathrm{Im}\,\mathfrak{M} +$$

$$+2\alpha\frac{\mu-\alpha-\beta}{\mu(\varkappa+1)}\frac{(\varkappa\Xi-\overline{\Xi})}{2i\alpha} \tag{3}$$

în care

$$\mathfrak{F} = \varepsilon\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} - 8i\alpha\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\mathrm{Re}\,\mathfrak{M}. \tag{4}$$

Este de remarcat că presupunînd $\Xi = 0$, formula precedentă se reduce la următoarea

$$\frac{\mu-\alpha-\beta}{\mu}(T_x+iT_y) \equiv -i\frac{d\mathfrak{F}}{ds}. \tag{5}$$

Condiţia la limită (11)—(14) din § 52 se scrie

$$N-iT = (T_x-iT_y)\,e^{iv} = \frac{1}{2}(\overline{T}_{xy}+\overline{T}_{xx}\,e^{2iv})^{\sim} =$$

$$= \frac{\mu}{\mu-\alpha-\beta}(\mathcal{A}-e^{2iv}\mathcal{B}) \tag{6}$$

pentru

$$\mathcal{A} = \Phi(z) + \varepsilon\overline{\Phi(z)} + 2i\alpha\left[\Delta\mathfrak{M} + \frac{\mu - \alpha - \beta}{\mu(\varkappa + 1)}\,\frac{\varkappa\overline{\Xi} - \Xi}{2i\alpha}\right] -$$

$$- 2\alpha\,\frac{\lambda + \mu}{\mu}\,\mathrm{Im}\,\Delta\mathfrak{M}, \tag{7}$$

$$\mathcal{B} = \overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z) + 8i\alpha\,\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial z^2}.$$

Vom mai considera cuplul de tensiune rezultant

$$\mathfrak{Z} = \mu_x \cos\nu + \mu_y \sin\nu \tag{8}$$

care se poate reexprima cu ajutorul funcțiilor introduse în reprezentările anterioare. Astfel, dacă utilizăm derivata normală (7) din § 23 și identitățile

$$\mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} = \mathrm{d}y\,\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{d}x\,\frac{\partial}{\partial y} = 2\,\mathrm{Re}\,i\,\mathrm{d}\overline{z}\,\frac{\partial}{\partial\overline{z}} \tag{9}$$

deducem

$$\mathfrak{Z} = (M + A)\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}n} + (M + A + \mathcal{M} + \mathcal{A})\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}n} =$$

$$= -2\,\frac{M + A + \mathcal{M} + \mathcal{A}}{4(\mu - \alpha - \beta)}\,(\varkappa + 1)\,\frac{\mathrm{d}\overline{\varphi'(z)}}{\mathrm{d}s} +$$

$$+ 2\left[M + A + (M + A + \mathcal{M} + \mathcal{A})\,\frac{\alpha}{\mu - \alpha - \beta}\right]\mathrm{Re}\,i\,\frac{\mathrm{d}\overline{z}}{\mathrm{d}s}\,\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\,\mathrm{Re}\,\Delta\mathfrak{M} +$$

$$+ 2\,\frac{M + A}{\varkappa + 1}\,\mathrm{Re}\,i\,\frac{\mathrm{d}\overline{z}}{\mathrm{d}s}\,\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\,\mathrm{Re}\,\frac{\varkappa\Xi - \overline{\Xi}}{2i\alpha}. \tag{10}$$

Condiția (1) din § 53 se transcrie conform formulei (5) și în cazul în care $\Xi = 0$ astfel

$$X + iY = -i\mathfrak{F}\Big|_A^B \tag{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

Integrala din (3) și (4), § 53, se va înlocui prin următoarea :

$$\frac{\mu-\alpha-\beta}{\mu}\,\widetilde{\mathfrak{M}} = -\operatorname{Re}\int_A^B \zeta\,\frac{d\overline{\mathfrak{F}}}{ds}\,ds =$$

$$= \operatorname{Re}\{\varkappa(\zeta) - \zeta\varphi(\zeta) - \zeta\bar{\zeta}\varphi'(\zeta)\}_A^B + (\mu-\alpha-\beta)\,\mathfrak{M}/\mu \qquad (12)$$

S-a notat

$$\varkappa(\zeta) = \int \psi(\zeta)\,d\zeta \qquad (13)$$

$$\frac{\mu-\alpha-\beta}{\mu}\,\mathfrak{M} = \operatorname{Re}\left[(1-\varepsilon)\int_A^B \varphi'(\zeta)\,\bar{\zeta}\,d\zeta - 8i\alpha\int_A^B \zeta\,\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\zeta}\right]. \qquad (14)$$

Utilizînd același procedeu ca pentru stabilirea relației (5) din § 53, avem prin integrare, pe o linie închisă,

$$\frac{\mu-\alpha-\beta}{\mu}\,\mathfrak{M} = \int_D (\sigma_{xy} - \sigma_{yx})\,dxdy = \oint (\mu_x\cos\nu + \mu_y\sin\nu)\,ds \qquad (15)$$

Prin urmare $\mathfrak{M}$ reprezintă rezultanta cuplelor de tensiune aplicate pe linia închisă C.

§ 111. Corelația funcțiilor de reprezentare și de tensiune

Cu privire la reprezentările date vom aduce unele precizări privind corelația dintre funcțiile de reprezentare complexe și potențialii de tensiune și cuplele de tensiune.

Comparînd (1), (2) din § 108 și (2) din § 23 în care înlocuim σ cu ν, deducem reprezentarea

$$-\overline{T}_{xx} = 4\frac{\partial^2}{\partial\bar{\zeta}^2}(F+iG) =$$

$$= \frac{2\mu}{\mu-\alpha-\beta}\left\{\bar{\zeta}\Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta) + 8i\alpha\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial\bar{\zeta}^2}\right\},$$

$$T_{yx} = \overline{T}_{xy} = 4\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}(F+iG) = \qquad (1)$$

$$= \frac{2\mu}{\mu-\alpha-\beta}\{\overline{\varepsilon\Phi(\zeta)} + \Phi(\zeta) + 2i\alpha\Delta\mathfrak{M}\},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$M_z = 2\frac{\partial G}{\partial \zeta} = 2(M + A + \mathcal{M} + \mathcal{A})\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\frac{\varkappa + 1}{4i(\mu - \alpha - \beta)}(\Phi(\zeta) - \overline{\Phi(\zeta)}) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{m+1} + \frac{\alpha}{\mu - \alpha - \beta}\right)\Delta\mathfrak{M}\right]$$

în care $\Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta)$. S-a presupus $\Xi = 0$ şi s-au utilizat notaţiile (3) din § 107.

Se deduce

$$4(F + iG) = \frac{2\mu}{\mu - \alpha - \beta}[\bar{\zeta}\varphi(\zeta) + \varkappa(\zeta) + 8i\alpha\mathfrak{M} + \overline{f(\zeta)} + \zeta\overline{h(\zeta)}] =$$

$$= \frac{2\mu}{\mu - \alpha - \beta}[\varepsilon\zeta\overline{\varphi(\zeta)} + \bar{\zeta}\varphi(\zeta) + 8i\alpha\mathfrak{M} + g(\zeta) + \overline{j(\zeta)}], \qquad (2)$$

$$G = \frac{M + A + \mathcal{M} + \mathcal{A}}{4(\mu - \alpha - \beta)}\left[(\varkappa + 1)\,2\,\mathrm{Im}\,\Phi(\zeta) + 4\left(\frac{\mu - \alpha - \beta}{m+1} + \alpha\right)\Delta\mathfrak{M}\right].$$

$\varkappa(\zeta)$ apare în(13) din § 110 iar pentru compatibilitatea primelor două relaţii de mai sus, funcţiile $f(\zeta)$, $h(\zeta)$ şi $g(\zeta)$ satisfac condiţiile

$$k(\zeta) = \varepsilon\varphi(\zeta), \quad g(\zeta) = \varkappa(\zeta), \quad j(\zeta) = f(\zeta) \qquad (3)$$

Vom identifica funcţia $f(\zeta)$ cu $\varkappa(\zeta)$ şi vom impune condiţia ca funcţia G care apare în relaţiile (2) să fie una şi aceeaşi

$$\frac{4\alpha\mu}{\mu - \alpha - \beta}(h^2\Delta - 1)\,\mathrm{Re}\,\mathfrak{M} + \frac{M + A + \mathcal{M} + \mathcal{A}}{4i(\mu - \alpha - \beta)}(\varkappa + 1)(\varphi'(\zeta) - \overline{\varphi'(\zeta)}) =$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)(\varkappa + 1)}{4i(\mu - \alpha - \beta)}(\bar{\zeta}\varphi(\zeta) - \zeta\overline{\varphi(\zeta)}). \qquad (4)$$

Aplicînd operatorul lui Laplace, rezultă, ca o verificare, ecuaţia (11) din § 109.

Dacă utilizăm potenţialul

$$\Pi = \frac{4\alpha\mu}{\mu - \alpha - \beta}h^2\Delta\mathfrak{M} \qquad (5)$$

Scanned with OKEN Scanner

care satisface conform ecuației menționate ecuația lui Helmholtz

$$(h^2\Delta - 1)\,\Pi = 0, \tag{6}$$

reprezentările (2) din § 110 și (2) din § 53 se reduc la următoarele în coordonate carteziene și polare (vezi § 58):

$$\nu_{xx} + \nu_{yy} = \nu_{rr} + \nu_{\theta\theta} = \frac{2\mu}{\mu - \alpha - \beta}(1 + \varepsilon)\,\mathrm{Re}\,\Phi(\zeta),$$

$$\nu_{xy} - \nu_{yx} = \nu_{r\theta} - \nu_{\theta r} = \frac{\Pi}{h^2},$$

$$\nu_{rr} - i\nu_{\theta r} = \frac{\mu}{\mu - \alpha - \beta}[\Phi(\zeta) + \varepsilon\overline{\Phi(\zeta)} - e^{2i\theta}(\bar{\zeta}\Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta))] +$$

$$+\frac{i\Pi}{2h^2} - e^{2i\theta}\left[2i\frac{\partial^2\Pi}{\partial\zeta^2} + 2(\varkappa+1)\frac{M + A + \mathcal{M} + \mathcal{A}}{4(\mu - \alpha - \beta)}\Phi''(\zeta) - \right.$$

$$\left. - \frac{(\alpha+\beta)(\varkappa+1)}{2(\mu - \alpha - \beta)}\bar{\zeta}\Phi'(\zeta)\right],$$

$$\nu_{\theta\theta} - \nu_{rr} + i(\nu_{\theta r} + \nu_{r\theta}) = \frac{2e^{2i\theta}\mu}{\mu - \alpha - \beta}\left[\bar{\zeta}\Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta) + 8i\alpha\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial\zeta^2}\right], \tag{7}$$

$$\mu_r - i\mu_\theta = e^{i\theta}\overline{M}_z = 2e^{i\theta}\left[-i(\varkappa+1)\frac{M + A + \mathcal{M} + \mathcal{A}}{4(\mu - \alpha - \beta)}\Phi'(\zeta) + \frac{\partial\Pi}{\partial\zeta}\right],$$

$$u_r - iu_\theta = e^{i\theta}\overline{U} = \frac{e^{i\theta}}{2(\mu - \alpha - \beta)}\left[\varkappa\overline{\varphi(\zeta)} - \bar{\zeta}\Phi(\zeta) - \Psi(\zeta) - \right.$$

$$- \frac{\mu - \alpha - \beta}{\mu}2i\frac{\partial\Pi}{\partial\zeta} - \frac{M + A + \mathcal{M} + \mathcal{A}}{4\mu}2(\varkappa+1)\Phi'(\zeta) -$$

$$\left. - \frac{(\alpha+\beta)(\varkappa+1)}{2\mu}(\bar{\zeta}\Phi(\zeta) - \overline{\Psi(\zeta)})\right],$$

$$\omega_{r\theta} = \omega = \left[\left(\frac{l_1}{h}\right)^2\Pi + 2(\varkappa+1)\frac{l^2\mu}{\mu - \alpha - \beta}\,\mathrm{Im}\,\Phi(\zeta)\right]/(M + A),$$

$$\Omega_{r\theta} = \Omega = \Delta\mathfrak{M} = \frac{\mu - \alpha - \beta}{4\alpha\mu h^2}\Pi.$$

Scanned with OKEN Scanner

Am utilizat ecuaţia (4). Formulele (6) şi (10) din § 110 se transcriu în funcţie de Π astfel

$$\frac{\mu-\alpha-\beta}{\mu}(N-iT)=\Phi(z)+\varepsilon\overline{\Phi(z)}+i\frac{\mu-\alpha-\beta}{\mu}\frac{\Pi}{2h^2}-$$

$$-e^{2i\theta}\left\{\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)+2\left[\frac{\mu-\alpha-\beta}{\mu}i\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\varkappa+1)\left[(m+1)\,l^2\Phi''(z)-\frac{(\alpha+\beta)}{4\mu}\bar{z}\Phi'(z)\right]\right]\right\}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{Z}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left[\Pi+2(\varkappa+1)\frac{\mu l^2}{\mu-\alpha-\beta}\operatorname{Im}\Phi(z)\right],$$

$$M_z=\frac{2i\mu l^2}{\mu-\alpha-\beta}(m+1)(\varkappa+1)\overline{\Phi'(z)}+2\frac{\partial\Pi}{\partial\bar{z}}.$$

Observăm că

$$\varkappa+1=4(1-\nu) \qquad \text{în cazul deformaţiei plane}$$

$$\varkappa+1=2(1-2\nu)/(1-\nu) \qquad \text{în cazul cîmpului plan de tensiune.} \tag{9}$$

Remarcăm că atît în cazul modelului spectral neomogen cît şi în cazul modelului cu polaritate restrînsă, avem, conform definiţiilor (25) din § 102 şi relaţiilor (16) din acelaşi paragraf,

$$\alpha=-\beta, \qquad k=-1. \tag{10}$$

C. Studiul concentrării tensiunilor în jurul golurilor din plăcile cu neomogeneitate structurală

§ 112. Placă plană cu gol circular

Vom considera o placă plană cu gol circular şi vom considera condiţiile de uniformitate a deplasărilor satisfăcute de funcţiile de variabilă complexă care intervin atît în teoria mediului omogen conform relaţiilor (11) din § 55, cît şi în teoria mediului neomogen. Dezvoltările asociate ale funcţiilor de variabilă complexă apar în relaţiile (4)—(9) din § 55.

Condițiile (17) din § 56 și (3) din § 64, în care înlocuim β prin $\alpha + \beta$ se scriu din nou astfel

$$\Phi_0 = \Gamma = B = \varepsilon_1(N_1 + N_2)/4, \quad C = 0,$$

$$\Psi_0 = \Gamma' = B' + iC' = (N_2 - N_1)\, e^{-2i\theta/2},$$

$$\Phi_1 = -\frac{X + iY}{2\pi(\varkappa + 1)}, \quad \Psi_1 = \frac{\varkappa(X - iY)}{2\pi(\varkappa + 1)}, \tag{1}$$

$$\left(\varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\varkappa + 1 + 2\nu}{(\varkappa+1)(1+\nu)} = 1 - \right.$$

$$\left. - \frac{\nu(\varkappa - 1)}{(\varkappa + 1)(1 + \nu)}, \right. \text{ sau 1 în cadru probemei strict plane.}$$

În ceea ce privește potențialul Π care satisface ecuația (6) din § 111, îl vom dezvolta în serie Bessel-Fourier. Pentru aceasta vom utiliza coordonatele polare $r = |\zeta| = x/\cos\theta = y/\sin\theta$, $\theta = \arg\zeta$ și vom exprima operatorul lui Laplace Δ astfel

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \tag{2}$$

Soluția ecuației menționate se scrie — vezi G. Savin [5] și I. Nemîș [1] — sub forma

$$\Pi = c_0 K_0\left(\frac{r}{h}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta)\, K_n\left(\frac{r}{h}\right), \tag{3}$$

în care K_n sînt funcțiile lui Bessel modificate de speța doi, funcții care se mai denumesc ale lui Mac Donald și care satisfac ecuațiile

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{h^2} - \frac{n^2}{r^2}\right) K_n\left(\frac{r}{h}\right) = 0. \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

c și d sînt coeficienți constanți. Funcțiile introduse satisfac relațiile de recurență*)

$$-2K_n'(x) = K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x),\quad K_0'(x) = -K_1(x),$$
$$K_{-n}(x) = K_n(x),\ K_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}K_n(x) + K_{n-1}(x). \tag{5}$$

Vom utiliza de asemenea relațiile

$$\frac{\partial r}{\partial \bar{z}} = \frac{e^{i\theta}}{2},\ \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}} = \frac{ie^{i\theta}}{2r},\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{e^{i\theta}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right). \tag{6}$$

În vederea formulării problemelor la limită, vom considera următoarele dezvoltări ale tensiunilor complexe și cuplelor de tensiune pe conturul $r = R$ al golului circular

$$N - iT = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\vartheta},$$
$$\mathfrak{Z} = B_0 + \sum_{n-1}^{\infty}(B_n e^{in\theta} + \overline{B}_n e^{-in\theta}),\ (B = B_0) \tag{7}$$

pe care le vom introduce în condițiile la limită din (8) de la § 111, pentru $N - iT$ și $\mathfrak{Z}$. Admitem totodată condițiile (10) din același paragraf.

Se deduce astfel sistemul de ecuații (în care, deoarece presupunem $\alpha + \beta = 0$, luăm $\varepsilon = 1$):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+1)\left[1 - 2(m+1)(\varkappa+1)n\left(\frac{l}{R}\right)^2\right]\Phi_n R^{-n} e^{-in\theta} + \right.$$
$$\left. + \varepsilon\Phi_n R^{-n} e^{in\theta} - \Psi_n R^{-n} e^{-i(n-2)\theta}\right\} + \frac{1}{4h^2}\left\{2ic_0\left[K_0\left(\frac{R}{h}\right) - K_2\left(\frac{R}{h}\right)\right] + \right.$$
$$+ i\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left\{\left[K_n\left(\frac{R}{h}\right) - K_{n-2}\left(\frac{R}{h}\right)\right]e^{in\theta} + \left[K_n\left(\frac{R}{h}\right) - K_{n+2}\left(\frac{R}{h}\right)\right]e^{-in\theta}\right\} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} d_n\left\{\left[K_n\left(\frac{R}{h}\right) - K_{n-2}\left(\frac{R}{h}\right)\right]e^{in\theta} - \left[K_n\left(\frac{R}{h}\right) - K_{n+2}\left(\frac{R}{h}\right)\right]e^{-in\theta}\right\} = \sum_{n=+\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta} \tag{8}$$

*) Vezi de exemplu I. N. Vekua [1].

Scanned with OKEN Scanner

$$\operatorname{Re}\left\{2i(\varkappa+1)\,l^2\sum_{n=1}^{\infty} n\,\Phi_n R^{-(n+1)}\,e^{-in\theta} - \frac{1}{h}\,c_0 K_1\left(\frac{R}{h}\right) - \right.$$

$$-\frac{1}{2h}\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left[K_{n-1}\left(\frac{R}{h}\right)e^{in\theta} + K_{n+1}\left(\frac{R}{h}\right)e^{-in\theta}\right] +$$

$$\left. +\frac{i}{2h}\sum_{n=1}^{\infty} d_n\left[K_{n-1}\left(\frac{R}{h}\right)e^{in\theta} - K_{n+1}\left(\frac{R}{h}\right)e^{-in\theta}\right]\right\} = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(B_n e^{in\theta} + \overline{B}_n e^{-in\theta}). \tag{9}$$

Echivalînd coeficienţii exponenţialelor care apar în (8), rezultă sistemul

$$\Phi_0 + \overline{\Phi}_0 - \Psi_2 R^{-2} + \frac{ic_0}{2h^2}\left[K_0\left(\frac{R}{h}\right) - K_2\left(\frac{R}{h}\right)\right] = A_0,$$

$$\overline{\Phi}_1 - \Psi_1 = A_1 R,\quad \overline{\Phi}_2 R^{-2} - \Psi_0 + \frac{ic_2 + d_2}{4h^2}\left[K_2\left(\frac{R}{h}\right) - K_0\left(\frac{R}{h}\right)\right] = A_2,$$

$$\overline{\Phi}_n R^{-n} + \frac{ic_n + d_n}{4h^2}\left[K_n\left(\frac{R}{h}\right) - K_{n-2}\left(\frac{R}{h}\right)\right] = A_n,\ n \geqslant 3, \tag{10}$$

$$(n+1)\left[1 - 2(m+1)(\varkappa+1)\,n\left(\frac{l}{R}\right)^2\right]\Phi_n R^{-n} - \Psi_{n+2} R^{-n-2} +$$

$$+\frac{ic_n - d_n}{4h^2}\left[K_n\left(\frac{R}{h}\right) - K_{n+2}\left(\frac{R}{h}\right)\right] = A_n,\ n \geqslant 1.$$

Separînd coeficienţii în părţi reale şi imaginare,

$$\Phi_n = \Phi_n' + i\Phi_n'',\ B_n = B_n' + iB_n'',\ A_n = A_n' + iA_n'' \tag{11}$$

obţinem din (9), în urma egalării coeficienţilor funcţiilor sin şi cos, condiţiile

$$-\frac{c_0}{h}K_1\left(\frac{R}{h}\right) = B_0,$$

$$2(\varkappa+1)\,l_n^2\Phi_n' R^{-(n+1)} - \frac{d_n}{2h}\left[K_{n-1}\left(\frac{R}{h}\right) + K_{n+1}\left(\frac{R}{h}\right)\right] = -2B_n'',\quad n \geqslant 1,$$

$$-2(\varkappa+1)\,l^2 n\Phi_n'' R^{-(n+1)} - \frac{c_n}{2h}\left[K_{n-1}\left(\frac{R}{h}\right) + K_{n+1}\left(\frac{R}{h}\right)\right] = 2B_n',\quad n \geqslant 1. \tag{12}$$

Scanned with OKEN Scanner

Sistemele obţinute se reduc în cazul mediului cu polaritate constrînsă la cele utilizate de Iu. N. Nemîş [1], [2]. Utilizarea dezvoltărilor de forma (3) şi (7) şi reducerea la sistemele expuse au fost efectuate anterior de R. D. Mindlin [1]—[4] şi de autor [4], [6].

§ 113. Soluţii particulare pentru planul cu gol circular

a) În cazul unui contur al golului nesolicitat şi pentru o tracţiune unidirecţională la infinit

$$\nu_{xx}(\infty) = P(=N_1), \quad \nu_{yy}(\infty) = \nu_{xy}(\infty) = \nu_{yx}(\infty) = 0 \tag{1}$$

vor avea loc, conform condiţiilor de compatibilitate (8) din § 107 şi condiţiile la infinit,

$$\mu_x = \mu_y = 0. \tag{2}$$

Condiţiile (1) din § 112 în care luăm $\theta = 0$, ne arată că

$$\Phi_0 = \varepsilon_1 P/4, \quad \Psi_0 = -P/2. \tag{3}$$

Deoarece pe conturul golului $N = T = 0$ şi $\mathfrak{Z} = 0$, condiţiile (7) din § 112 ne arată că toţi coeficienţii A şi B sînt nuli.

În cazul mediului neomogen structural, P este amplitudinea maximă a unei încărcări periodice iar deplasările sînt date de $(11)_2$ din § 180. Pentru $u_i^0 = 0$, avem deci $\bar{u}_i = u_i$. Pentru mediul cu polaritate restrînsă, P este efectiv o secţiune constantă iar deplasările u sînt de asemenea cele efective.

Rezolvarea sistemului format de ecuaţiile (1), (10) şi (12) conduce la următoarele expresii ale celorlalţi coeficienţi

$$c_0 = 0, \ \Psi_2'' = 0, \ \Psi_2' = \varepsilon_1 PR^2/2, \ \Phi_1 = \Psi_1 = 0,$$

$$c_1 = d_1 = 0, \ \Phi_2' = -PR^2/2(F_1+1), \ F_1 = F(l/h)^2,$$

$$F = 2(\varkappa+1)/[4+(R/h)^2 + 2R\,K_0(R/h)/h\,K_1(R/h)], \tag{4}$$

$$d_2 = -PRhF_1/(F_1+1)\,K_1(R/h),$$

$$\Psi_4' = \frac{3PR^4}{2(F_1+1)}\left\{\left[m+1+m\frac{K_3(R/h)}{K_1(R/h)}\right]F_1+1\right\}.$$

Restul coeficienților sînt nuli.

Pe conturul golului, tensiunile și cuplele de tensiune iau următoarele valori, date de relațiile (7) din § 111 :

$$\nu_{rr} = \nu_{\theta r} = 0, \quad \mu_r = 0, \quad \nu_{\theta\theta} = \varepsilon_1 P - \frac{2P}{F_1 + 1} \cos 2\theta. \tag{5}$$

Valoarea maximă are loc în dreptul diametrului golului transversal direcției tracțiunii la infinit

$$\nu_{\theta\theta\,\max} = \frac{\varepsilon_1(F_1 + 1) + 2}{F_1 + 1,}, \left(\theta = \frac{\pi}{2}\right). \tag{6}$$

Pentru $h = l$, $\alpha \to \infty$, rezultatele coincid cu cele stabilite de Iu. Nemîș [1], [2], iar dacă se face aproximația $\varepsilon_1 = 1$ și se ia $m = 0$, rezultatele coincid cu cele stabilite pe o cale diferită de către V. A. Palmov [2].

b) În cazul încovoierii simple a plăcii plane infinite cu gol circular — vezi figura 114 — avînd conturul liber, au loc condițiile la infinit

$$\nu_{xx} = Py, \quad \nu_{yy} = \nu_{xy} = \nu_{yx} = 0 \tag{7}$$

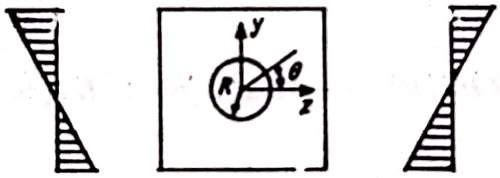


Fig. 114

și deci, conform (8) din § 107, la infinit apar cuplele de tensiune

$$\mu_x = -2(1 + m)(1 - \nu)\, l^2 P, \quad \mu_y = 0. \tag{8}$$

Remarcăm că din (2), § 108, mai rezultă potențialii

$$F(x, y) = \frac{Py^3}{6}, \quad G = -2(1 + m)(1 - \nu)\, l^2 Ph^2 x. \tag{9}$$

Condiția primă din (7), de la § 111, ne arată că $\Phi(\zeta)$ include și termeni cu indici n negativi. Astfel, conform (7), deducem, în general,

$$\Phi''_{-1} = -\Psi''_{-1} = -P/4. \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom completa sumele care apar în (8) din § 112, relative la funcțiile Φ și Ψ cu termeni corespunzători valorilor negative ale lui n, astfel că sistemele (10) și (12) din același paragraf completate cu termeni adiționali vor furniza expresiile coeficienților

$$C_1 = C_{-1} = -\frac{(\varkappa+1)\, l^2 h\, P}{2K_1(R/h)\, F_4},\quad F_4 = \frac{h}{R} + \frac{K_0(R/h)}{K_1(R/h)},$$
$$\Psi_3 = -\frac{PR^4}{4} + \frac{\varkappa+1}{2}\,\frac{l^2}{K_1\left(\frac{R}{h}\right)}\left(1+\frac{h}{RF_4}\right)P. \tag{11}$$

De asemenea, din ecuațiile completate de forma celor din (10) de la § 112, sau (12) de la același paragraf, rezultă sistemul corespunzător valorilor $n = -3$;

$$-\Phi_3''/R^3 - \Psi_{-1}''\,R + c_3[K_3(R/h) - K_1(R/h)]/4h^2 = 0$$
$$4[1-6(m+1)(\varkappa+1)(l/R)^2]\Phi_3''/R^3 + c_3[K_3(R/h) - K_5(R/h)]/4h^2 = \Psi_5''/R^5,$$
$$-6(\varkappa+1)\, l^2\Phi_3''/R^4 - c_3[K_2(R/h) + K_4(R/h)]/2h = 0, \tag{12}$$

a cărui rezolvare dă

$$c_3 = \frac{3(\varkappa+1)\, hl^2 P}{2K_2(R/h)\,(F_2+F_3)},\quad \Phi_3'' = -\frac{PR^4 F_2}{4(F_2+F_3)},$$
$$\Psi_5'' = -\frac{PR^6}{F_2+F_3}\left[F_2 - \frac{F_3}{2} - mF_2F_3\right]. \tag{13}$$

S-a notat

$$F_2 = 1 + 3\left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{8 + \left(\frac{R}{h}\right)^2 + 4\,\frac{R}{h}\,\frac{K_0(R/h)}{K_1(R/h)}}{2 + \frac{R}{h}\,\frac{K_0(R/h)}{K_1(R/h)}},\quad F_3 = 6(\varkappa+1)\left(\frac{l}{R}\right)^2. \tag{14}$$

Scanned with OKEN Scanner

În definitiv, funcțiile de reprezentare au, conform celor precedente, următoarea formă :

$$\Phi(\zeta) = i\left(-\frac{P}{4}\zeta + \frac{\Phi_3''}{\zeta^3}\right), \quad \Psi(\zeta) = i\left(\frac{P}{4}\zeta + \frac{\Psi_3''}{\zeta^3} + \frac{\Psi_5''}{\zeta^5}\right),$$

$$\Pi_1 = c_1 K_1\left(\frac{r}{h}\right)\cos\theta + c_3 K_3\left(\frac{r}{h}\right)\cos 3\theta. \tag{15}$$

Aplicînd (7) din § 111, obținem expresiile tensiunilor și cuplelor de tensiune

$$\nu_{rr} + \nu_{\theta\theta} = 4\left[\frac{P}{4} r\sin\theta + \frac{\Phi_3''}{r^3}\right],$$

$$\nu_{r\theta} - \nu_{\theta r} = \frac{1}{h^2}\left[c_1 K_1\left(\frac{r}{h}\right)\cos\theta + c_3 K_3\left(\frac{r}{h}\right)\cos 3\theta\right],$$

$$\mu_r - i\mu_0 = -2(\varkappa+1) l^2\left[\frac{P}{4} e^{i\theta} + \frac{3\Psi_3''}{r^4} e^{-3i\theta}\right] -$$

$$-\frac{1}{2h}\left[c_1\left(e^{i\theta} K_0\left(\frac{r}{h}\right) + e^{-i\theta} K_2\left(\frac{r}{h}\right)\right) + c_3\left(e^{3i\theta} K_2\left(\frac{r}{h}\right) + e^{-3i\theta} K_4\left(\frac{r}{h}\right)\right)\right],$$

$$\nu_{\theta\theta} - \nu_{rr} + i(\nu_{\theta r} + \nu_{r\theta}) = 2i\left[\frac{p_r}{4}(e^{3i\theta} - e^{i\theta}) + \frac{\Psi_3'''}{r} e^{-i\theta} +\right.$$

$$+\left(-\frac{3\Phi_3''}{r^3} + \frac{24(m+1)(\varkappa+1)}{r^5} l^2\Phi_3'' + \frac{\Psi_5''}{r^5}\right) e^{-3i\theta} +$$

$$\left. + \frac{c_1}{4h^2}\left[K_1\left(\frac{r}{h}\right) e^{i\theta} + K_3\left(\frac{r}{h}\right) e^{-i\theta}\right] + \frac{c_3}{4h^2}\left[K_1\left(\frac{r}{h}\right) e^{3i\theta} + K_5\left(\frac{r}{h}\right) e^{-3i\theta}\right]\right]. \tag{16}$$

Am utilizat ecuația (4) din § 111.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $r = R$ şi $\theta = \pi/2$, deducem valorile maxime pe conturul golului

$$\sigma_{00} = PR(2 - F_3/(F_2 + F_3)),$$

$$\mu_0 = (\varkappa + 1)\frac{l^2}{2}\left(1 + \frac{h}{RF_4} - \frac{3}{F_2 + F_3}\right). \tag{17}$$

Pentru $m = 0$, $h = l$, se obţin rezultatele stabilite de Iu. Nemîş [1], [2], în cazul mediului cu polaritate constrînsă. Ulterior acestuia, R. Huilgol [1] a reluat aceleaşi aspecte în cazul menţionat. Rezultatele corespunzătoare teoriei clasice a elasticităţii pot fi obţinute luînd în formule:

$$\lim_{r/h\to\infty} \frac{K_0(r/h)}{K_1(r/h)} = 1. \tag{18}$$

§ 114. Încovoierea consolei cu slăbire circulară

Soluţia problemei încovoierii consolei (fig. 115), supuse unei forţe tăietoare P, poate fi stabilită în modul următor:

Presupunem că golul are centrul situat pe axa mediană a consolei şi este mărginit de un cerc cu raza R. d reprezintă lungimea consolei,

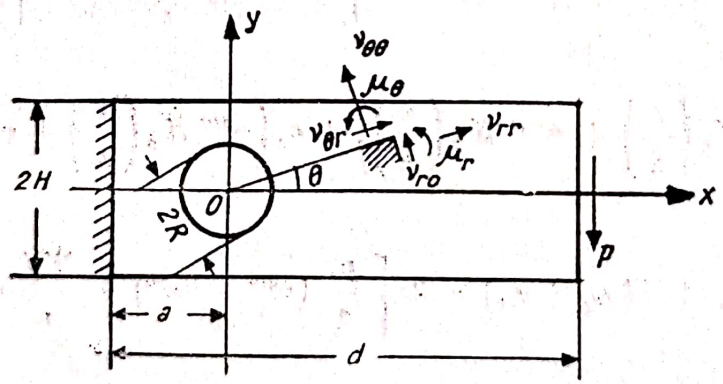


Fig. 115

a distanţa de la zona de încastrare, iar H înălţimea. Vom considera, în vederea rezolvării problemei încovoierii, soluţia parţială care corespunde cîmpului de tensiune

$$\nu^0_{xx} = (A + Bx)\,y,\ \nu^0_{yy} = 0,\ \nu^0_{xy} = \nu^0_{yx} = -By^2/2 - E',$$

$$\mu^0_x = -\frac{\varkappa + 1}{2}h^2(A + Bx),\ \mu^0_y = \frac{\varkappa + 1}{2}h^2 By \tag{1}$$

Scanned with OKEN Scanner

relativă la un mediu cu polaritate constrînsă pentru care au loc condițiile $h = l$, $m = 0$ și $\alpha \to \infty$.

Această stare verifică ecuațiile de echilibru ale problemei plane din (3), § 106, care în cazul de față se scriu astfel

$$\frac{\partial \nu^0_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \nu^0_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \nu^0_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \nu^0_{yy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mu^0_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu^0_y}{\partial y} = \nu^0_{xy} - \nu^0_{yx}, \tag{2}$$

și condițiile de compatibilitate (8) din § 107.

Vom observa că dacă în expresiile tensiunilor și cuplelor de tensiune (1) constantele au semnificația următoare

$$A = \frac{P(d-a)}{I}, \quad B = -\frac{P}{I}, \quad E' = \frac{PH^2}{2EI} \tag{3}$$

$I = 2H^3/3$ fiind momentul de inerție al secției transversale a consolei de lățime egală cu unitatea, atunci sînt verificate condițiile la limită:

— pe conturul $x = d - a$

$$\sigma^0_{xx} = 0, \qquad \int \sigma^0_{yx}\, dy = -P, \qquad \mu^0_x = 0; \tag{4}$$

— pe conturul $y = \pm h$ condițiile

$$\sigma^0_{yx} = 0, \qquad \mu^0_y = \pm \frac{\varkappa + 1}{2} l^2 \frac{P}{I} H. \tag{5}$$

Se mai constată că, dacă

$$\frac{l^2 H}{I} << 1, \tag{6}$$

atunci valorile pe conturul superior și inferior ale cuplelor de tensiune sînt foarte mici față de cele ale tensiunilor pe conturul de capăt. Pentru acest motiv vor fi neglijate în cele ce urmează.

Scanned with OKEN Scanner

Funcţiile de reprezentare corespunzătoare cîmpului de tensiune (1) se determină cu ajutorul relaţiilor (7) din § 111;

$$\Phi(\zeta) = -\frac{i}{8}(2A\zeta + B\zeta^2), \qquad \Psi(\zeta) = \frac{i}{4}(A\zeta + B\zeta^2 - 4E'),$$

$$\varphi(\zeta) = -\frac{i}{24}(3A\zeta^2 + B\zeta^3), \qquad \pi = 0, \tag{7}$$

$$\psi(\zeta) = \frac{i}{24}(3A\zeta^2 + 2B\zeta^3 - 24E\zeta).$$

Vom considera apoi funcţiile totale de reprezentare

$$\varphi(\zeta) = \varphi^0(\zeta) + i\sum_{n=1}^{3} a_n \zeta^{-n},$$

$$\psi(\zeta) = \psi^0(\zeta) + i\left(b_0 + \sum_{n=2}^{5} b_n \zeta^{-n}\right), \tag{8}$$

$$\pi = \sum_{n=1}^{4} c_n K_n\left(\frac{r}{l}\right)\cos n\theta.$$

şi vom presupune conturul golului nesolicitat ($M = 0$, $N = T = 0$). Utilizarea condiţiilor la limită (8) din § 111 permite determinarea constantelor a_n şi b_n. Aceste constante au fost determinate de către Iu. N. Nemiş şi V. P. Tretiak [1] în cazul mediului cu rotaţii constrînse (pentru care $h = l$); expresia acestora este următoarea

$$a_1 = -\frac{BR^4[1 + (1 + 2t)\,Q_3] + 8E'R^2(1 + Q_3)}{8(1 + 2\,t + Q_3)},$$

$$a_2 = \frac{AR^4(Q_2 + Q_4)}{8[(1+6t)\,Q_2 + Q_4]}, \qquad a_3 = \frac{BR^6(Q_3 + Q_5)}{12[(1 + 2t)\,Q_3 + Q_5]},$$

$$b_0 = 0, \qquad b_2 = -\frac{AR^4}{8}\,\frac{Q_1 + (1 + 2t)Q_2}{Q_1 + Q_2},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$b_3 = -\frac{BR^6}{24} + R^2(1-2t)\,a_1 + \frac{R^3}{2l}Q_3K_1\left(\frac{R}{l}\right)c_2,$$

$$b_4 = \frac{AR^6}{4}\,\frac{(1-3t)\,Q_2+Q_4}{(1+6t)\,Q_2+Q_4}, \qquad b_5 = \frac{BR^8}{4}\,\frac{(1-4t)Q_3+Q_5}{(1+12t)\,Q_3+Q_5} \tag{9}$$

$$c_1 = -\frac{AR^2lt}{2K_1\left(\frac{R}{l}\right)(Q_1+Q_2)}, \qquad c_2 = -\frac{Rlt[BR^2(1+t)+4E']}{K_1\left(\frac{R}{l}\right)(1+2t+Q_3)},$$

$$t = 2(\varkappa+1)\,(l/R)^2, \quad Q_1 = K_0(R/l)/K_1(R/l),$$

$$Q_n = K_n(R/l)/K_1(R/l), \quad (n=2,3,4,5,)$$

În cazul unui gol circular avînd o incluziune rigidă, de exemplu un inel circular rigid, vom avea pe conturul său condițiile $u = v = 0$, $\omega=0$. Acest caz corespunde soluțiilor determinate în lucrarea menționată mai înainte

$$a_1 = -\frac{R^2}{8}\,\frac{BR^3t + 2l[BR^2(1+2t)+8E]\,Q_2}{Rt - 2\varkappa lQ_2},$$

$$a_2 = \frac{AR^4lQ_3}{B(R+Q_2-\varkappa lQ_3)}, \qquad a_3 = \frac{BR^6lQ_4}{6(3RtQ_3-2\varkappa lQ_4)},$$

$$b_0 = \frac{AR^2}{4}\left(1+t+\frac{Rt}{2l}Q_1\right), \qquad b_2 = \frac{AR^4}{8l}(\varkappa l + RtQ_2),$$

$$b_n = \frac{\chi BR^{2n}}{24\delta_n} + (n-2)\,R^2[1-(n-1)\,t]\,a_{n-2} + \tag{10}$$

$$+\frac{R^nQ_n}{2l}K_1\left(\frac{R}{l}\right)c_{n-1}, \qquad \left(n=3,4,5\,;\ \delta_n = \begin{cases}1, & n=3\\ 0, & n=4,5\end{cases}\right),$$

$$c_1 = \frac{AR^3t}{4K_1\left(\frac{R}{l}\right)}, \qquad c_2 = -\frac{R^2lt}{4K_1\left(\frac{R}{l}\right)}\,\frac{BR^2(1+\varkappa+2t)+8E}{Rt-2\varkappa lQ_2},$$

$$c_3 = \frac{AR^3lt}{4K_1\left(\frac{R}{l}\right)(RtQ_2-\varkappa lQ_3)},$$

$$c_4 = \frac{BR^4lt}{2K_1(R/l)\,(3RtQ_3-2\varkappa lQ_4)}.$$

Tensiunile și cuplele de tensiune pot fi calculate cu ajutorul relațiilor (7) din § 111. Astfel, în dreptul conturului golului, avem, corespunzător soluției (9),

$$\nu_{\theta\theta} = AR \sin\theta + (3R^2/2 - 4a_1/R) \sin 2\theta - $$

$$- 8a_2 \sin 3\theta/R^3 - 12a_3 \sin 4\theta/R^4. \tag{11}$$

Totodată relațiile (10) conduc la expresia

$$\nu_{\theta\theta} = \frac{3-\varkappa}{4}\left[AR \sin\theta + \left(\frac{BR^2}{2} - \frac{4a_1}{R^2}\right)\sin 2\theta - \right.$$

$$\left. - \frac{8a_2}{R^3}\sin 3\theta - \frac{12a_3}{R^4}\sin 4\theta\right], \tag{12}$$

$$\nu_{rr} = \frac{\varkappa+1}{3-\varkappa}\,\nu_{\theta\theta}\,.$$

Rezultatele corespunzătoare teoriei clasice a elasticității pot fi obținute din cele de mai sus observînd că pentru

$$R/l \to \infty \qquad \text{avem} \qquad \lim Q_n = 1, \ (n = 1, 2, \ldots, 5).$$

Precizăm că soluția dată nu este exactă deoarece condițiile pe conturul exterior al consolei nu sînt satisfăcute exact, apărînd diferențe ce scad înspre conturul golului.

§ 115. Gol circular rigidizat de inele concentrice elastice

Fie un gol circular mărginit de s inele circulare din materiale diferite cu polaritate constrînsă ($h = l$, $m = 0$, $\alpha \to \infty$) incluse într-o placă infinită elastică (fig. 116).

Fie R raza inelului cel mai mare iar R_j, R_{j+1} raza interioară și exterioară a inelului I_j.

Vom avea de considerat următoarele condiții la limită

$$\mu_r^{(1)} = M, \quad \nu_{rr}^{(1)} - i\nu_{r\theta}^{(1)} = N - iT \quad \text{(pe conturul } L_1 \text{ al inelului } I_1) \tag{a}$$

$$\mu_r^{(j-1)} = \mu_r^{(j)}, \quad \nu_{rr}^{(j-1)} - i\nu_{r\theta}^{(j-1)} = \nu_{rr}^{(j)} - i\nu_{r\theta}^{(j)}, \tag{b}$$

$$\omega^{(j-1)} = \omega^{(j)}, \quad u_r^{(j-1)} - iu_\theta^{(j-1)} = u_r^{(j)} - iu_\theta^{(j)}, \quad \text{(pe conturul } L_j) \tag{1}$$

$$\mu_r^{(s)} = \mu_r, \quad \nu_{rr}^{(s)} - i\nu_{r\theta}^{(s)} = \nu_{rr} - i\nu_{r\theta}, \tag{c}$$

$$\omega^{(s)} = \omega, \quad u_r^{(s)} - iu_\theta^{(s)} = u_r - iu_\theta, \quad \text{(pe conturul } L_{s+1})$$

$\mu_r, \ldots, \omega, \ldots$ reprezintă cuple, ..., rotații, ... în placă.

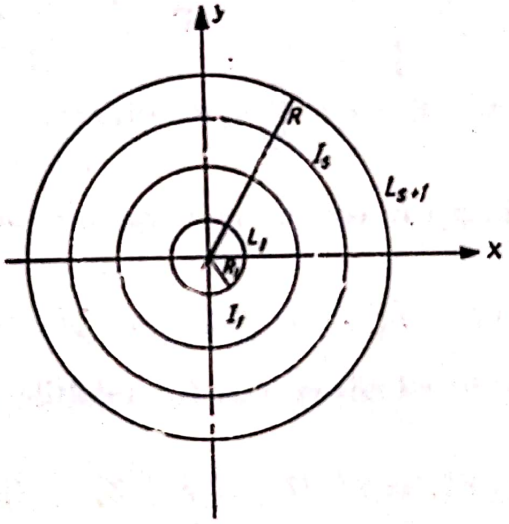


Fig. 116

Presupunem materiale cu rotații constrînse. Soluția corespunzătoare a fost stabilită de Iu. N. Nemîș [3] în modul următor. Se admite că starea de tensiune la infinit, în placă, este descrisă de un polinom de grad $n-1$. Atunci vom considera funcțiile de reprezentare parțiale corespunzătoare unei plăci fără gol interior

$$\varphi^0(\zeta) = C\sum_1^m a_n^0 \frac{\zeta^n}{R^n}, \qquad \psi^0(\zeta) = -C\sum_0^m b_n^0 \frac{\zeta^n}{R^n}, \tag{2}$$

$$\pi^0 = 0.$$

C fiind o constantă. Pentru fiecare inel L_j vom alege funcțiile de forma

$$\varphi^{(j)}(\zeta) = C \sum_{-\infty}^{\infty} a_n^{(j)} \zeta^n / R^n, \qquad \psi^{(j)}(\zeta) = -C \sum_{-\infty}^{\infty} b_r^{(j)} \zeta^n / R^n,$$

$$\pi^{(j)}(r, \theta) = CR \sum_{-\infty}^{\infty} \left[c_n^{(j)} K_n\left(\frac{r}{l_j}\right) + d_n^{(j)} I_n\left(\frac{r}{l_j}\right) \right] e^{in\theta}. \tag{3}$$

Revenind la funcțiile (2) vom observa că, pentru o descriere completă a stării de tensiune în placa cu gol circular, ele trebuie înlocuite prin următoarele:

$$\varphi(\zeta) = \varphi^0(\zeta) + C \sum_{1}^{\infty} a_{-n} R^n / \zeta^n,$$

$$\psi(\zeta) = \psi^0(\zeta) - C \sum_{0}^{\infty} b_{-n} R^n / \zeta^n, \tag{4}$$

$$\pi(r, \theta) = CR \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n K_n(r/l)\, e^{in\theta}.$$

Coeficienții utilizați în cele de mai sus sînt complecși și anume sînt de forma

$$a = a' + ia'', \quad \gamma = (\gamma' + i\gamma'')/2i, \quad c_{-n} = \bar{c}_n, \quad d_{-n} = \bar{d}_n, \quad \gamma_{-n} = \bar{\gamma}_n. \tag{5}$$

Deoarece funcțiile cilindrice satisfac relațiile (care includ relațiile (5) din § 112)

$$Z_{n+1}(r/l) = \delta 2nl Z_n(r/l)/r + Z_{n-1}(r/l),$$

$$Z_n'(r/l) = -nZ_n(r/l)/r - \delta Z_{n-1}(r/l)/l,$$

$$\frac{\partial^k}{\partial \zeta^k}(Z_n e^{\pm in\theta}) = \left(-\frac{\delta}{2l}\right)^k Z_{n\mp k}\, e^{\pm i(n\mp k)\theta},$$

$$\frac{\partial^k}{\partial \bar{\zeta}^k}(Z_n e^{\pm in\theta}) = \left(-\frac{\delta}{2l}\right)^k Z_{n\pm k}\, e^{\pm(n\pm k)\theta}, \tag{6}$$

$$\delta = \begin{matrix} 1, & Z = K \\ -1, & Z = I \end{matrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde I_n, K_n sînt funcțiile Bessel modificate de speța 1 și 2 și ordin n, vom putea reformula condițiile la limită (1) (a), în care ținem seama de (7) din § 111. Astfel, presupunînd $M = 0$, $N = T = 0$ deducem sistemul algebric

$$2a_1^{(1)} - \lambda_1^2 \overline{b}_{-1}^{(1)} = 0,$$

$$a_2 - \lambda^4 b_{-2} + i\lambda_1^3 \frac{R}{l}\left[c_1 K_2\left(\frac{R}{l}\right) - d_1 I_2\left(\frac{R}{l}\right)\right] = 0,$$

$$(n-1)\,t[na_n - (n-2)\,\lambda^{2(n-1)}\,\overline{a}_{-(n-2)} -$$

$$- 2i\lambda^{n-1}\,\frac{R}{l}\left[c_{n-1}K_n^*\left(\frac{R}{l}\right) + d_{n-1}I_n^*\left(\frac{R}{l}\right)\right] = 0,\ (n \geqslant 2), \qquad (7)$$

$$a_n - (n-2)\,\lambda^{2(n-2)}[1 - (n-1)\,t\lambda^2]\,\overline{a}_{-(n-2)} -$$

$$- \lambda^{2n} b_{-n} + i\lambda^{n+1}\,\frac{R}{l}\left[c_{n-1}\,K_n\left(\frac{R}{l}\right) - d_{n-1}I_n\left(\frac{R}{l}\right)\right] = 0,\ n \geqslant 3;$$

$$- n[1 + (n-1)\,t\lambda^2]\,a_n - \lambda^{2(n-1)}\,\overline{a}_{-(n-2)} + \lambda^2 b_{n-2} +$$

$$+ i\lambda^{n+1}\,\frac{R}{l}\left[c_{n-1}\,K_{n-2}\left(\frac{R}{l}\right) - d_{n-1}\,I_{n-2}\left(\frac{R}{l}\right)\right] = 0,\ n \geqslant 3;$$

$$(a,\ b,\ c,\ d) = (a,\ b,\ c,\ d)^{(1)},$$

$$(\lambda,\ R,\ l,\ t) = (\lambda,\ R\,l,\ t)_1.$$

Condițiile (1b) se scriu în mod asemănător, iar (1c) se transcriu astfel

$$(2a_1 - \overline{b}_{-1}) = 2a_1^0 - b_{-1},\quad \mu[(\varkappa - 1)\,a_1 + \overline{b}_{-1}]/\mu_s = (\varkappa - 1)\,a_1^0 + \overline{b}_{-1},$$

$$a_2 - \overline{b}_{-2} + iR[c_1 K_2(R/l_s) - d_2 I_2(R/l_s)] = a_2^0 - \overline{b}_{-2} + iR\varkappa_2 K_2(R)/l)/l,$$

$$\mu[-2(1+t_s)\,a_2 + b_0 + iR(c_1 K_0(R/l_s) - d_1 I_0(R/l_s))/l_s]\,\mu_s -$$

$$- 2(1+t)\,a_2^0 + b_0^0 + iR\varkappa_1 K_0(R/l)/l - n[1 + (n-1)\,t_s]\,a_n -$$

$$- \overline{a}_{-(n-2)} + b_{n-2} + iR[c_{n-1}K_{n-2}(R/l_s) - d_{n-1}I_{n-2}(R/l_s)]/l_s =$$

$$= - n[1 + (n-1)\,t]\,a_n^0 - \overline{a}_{-(n-2)} + b_{n-2}^0 + iR\varkappa_{n-1}K_{n-2}(R/l)/l,\ n \geqslant 3;$$

$$\mu\{(\varkappa+1)\,[na_n+(n-2)\,a_{-(n-2)}]+$$

$$+iR^2[c_{n-1}K_{n-1}(R/l_s)+d_{n-1}I_{n-1}(R/l_s)]/l_s^2\}/\mu_s=$$

$$=(\varkappa+1)[na_n^0+(n-2)\,\bar{a}_{-(n-2)}]+iR^2\varkappa_{n-1}K_{n-1}(R/l)/l^2,\quad n\geqslant 2;$$

$$\mu\{-\varkappa_s a_n-(n-2)[1-(n-1)\,t_s]\,\bar{a}_{-(n-2)}-b_{-n}+$$

$$+iR[c_{n-1}K_n(R/l_s)-d_{n-1}\mathrm{I}_n(R/l_s)]/l_s= \tag{8}$$

$$=-\varkappa a_n^0-(n-2)\,[1-(n-1)\,t]\,\bar{a}_{-(n-2)}-\bar{b}_{-n}$$

$$(n-1)\,t_s[na_n-(n-2)\,\bar{a}_{-(n-2)}]-$$

$$-2iR[c_{n-1}K_n^*(R/l_s)+d_{n-1}I_n^*(R/l_s)]/l_s=$$

$$=(n-1)\,t[na_n^0-(n-2)\,\bar{a}_{-(n-2)}]-2iR\varkappa_{n-1}K_n^*(R/l_s)/l_s,\quad n\geqslant 2;$$

$$a_n-(n-2)\,[1-(n-1)\,t_s]\,\bar{a}_{-(n-2)}-\bar{b}_{-n}+$$

$$+iR[c_{n-1}K_n(R/l_s)-d_{n-1}I_n(R/l_s)/l_s=$$

$$=a_n^0-(n-2)\,[1-(n-1)\,t]\,\bar{a}_{-(n-2)}-\bar{b}_{-n}+iR\varkappa_{n-1}K_n(R/l)/l,\quad n\geqslant 3;$$

$$\mu\{-n[1+(n-1)\,t_s]\,a_n+\varkappa_s\bar{a}_{-(n-2)}+b_{n-2}+$$

$$+iR[c_{n-1}K_{n-2}(R/l_s)-d_{n-1}I_{n-2}(R/l_s)]/l_s=$$

$$=-n[1+(n-1)\,t]\,a_n^0+\varkappa\bar{a}_{-(n-2)}+b_{n-2}^0+iR\varkappa_{n-1}K_{n-2}(R/l)/l,\quad n\geqslant 3.$$

În membrul drept al acestor relaţii intervin notaţiile simplificate $(a,\,b,\,c,\,d)=(a,\,b,\,c,\,d)^{(s)}$.

S-au utilizat notaţiile

$$t_j=2(\varkappa_j+1)\,l_j^2/R^2,\quad \lambda_j=R/R_j,$$

$$Z_n^*(R_i/l_j)=(n-1)\,\frac{l_j}{R_j}\,Z_{n-1}\left(\frac{R_i}{l_j}\right)+\delta Z_{n-2}\left(\frac{R_j}{l_j}\right), \tag{9}$$

$$(i,\,j=1,\,2,\,\ldots,\,s+1)$$

$$R_{s+1}=R,\quad l_{s+1}=l,\quad \mu_{s+1}=\mu,\quad t_{s+1}=t,\quad \lambda_{s+1}=1.$$

Scanned with OKEN Scanner

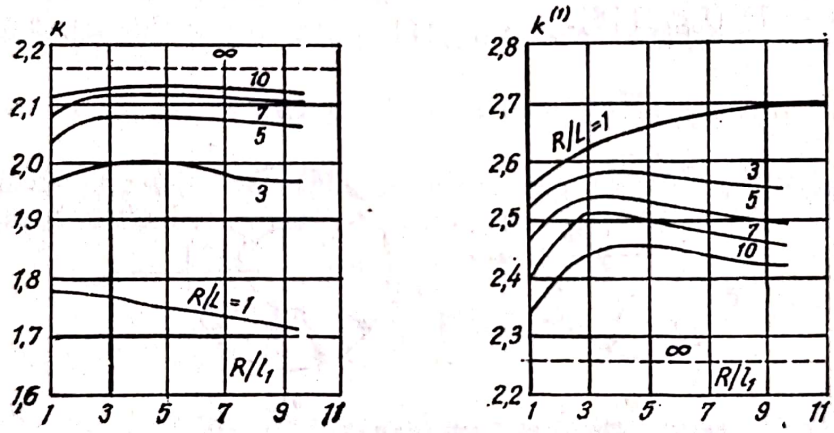
Coeficienții care apar în (7) și (8) avînd indicii $n = m + 3,\ m + 4, \ldots,$ sînt nuli.

În cazul unui gol cu un singur inel de rigidizare și pentru o stare de tensiune la infinit în placă

$$\nu_{xx}^{\infty} = P, \quad \nu_{yy}^{\infty} = \nu_{xy}^{\infty} = \nu_{yx}^{\infty} = 0, \quad \mu_x^{\infty} = \mu_y^{\infty} = 0, \tag{10}$$

obținem

$$\begin{gathered} C = PR/4, \quad a_1^0 = 1, \quad b_1^0 = 2, \quad a_n^0 = b_n^0 = 0, \quad (n > 1), \\ \varphi^{(1)}(\zeta) = PR[a_3^{(1)'}\zeta^3/R^3 + a_1^{(1)'}\zeta/R + a_{-1}^{(1)'}R/\zeta]/4, \\ \psi^{(1)}(\zeta) = -PR[b_1^{(1)'}\zeta/R + b_{-1}^{(1)'}R/\zeta + b_{-3}^{(1)'}R^3/\zeta^3]/4, \\ \pi^{(1)}(R, \theta) = PR^2[c_2^{(1)}K_2(r/l_1) + d_2^{(1)'}I_2(r/l_1)]\sin 2\theta/4, \\ \varphi(\zeta) = PR(\zeta/R + a'_{-1}R/\zeta)/4, \\ \psi(\zeta) = -PR(2\zeta/R + b'_{-1}R/\zeta + b'_{-3}R^3/\zeta^3)/4, \\ \pi(R, \theta) = PR^2\varkappa_2'K_2(r/l)\sin 2\theta/4. \end{gathered} \tag{11}$$



a) b)

Fig. 117

Coeficienții se determină cu ajutorul sistemului (7) și (8). În diagramele din figurile 117 a), b) este reprezentată variația coeficientului concentrării tensiunilor

$$k = \nu_{\theta\theta}\left(R, \pm\frac{\pi}{2}\right)/P \qquad \text{pentru } \mu/\mu_1 = 1{,}8326$$

și

$$k^{(1)} = \nu_{\theta\theta}^{(1)}\left(R_1 \pm\frac{\pi}{2}\right)/P \qquad \text{pentru } \mu/\mu_1 = 0{,}5457. \tag{12}$$

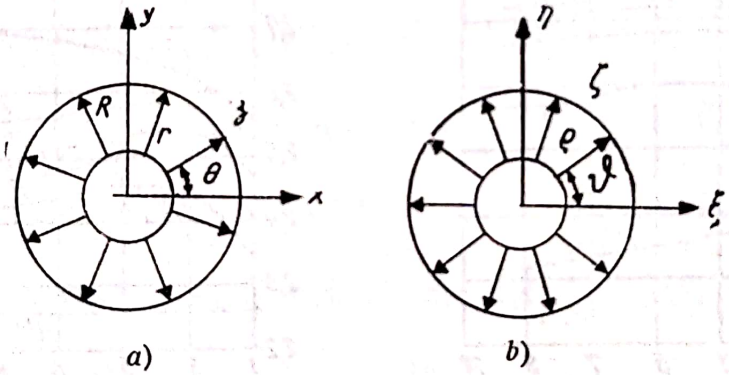
Presupunem $\nu = \nu_1 = 0,3, \quad \lambda_1 = R/R_1 = 4/3.$

Se constată că teoria clasică a elasticităţii, pentru $\mu/\mu_1 > 1$, dă o valoare limită inferioară a coeficientului concentrării tensiuni. În schimb, pentru $\mu/\mu_1 < 1$, inelul fiind practic rigid, valoarea limită este superioară*).

D. Soluţii obţinute prin transformări conforme

§ 116. Aplicarea metodei transformărilor conforme ecuaţiei lui Helmholtz din teoria polară a elasticităţii

În cazul unor goluri cu un contur diferit de cerc se poate utiliza o metodă de rezolvare elaborată de Iu. N. Nemiş [3], bazată pe metoda transformării conforme pentru mediile cu polaritate constrînsă. Fie astfel planul infinit cu un gol de contur Γ. Atunci $z = f(\zeta) = R(\zeta + \varepsilon\zeta^{-k}) = r'e^{i\alpha}$ reprezintă planul cu gol circular de rază unitate $\rho = 1$ pe planul infinit (z) cu golul de contur Γ pentru care corespunde variabila $\zeta = \rho e^{i\theta}$ $(\rho = 1)$ (fig. 118).



a) b)

Fig. 118

Pentru

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a+b}, \quad R = 1, \quad = \frac{a+b}{2} \tag{1}$$

a şi b fiind semiaxele elipsei, avem o reprezentare pe o elipsă iar pentru

$$\varepsilon = \pm\frac{1}{4}, \quad k = 2 \quad \text{sau} \quad \varepsilon = \pm\frac{1}{9}, \quad k = 3 \tag{2}$$

avem o reprezentare pe un pătrat.

*) Calculele au fost efectuate de autorii citaţi cu ajutorul calculatorului ЭЦВМ(БЭСМ–2М).

Scanned with OKEN Scanner

Utilizînd coordonate adimensionale $r = r'/R$, vom considera relaţiile

$$r = \rho[1 + 2\varepsilon\rho^{-k-1}\cos(k+1)\theta + \varepsilon^2\rho^{-2k-2}]^{1/2},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left[\frac{\rho\sin\theta - \varepsilon\rho^{-k}\sin k\theta}{\rho\cos\theta + \varepsilon\rho^{-k}\cos k\theta}\right], \tag{3}$$

$$\varepsilon^{i\beta} = \zeta\overline{f(\zeta)}\,f'(\zeta)/|\zeta|\cdot|\overline{f(\zeta)}|\cdot|\overline{f'(\zeta)}|.$$

β este unghiul între direcţia radială şi normală la limita din planul z pe care se reprezintă limitele $\rho =$ const. din planul ζ. Vom presupune ε un parametru mic ($|\varepsilon| \ll 1$). Atunci vom considera dezvoltările relative la un mediu cu rotaţii constrînse

$$F(r, \alpha, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j F_j(r, \alpha), \qquad G(r, \alpha, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j G_j(r, \alpha), \tag{4}$$

în care, conform (2) şi (5) din § 111, intervin funcţiile

$$F_j = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi_j(z) + \varkappa_j(z)], \quad G_j = 8(1-\nu)\,l^2\operatorname{Im}\varphi_j'(z) + \Pi_j. \tag{5}$$

Π_j este soluţia ecuaţiei lui Helmholtz (6) din § 111, transformate care, conform transformării conforme considerate, se scrie astfel:

$$\left(\Delta_\zeta - \frac{R^2}{l^2}\right)\Pi_j \cong 0. \tag{6}$$

Ecuaţia (6), datorită ipotezei că ε este foarte mic, restrînge valabilitatea metodei de rezolvare.

Pe baza acestor dezvoltări se pot construi soluţii aproximative. Pentru aceasta se consideră dezvoltările;

$$\varphi_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(j)} z^{-n}, \quad \psi_j(z) = \varkappa_j'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(j)} z^{-n},$$

$$\pi_j(r', \alpha) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n^{(j)} K_n\left(\frac{r'}{l}\right) e^{in\alpha}, \tag{7}$$

precum şi descompunerile

$$a = a' + ia'', \quad b = b' + ib'', \quad c_n = (c_n' + ic_n'')/2i, \quad c_{-n}^{(j)} = c_n^{-(j)}. \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu aceasta rezultă expresia funcțiilor din (4) :

$$F_j(r,\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} (Rr)^{-n+1} \begin{matrix} a_n^{(j)\prime} & \cos \\ a_n^{(j)\prime\prime} & \sin \end{matrix} (n+1)\alpha + b_1^{(j)\prime} \log (Rr) -$$

$$- \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(Rr)^{-n+1}}{n-1} \begin{matrix} b_n^{-(j)\prime} & \cos \\ b_n^{(j)\prime\prime} & \sin \end{matrix} (n-1)\alpha,$$

$$G_j(r,\alpha) = \pm 8(1-\nu)\, l^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(Rr)^{-n-1} \begin{matrix} a_n^{(j)\prime} & \sin \\ a_n^{(j)\prime\prime} & \cos \end{matrix} (n+1)\alpha +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} K_n(R/l) \begin{matrix} c_n^{(j)\prime} & \sin \\ c_n^{(j)\prime\prime} & \cos \end{matrix} n\alpha. \tag{9}$$

Pentru o rotație a axelor de unghi β, vom avea următoarele relații între tensiunile în noile sisteme de coordonate (pe care le vom denumi proprii) și cele în sistemele de coordonate r, θ :

$$\nu_{\rho\rho} = \nu_{rr} \cos^2\beta + \nu_{\alpha\alpha} \sin^2\beta + \frac{1}{2}(\nu_{r\alpha} + \nu_{\alpha r}) \sin 2\beta,$$

$$\nu_{\theta\theta} = \nu_{rr} \sin^2\beta - \nu_{\alpha\alpha} \cos^2\beta - \frac{1}{2}(\nu_{r\alpha} + \nu_{\alpha r}) \sin 2\beta, \tag{10}$$

$$\nu_{\rho\theta}^{(j)} - \nu_{\theta\rho}^{(j)} = \tilde{\nu}_{\rho\theta}^{(j)} - \tilde{\nu}_{\theta\rho}^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} L_1^{(j-m)} (\tilde{\nu}_{\rho\theta} - \tilde{\nu}_{\theta\rho})^{(m)},$$

$$\mu_\rho^{(j)} = \tilde{\mu}_\rho^{(j)} - \sum_{m=0}^{j-1} [L_5^{(j-m)} \tilde{\mu}_{\rho\rho}^{(m)} + L_6^{(j-m)} \tilde{\mu}_{\theta\theta}^{(m)}],$$

$$\mu_\theta^{(j)} = \tilde{\mu}_\theta^{(j)} - \sum_{m=0}^{j-1} [L_5^{(j-m)} \tilde{\mu}_\theta^{(m)} - L_6^{(j-m)} \tilde{\mu}_\rho^{(m)}],$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\nu_{\theta\rho}^{\rho\theta} = \frac{1}{2}(\nu_{\alpha\alpha} - \nu_{rr}) \sin 2\beta \pm \nu_{r\alpha} \cos^2\beta \mp \nu_{\alpha r} \sin^2\beta,$$

$$\mu_\rho = \mu_r \cos\beta + \mu_\alpha \sin\beta, \quad \mu_\theta = -\mu_r \sin\beta + \mu_\alpha \cos\beta.$$

Vom considera de asemenea dezvoltarea:

$$\nu_{\rho\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \nu_{\rho\rho}^{(j)} + \cdots; \quad \mu_\theta = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \mu_\theta^{(j)}. \tag{11}$$

Conform celor precedente, se obțin formulele de recurență:

$$\nu_{\rho\rho}^{(j)} = \tilde{\nu}_{\rho\rho}^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} [L_1^{(j-m)} \tilde{\nu}_{\rho\rho}^{(m)} + L_2^{(j-m)} (\tilde{\nu}_{\theta\theta}^{(m)} - \tilde{\nu}_{\rho\rho}^{(m)}) + L_3^{(j-m)} (\tilde{\nu}_{\rho\theta}^{(m)} + \tilde{\nu}_{\theta\rho}^{(m)})/2)],$$

$$\nu_{\theta\theta}^{(j)} = \tilde{\nu}_{\theta\theta}^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} \left[L_1^{(j-m)} \tilde{\nu}_{\theta\theta}^{(m)} - L_2^{(j-m)} (\tilde{\nu}_{\theta\theta}^{(m)} - \tilde{\nu}_{\rho\rho}^{(m)}) - \frac{1}{2} L_3^{(j-m)} (\tilde{\nu}_{\rho\theta}^{(m)} + \tilde{\nu}_{\theta\rho}^{(m)}) \right],$$

$$\nu_{\theta\rho}^{(j)} = \tilde{\nu}_{\theta\rho}^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} \left[L_1^{(j-m)} \tilde{\nu}_{\theta\rho}^{(m)} - L_2^{(j-m)} (\tilde{\nu}_{\rho\theta}^{(m)} + \tilde{\nu}_{\theta\rho}^{(m)}) + \frac{1}{2} L_3^{(j-m)} (\tilde{\nu}_{\theta\theta}^{(m)} - \tilde{\nu}_{\rho\rho}^{(m)}) \right]. \tag{12}$$

în care

$$\tilde{\nu}_{\rho\rho}^{(j)} = \frac{1}{R^2} \left\{ \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) F_j(\rho, \theta) - \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \left(\frac{1}{\rho} G_j(\rho, \theta) \right) \right\},$$

$$\tilde{\nu}_{\theta\theta}^{(j)} = \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} F_j(\rho, \theta) + \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \left(\frac{1}{\rho} G_j(\rho, \theta) \right) \right\}, \tag{13}$$

$$\tilde{\nu}_{\theta\rho}^{(j)} = -\frac{1}{R^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \left(\frac{1}{\rho} F_j(\rho, \theta) \right) + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) G_j(\rho, \theta) \right\}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\tilde{\nu}_{\rho\theta}^{(j)} = -\frac{1}{R^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\left(\frac{1}{\rho}F_j(\rho,\theta)\right) - \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}F_j(\rho,\theta)\right\},$$

$$\tilde{\mu}_\rho^{(j)} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}F_j(\rho,\theta),\ \tilde{\mu}_\theta^{(j)} = \frac{1}{R\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}F_j(\rho,\theta),$$

$$L_i^{(0)} = 0,\ L_1^{(1)} = \frac{\cos(k+1)\theta}{\rho^k}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin(k+1)\theta}{\rho^{k+1}}\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$L_2^{(1)} = 0,\ L_3^{(1)} = 2(k+1)\sin(k+1)\theta/\rho^{k+1},\ L_5^{(1)} = L_1^{(1)},$$

$$L_6^{(1)} = L_3^{(1)}/2,\ L_1^{(2)} = \frac{1+\cos 2(k+1)\theta}{4\rho^{2k}}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \frac{\sin 2(k+1)\theta}{2\rho^{2k}}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\frac{1}{\rho} +$$

$$+\frac{1-\cos 2(k+1)\theta}{4\rho^{2k+2}}\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right),$$

$$L_3^{(2)} = \frac{(k^2-1)\sin 2(k+1)\theta}{\rho^{2k+2}} + \frac{(k+1)\sin 2(k+1)\theta}{\rho^{2k+1}}\frac{\partial}{\partial\rho} -$$

$$-\frac{(k+1)[1-\cos 2(k+1)\theta]}{\rho^{2k+2}}\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$L_2^{(2)} = (k+1)^2[1-\cos 2(k+1)\theta]/2\rho^{2k+2},\ L_5^{(2)} = L_1^{(2)} - L_2^{(2)}/2,\ L_6^{(2)} = L_3^{(2)}/2.$$

Dacă se dau la infinit tensiunile;

$$\nu_{\rho\rho}^0,\ \nu_{\theta\vartheta}^0,\ \nu_{\rho\theta}^0,\ \nu_{\theta\rho}^0,\ \mu_\rho^0,\ \mu_\theta^0, \tag{14}$$

şi condiţiile pe conturul golului

$$\nu_{\rho\rho}^*\Big|_\Gamma = f_1(\theta,\varepsilon),\ \nu_{\theta\rho}^*\Big|_\Gamma = f_2(\theta,\varepsilon),\ \mu_\rho^*\Big|_\Gamma = f_3(\theta,\varepsilon) \tag{15}$$

vom lua, în baza liniarităţii soluţiilor,

$$\nu^* = \nu^0 + \nu, \ldots;\ \mu^* = \mu^0 + \mu, \ldots. \tag{16}$$

Scanned with OKEN Scanner

Calculînd tensiunile (13) cu ajutorul dezvoltărilor pentru funcțiile de tensiune (5), se obține

$$\tilde{\nu}_{\rho\rho}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{n}{\rho^{n+1}}\left[n+3-(n+1)(n+2)\frac{t}{\rho^2}\right]\begin{matrix}A_n^{(j)\prime}\cos\\ A_n^{(j)\prime\prime}\sin\end{matrix}(n+1)\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{n}{\rho^{n+1}}\begin{matrix}B_n^{(j)\prime}\cos\\ B_n^{(j)\prime\prime}\sin\end{matrix}(n-1)\theta\mp nN_n^{(1)}\left(\frac{R\rho}{l}\right)\begin{matrix}c_n^{(j)\prime}\cos\\ c_n^{(j)\prime\prime}\sin\end{matrix}n\theta\right\},$$

$$\tilde{\nu}_{\theta\theta}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n}{\rho^{n+1}}\left[n-1-(n+1)(n+2)\frac{t}{\rho^2}\right]\begin{matrix}A_n^{(j)\prime}\cos\\ A_n^{(j)\prime\prime}\sin\end{matrix}(n+1)\theta-\right.$$

$$\left.-\frac{n}{\rho^{n+1}}\begin{matrix}B_n'^{(j)}\cos\\ B_n'^{(j)}\sin\end{matrix}(n-1)\theta\pm nN_n^{(1)}\left(\frac{R\rho}{l}\right)\begin{matrix}c_n^{(j)\prime}\cos\\ c_n^{(j)\prime\prime}\sin\end{matrix}n\theta\right\},$$

$$\tilde{\nu}_{\rho\theta}^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\mp\frac{n(n+1)}{\rho^{n+1}}\left[1-\frac{(n+2)t}{\rho^2}\right]\begin{matrix}A_n'^{(j)}\sin\\ A_n''^{(j)}\cos\end{matrix}(n+1)\theta\pm\right.$$

$$\left.\pm\frac{n}{\rho^{n+1}}\begin{matrix}B_n'^{(j)}\sin\\ B_n''^{(j)}\cos\end{matrix}(n-1)\theta-N_n^{(2)}\left(\frac{R\rho}{l}\right)\begin{matrix}c'^{(j)}\sin\\ c_n''\cos\end{matrix}n\theta\right\},$$

$$(\tilde{\nu}_{\rho\theta}-\tilde{\nu}_{\theta\rho})^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\mp\frac{2n(n+1)}{\rho^{n+1}}\left[1-\frac{(n+2)t}{\rho^2}\right]\begin{matrix}A_n'^{(j)}\sin\\ A_n''^{(j)}\cos\end{matrix}(n+1)\theta+\right. \quad (17)$$

$$\left.\pm\frac{2n}{\rho^{2n+1}}\begin{matrix}B_n'^{(j)}\sin\\ B_n''^{(j)}\cos\end{matrix}(n-1)\theta+N_n^{(3)}\left(\frac{R\rho}{l}\right)\begin{matrix}c'^{(j)}\sin\\ c_n''^{(j)}\cos\end{matrix}n\theta\right\},$$

$$\tilde{\mu}_{\rho}^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\mp\frac{n(n+1)t}{\rho}\begin{matrix}A_n'^{(j)}\sin\\ A_n''^{(j)}\cos\end{matrix}(n+1)\theta+K_n'\left(\frac{R\rho}{l}\right)\begin{matrix}C_n'^{(j)}\sin\\ C_n''^{(j)}\cos\end{matrix}n\theta\right],$$

$$\tilde{\mu}_{\theta}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n(n+1)t}{\rho^{n+2}}\begin{matrix}A_n'^{(j)}\cos\\ A_n''^{(j)}\sin\end{matrix}(n+1)\theta\pm nK_n\left(\frac{R\rho}{l}\right)\begin{matrix}c_n'^{(j)}\cos\\ c_n''^{(j)}\sin\end{matrix}n\theta\right],$$

S-a notat

$$A_n = a_n/R^{n+1},\quad B_n = b_n/R^{n+1},\quad C_n = c_n/R,$$
$$t = 8(1-\nu)\,l^2/R^2,\quad N_n^{(1)}(R\rho/l) = [\rho K_n'(R\rho/l) - K_n(R\rho/l)]/\rho^2, \quad (18)$$
$$N_n^{(2)}(R\rho/l) = [\rho K_n'(R\rho/l) - n^2K_n(R\rho/l)]/\rho^2,$$
$$N_n^{(3)}(R\rho/l) = [\rho^2K_n''(R\rho/l) - \rho K_n'(R\rho/l) + n^2K_n(R\rho/l)]/\rho^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, conform (12), (13) şi (17), obţinem;

$$\nu_{\rho\rho}^{(1)} = \tilde{\nu}_{\rho\rho}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{n(n+1)}{\rho^{n+k+2}}\frac{A_n'(0)}{A_n''(0)}\cdot\left[\left(k+1-\frac{k(n+2)\,t}{\rho}\right)\right.\right.$$

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n-k)\theta-\left(n+k+4-\frac{(n+2)(n+k+3)\,t}{\rho^2}\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n+k+2)\theta\Big]+$$

$$+\frac{n}{\rho^{n+k+2}}\frac{B_n'(0)}{B_n''(0)}\left[k\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n-k-2)\theta-(n+k+1)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n+k)\theta\right]\mp$$

$$\mp\frac{C'(0)}{C_n''}\left[T_n^{-(1)}(R\rho/l)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n-k-1)\,\theta+T_n^{+(1)}(R\rho/l)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n+k+1)\,\theta\right]\Big\},$$

$$\nu_{\theta\theta}^{(1)}+\nu_{\rho\rho}^{(1)}=\tilde{\nu}_{\theta\theta}^{(1)}+\tilde{\nu}_{\rho\rho}^{(1)}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{\rho^{n+k+2}}\frac{A'^{(0)}}{A_n''}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n+k+\ )\,\theta,$$

$$\nu_{\rho\theta}^{(1)}=\tilde{\nu}_{\rho\theta}^{(1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\mp\frac{n(n+1)}{\rho^{n+k+2}}\frac{A_n'(0)}{A_n''(0)}\left[\left(k+1-\frac{k(n+2)\,t}{\rho^2}\right)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n-k)\theta-\right.\right.$$

$$-\left(n+k+2-\frac{(n+2)(n+k+3)\,t}{\rho^2}\right)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n+k+2)\theta\Big]\pm \qquad (19)$$

$$\pm\frac{n}{\rho n+k+2}\frac{B'^{(0)}}{B_n''}\left[k\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n-k-2)\,\theta-(n+k+1)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n+k)\theta\right]-$$

$$-\frac{C'^{(0)}}{C_n''}\left[T_n^{-(2)}(\rho R/l)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n-k-1)\theta+T_n^{+(2)}(\rho R/l)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n+k+1)\theta\right]\Big\},$$

$$\nu_{\rho\theta}^{(1)}-\nu_{\theta\rho}^{(1)}=\tilde{\nu}_{\rho\theta}^{(1)}-\tilde{\nu}_{\theta\rho}^{(1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C'^{(0)}}{C_n''}\left\{\left[T_n^{-(2)}(R\rho/l)+\right.\right.$$

$$+\left.T_n^{-(3)}(R\rho/l)\right]\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n-k-1)\theta+$$

$$+\left[T_n^{+(2)}(R\rho/l)+T_n^{+(3)}(R\rho/l)\right]\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n+k+1)\,\theta,$$

$$\mu_{\rho}^{(1)}=\tilde{\mu}_{\rho}^{(1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\mp\frac{n(n+1)\,t}{2\rho^{n+k+3}}\frac{A_n'^{(0)}}{A_n''^{(0)}}\right.$$

Scanned with OKEN Scanner

$$[k \cdot \frac{\sin}{\cos}(n-k)\theta - (2n+k+4)\frac{\sin}{\cos}(n+k+2)\theta] +$$

$$+ \frac{C_n'^{(0)}}{C_n''^{(0)}}[T_n^{-(4)}(R\rho/l)\frac{\sin}{\cos}(n-k-1)\theta +$$

$$+ T_n^{+(4)}(R\rho/l)\frac{\sin}{\cos}(n+k+1)\theta]\Big\}.$$

Funcțiile $T_n^{\pm(i)}(R\rho/l)$, $(i = 1,2,3,4)$, au expresiile

$$T_n^{\pm(1)} = [n\rho N_n^{(1)}(R\rho/l) \mp n^2 N_n^{(1)}(R\rho/l) \pm (k+1)N_n^{(3)}(R\rho/l)]2\rho^{k+1},$$

$$T_n^{\pm(2)}(R\rho/l) = [\rho N_n^{(2)}(R\rho/l) \mp nN_n^{(2)}(R\rho/l) \mp$$

$$\mp 2(k+1)nN_n^{(1)}(R\rho/l)]/2\rho^{k+1},$$

$$T_n^{\pm(3)}(R\rho/l) = [\rho K_n'''(R\rho/l) \mp nK_n''(R\rho/l) \pm \qquad (20)$$

$$\pm 2(k+1)nN_n^{(1)}(R\rho/l)]/2\rho^{k+1},$$

$$T_n^{\pm(4)}(R\rho/l) = [\rho K_n''(R\rho/l) \mp nK_n'(R\rho/l) \pm$$

$$\pm (k+1)nK_n(R\rho/l)]/2\rho^{k+1}.$$

În a doua aproximație se obține

$$\nu_{\theta\theta}^{(2)} = \tilde{\nu}_{\theta\theta}^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{-\frac{n(n+1)}{\rho^{n+2k+3}}\frac{A'^{(0)}}{A_n''}\Big[(k+1)(n+k+2) -$$

$$-\frac{k(n+2)(n+k+3)t}{\rho^2}\Big)\frac{\cos}{\sin}(n+1)\theta - k\Big(k+1-$$

$$-\frac{k(n+2)t}{\rho^2}\Big)\frac{\cos}{\sin}(n-2k-1)\theta - \frac{(n+2)}{2}\Big(n+2k+1-$$

$$-\frac{(n+3)(n+2k+4)t}{\rho^2}\Big)\frac{\cos}{\sin}(n+2k+3)\theta\Big] + \qquad (21)$$

$$+\frac{n}{\rho^{n+2k+3}}\frac{B'^{(0)}}{B''_n}\Big[k(n+k+1)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(k-1)\theta-k^2\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n-2k-3)\theta-$$

$$-\frac{n+1}{2}(n+2k+2)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n+2k+1)\theta\Big]\pm$$

$$\pm\frac{C'^{(0)}}{C''_n}\Big[nM_n^{(1)}(R\rho/l)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}n\theta+M_n^{-(2)}(R\rho/l)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n-2k-2)\theta+$$

$$+M_n^{+(2)}(R\rho/l)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n+2k+2)\theta\Big]\Big\},$$

$$\nu_{\rho\rho}^{(2)}+\nu_{\theta\theta}^{(2)}=\tilde{\tilde{\nu}}_{\rho\rho}^{(2)}+\tilde{\tilde{\nu}}_{\theta\theta}^{(2)}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)(n+2)}{\rho^{n+2k+3}}\frac{A'^{(0)}}{A''_n}\cdot\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n+2k+3)\theta,$$

$$\nu_{\theta\rho}^{(2)}=\tilde{\tilde{\nu}}_{\theta\rho}^{(2)}+\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\mp\frac{n(n+1)}{\rho^{n+2k+3}}\frac{A'^{(0)}}{A''_n}\Big[\Big(-(k+1)(n+2k+2)+$$

$$+\frac{k(n+2)(n+k+3)t}{\rho^2}\Big]\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n+1)\theta+k(k+1-$$

$$-k(n+2)t/\rho^2)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n-2k-1)\theta+\frac{n+2}{2}\Big(n+2k+3-$$

$$-(n+3)(n+2k+4)\frac{t}{\rho^2}\Big)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n+2k+3)\theta\mp$$

$$\mp\frac{n}{\rho^{n+2k+3}}\frac{B'^{(0)}}{B''_n}\Big[k(n+k+1)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n-1)\theta-k^2\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n-2k-3)\theta-$$

$$-\frac{n+1}{2}(n+2k+2)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n+2k+1)\theta\Big]-$$

$$-\frac{C'^{(0)}}{C''_n}\Big[M_n^{(3)}(R\rho/l)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}n\theta+M_n^{-(4)}(R\rho/l)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n-2k-2)\theta+$$

$$+M_n^{+(4)}(R\rho/l)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n+2k+2)\theta\Big]\Big\},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\mu_\rho^{(2)} = \tilde{\tilde{\mu}}_\rho^{(2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \pm \frac{n(n+1)t}{8\rho^{n+2k+4}} \frac{A'^{(0)}}{A''_n} 2k(2n+k+4) \cdot \right.$$

$$\cdot \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (n+1)\theta - 3k^2 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (n-2k-1)\theta -$$

$$- (4n(n+k+5) + 8(k+3) - k^2) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (n+2k+3)\theta] -$$

$$+ \frac{C'^{(0)}}{C''_n} [M_n^{(7)}(R\rho/l) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} n\theta + M_n^{-(8)}(R\rho/l) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (n-2k-2)\theta +$$

$$\left. + M_n^{+(8)}(R\rho/l) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (n+2k+2)\theta] \right\}.$$

Analog $\tilde{\tilde{\nu}}$, $\tilde{\tilde{\mu}}$,... se obțin din $\nu^{(1)}$, $\mu^{(1)}$,... înlocuind $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $C^{(0)}$, $C^{(1)}$ prin $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ iar

$$M_n^{(1)} = [\rho^2 N_n^{(1)\prime} + \rho N_n^{(1)\prime} - (n^2 + 4(k+1)^2] N_n^{(1)}/4\rho^{2k+2} + 2(k+1) N_n^{(3)},$$

$$M_n^{\pm(2)} = n[\rho^2 N_n^{(1)\prime\prime} - (1 \pm 2n)\rho N_n^{(1)\prime} + (n(n \pm 2) +$$

$$+ 4(k+1)^2) N_n^{(1)}]/8\rho^{2k+2} + (k+1)[\pm \rho N_n^{(3)} + (n \pm (k-1)) N_n^{(3)}]/4\rho^{2k+2}.$$

Cu ajutorul acestor relații se obține sistemul algebric de ecuații pentru determinarea coeficienților.

§ 117. Concentrarea tensiunilor și cuplelor de tensiune în jurul golurilor de contur eliptic, triunghiular și pătrat

Fie planul cu gol nesolicitat pentru o întindere uniformă la infinit (vezi (10) din § 115). Reprezentarea conformă reprezintă exteriorul cercului unitate pe exteriorul conturului golului. Conform condițiilor la limită (15) din § 116, pentru $\rho = 1$ și relațiilor (18) din același paragraf pentru $g = 0$, coeficienții dezvoltărilor utilizate vor avea expresiile

$$B_1^{(0)\prime} = -P,\ A_k^{(1)\prime} = -P/(1+Q_1),\ B_{k+2}^{(1)\prime} = -(k+1)P/(1+Q_1),$$

$$C_{k+1}^{(1)\prime} = -\frac{k(k+1)tP}{(1+Q_1)K'_{k+1}(R/l)},\quad B_1^{(2)\prime} = -kP\frac{1-Q_1}{1+Q_1},$$

$$A^{(2)'}_{2k+1} = -\frac{kP}{2(2k+1)(1+Q_1)(1+Q_2)}\left\{2(1+k(2+Q_1))+\right.$$

$$\left.+Q_2\left(\frac{3k+4}{2}-\frac{T^{+(4)}_{k+1}(R/l)}{K'_{k+1}(R/l)}\right)-Q_3\right\}, \qquad (1)$$

$$C^{(2)'}_{2k+2} = -\frac{k(k+1)tP}{(1+Q_1)(1+Q_2)K'_{2k+2}(R/l)}\left\{\frac{k}{2}(5+4Q_1)-\right.$$

$$\left.-T^{+(n)}_{k+1}(R/l)/K'_{k+1}(R/l)-Q_3\right\},$$

$$(2k+3)B^{(2)}_{2k+3} = (k^2+2k+3)P-\frac{(k+1)P}{2+Q_1}\left\{3(k+2)+\right.$$

$$+kt\left[(k+2)(2k+3)+\frac{T^{+(1)}_{k+1}(R/l)}{K'_{k+1}(R/l)}\right]\Big\}+$$

$$+2(2k+1)[k+2-(k+1)(2k+3)t]A^{(2)'}_{2k+1}+$$

$$+2(k+1)N^{(1)}_{2k+2}(R/l)C^{(2)'}_{2k+2},$$

unde

$$Q_j = \frac{1}{2}t_j(k+1)[j(k+1)-1][1+j(k+1)K_{j(k+1)}(R/l)/K'_{j(k+1)}(R/l)],$$

$$(j=1,\ 2,\ldots)$$

$$Q_3 = (k+1)\,t\,[T^{+(1)}_{k+1}(R/l)-T^{+(2)}_{k+1}(R/l)]/K'_{k+1}(R/l). \qquad (2)$$

Pentru tensiunile totale se obţin soluţiile în aproximaţie de ordinul 1 :

$$\nu_{\theta\theta} = P-B^{(0)}_1/\rho^2+\varepsilon[2B^{(0)'}_1/\rho^{k+3}+k[k-1-$$

$$-(k+1)(k+2)t/\rho^2]A^{(1)'}_k/\rho^{k+1}-(k+2)B^{(1)'}_{k+2}/\rho^{k+3}+$$

$$+(k+1)N^{(1)}_{k+1}(R\rho/l)C^{(1)'}_{k+1}]\cos(k+1)\theta+\varepsilon^2\{k(k+2)B^{(0)'}_1/\rho^{2k+4}+$$

$$+k(k+1)[k+1-k(k+2)t/\rho^2]A^{(1)'}/\rho^{2k+2}-k(k+2)/\rho^{2k+2}+ \qquad (3)$$

$$+T^{-(1)}_{k+1}(R\rho/l)C^{(1)'}_{k+1}-B^{(2)'}_1/\rho^2+[-(k^2+2k+3)B^{(0)'}_1/\rho^{2k+4}-$$

$$-k(k+1)[2k-(k+2)(2k+3)t/\rho^2]A^{(1)'}_k/\rho^{2k+2}+$$

$$+2(2k+1)(k-(k+1)(2k+3)t/\rho^2)A^{(2)'}_{2k+1}/\rho^{2k+2}+$$

Scanned with OKEN Scanner

$$+(k+2)(2k+3)\,B^{(1)\prime}_{k+2}/\rho^{2k+4} - (2k+3)\,B^{(2)\prime}_{2k+3}/\rho^{2k+4} +$$

$$+ T^{+(1)}_{k+1}(R\rho/l)\,C^{(1)\prime}_{k+1} + 2(k+1)\,N^{(1)}_{2k+2}(R\rho/l)\,C^{(2)\prime}_{2k+2}]\cos 2(k+1)\theta\},$$

$$\nu_{\rho\rho} = -\nu_{\theta\theta} + 2P - 4k\varepsilon A^{(1)\prime}_k \cos(k+1)\theta/\rho^{k+1} + 4\varepsilon^2 [k(k+1)\,A^{(1)\prime}_k -$$

$$-(2k+1)\,A^{(2)\prime}_{2k+1}]\cos 2(k+1)\theta/\rho^{2k+2}.$$

Dacă $M + A = 0$, $R/l \to \infty$, se obține valoarea din teoria simetrică:

$$\nu_{\theta\theta} = 2p\,(1 - k^2\varepsilon^2)/[1 - 2k\varepsilon\cos(k+1)\theta + k^2\varepsilon^2]. \qquad (4)$$

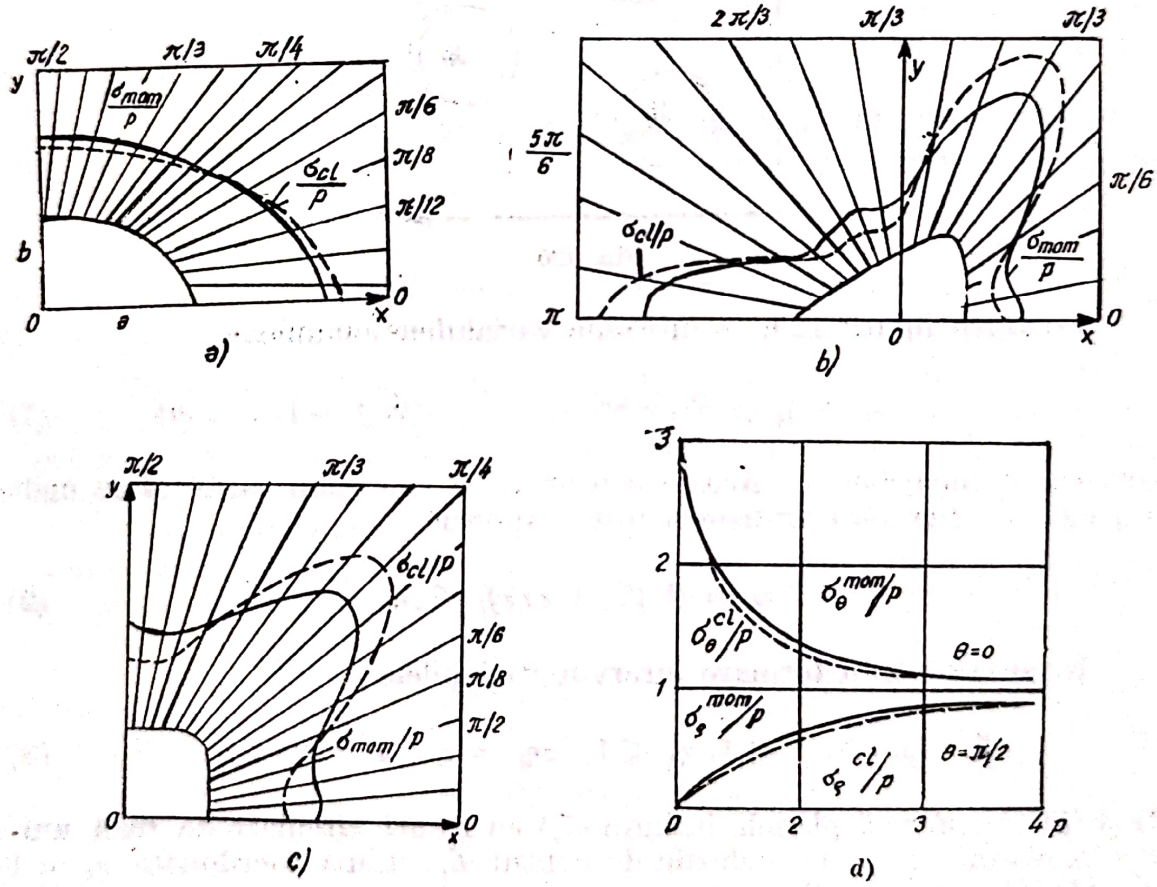


Fig. 119

Aceasta corespunde golului eliptic (fig. 119). Dacă $a/b = 1{,}5$, se obțin coeficienți de concentrare $(\nu_{\theta\theta}/P)_{max}$ pentru teoria clasică sau cu cuple de tensiune.

Pentru $\theta = 0$, coeficientul din teoria cu momente scade cu circa 7% față de cel din teoria clasică, în a doua aproximație, eroarea acestuia din urmă nefiind mai mare de 1,5%, dacă $k = 1$.

Pentru un gol triunghiular ($k = -1/4$), sau pătrat ($\varepsilon = -1/9$), se obțin de asemenea scăderi cu circa 20% a coeficienților de concentrare. S-a considerat $\theta = 0{,}25$, $R/l = 3$.

Cazul domeniului multiplu conex. În cazul domeniului multiplu conex, G. N. Savin [5] și A. N. Guz [1] au elaborat o metodă de rezolvare a problemelor la limită care necesita rezolvarea unor sisteme infinite de ecuații algebrice. Dată fiind complexitatea formulărilor care intervin, în cele ce urmează ne vom limita la o scurtă expunere a principiilor care stau la baza acestei metode.

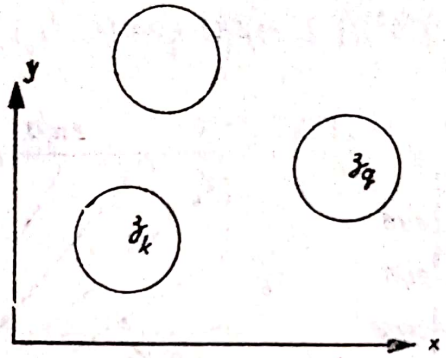


Fig. 120

Conform figurii 120, se introduc variabilele complexe

$$\zeta_k = \zeta_q + R_{kq}\, e^{i\varphi_{kq}}, \qquad (k, q = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

asociate contururilor L_k. Aceste contururi se presupun astfel alese încît să poată fi efectuată transformarea conformă

$$\zeta_k = R_k\,(\zeta_k + \varepsilon\eta_k f_k\,(\zeta_k)). \tag{2}$$

În această transformare intervin variabilele

$$\zeta_k = \rho_k\, e^{i\gamma_k},\ \varepsilon < 1,\ \eta_k \leqslant 1,\ \varepsilon\eta_k = \varepsilon_k,\ \varepsilon = \max\,\varepsilon_k. \tag{3}$$

(2) și (3) transformă planele infinite (ζ_k) cu goluri circulare de rază unitate în planul infinit cu golurile de contur L_k. Linia coordonată $\rho_k = 1$ coincide cu conturul $|\zeta_k| = 1$.

R_k este un parametru caracterizînd dimensional acest contur. Corespondența realizată prin transformarea conformă este biunivocă dacă ecuațiile

$$1 + \varepsilon\eta_k f_k(\zeta_k) = 0 \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

au rădăcini situate în interiorul cercului unitate în planul (ζ_k). În acest caz interiorul acestor cercuri este transformat în interiorul curbelor L_k.

Deoarece problema la limită este liniară, vom putea construi soluțiile de forma unor sume a relațiilor pentru domeniile simplu conexe de contur L_k:

$$F = \sum_{k=1}^{m} F(r_k, \theta_k), \quad G = \sum_{k=1}^{m} G(r_k, \theta_k). \tag{5}$$

În concluzie, utilizînd dezvoltări de tipul celor indicate în (4), (11) și (14) din § 116, doar pentru cazul domeniului multiplu conex, se obțin, în locul relațiilor (1), sisteme infinite de ecuații.

Autorii citați au studiat aceste sisteme pentru plane cu două goluri.

E. Soluții obținute cu ajutorul potențialilor de tensiune și cuple de tensiune

§ 118. Incluziune cilindrică într-un cîmp uniaxial de tensiune

Vom ilustra metoda de rezolvare cu ajutorul reprezentărilor potențiale (1), (2) din § 108 prin problema plăcii plane cu un gol cilindric gol sau umplut cu un material diferit decît cel al plăcii, în cadrul teoriei modelului spectral polar general.

Vom admite condițiile la infinit (1) din § 113. Introducînd un sistem de coordonate polare, vor avea loc relațiile (6) din § 112 iar ecuațiile (3) din § 108 în care luăm $H = 0$ devin

$$\begin{aligned} 2q(1 - h^2\Delta) G_{,r} &= -(\varkappa + 1) l^2 \Delta F_{,\theta}/r, \\ 2q(1 - h^2\Delta) G_{,\theta}/r &= (\varkappa + 1) l^2 \Delta F_{,r}, \end{aligned} \tag{1}$$

$\varkappa + 1$ are expresia $(4)_1$, din § 111.

Este clar în baza ecuațiilor menționate sau celor de mai sus că F și G satisfac ecuațiile diferențiale

$$\Delta\Delta F = 0; \quad (1 - h^2\Delta)\Delta G = 0. \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Reprezentările (2) din § 108 iau forma polară

$$\nu_{rr} = \partial F/r\partial r + \partial^2 F/r^2\partial\theta^2 - \partial\,(\partial G/r\partial\theta)/\partial r,$$

$$\nu_{\theta\theta} = \partial^2 F/\partial r^2 + \partial\,(\partial G/r\partial\theta)/\partial r,$$

$$\nu_{\theta r} = -\partial\,(\partial F/r\partial\theta)/\partial r - \partial G/r\partial r - \partial^2 G/r^2\partial\theta^2. \tag{3}$$

$$\nu_{r\theta} = -\partial\,(\partial F/r\partial\theta)/\partial r + \partial^2 G/\partial r^2,$$

$$\mu_r = \partial G/\partial r,\ \mu_\theta = \partial G/r\partial\theta, \qquad \nu_{zz} = \nu\,(\nu_{\theta\theta} + \nu_{rr}).$$

Condițiile la limită se formulează astfel:

— pe conturul golului circular $r = R$:

$$\nu_{rr} = 0, \quad \nu_{\theta r} = 0, \quad \mu_r = 0; \tag{4}$$

— la infinit $(r \to \infty)$: $\nu_{rr} = P\,(1 + \cos 2\theta)/2$

$$\nu_{\theta\theta} = P\,(1 - \cos 2\theta)/2, \quad \nu_{r\theta} = \nu_{\theta r} = 0, \quad \mu_r = \mu_\theta = 0.$$

P se va considera ca în § 113.

Soluțiile

$$F = Pr^2\,(1 - \cos 2\theta)/4 + A\,\log\,r + (B/r^2 + C)\,\cos 2\theta,$$

$$G = [D/r^2 + EK_2(r/h)]\sin\,2\theta, \tag{5}$$

în care K_2 este funcția lui Bessel modificată de speța 2 și ordinul 2 (vezi (3) din § 112), satisfac ecuațiile (1) și (2) dacă este îndeplinită condiția

$$2\,(\varkappa + 1)\,l^2 C = qD. \tag{6}$$

De asemenea, în baza condițiilor la limită (4) rezultă ecuațiile algebrice

$$P/2 = A/R^2 = 0,$$

$$P/2 - 4C/R^2 - 6\,(B - D)/R^4 + 2E\,[3h\,K_0\,(R/h)/R +$$

$$+ (1 + 6h^2/R^2)\,K_1\,(R/h)]/hR = 0, \tag{7}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$-P/2 - 2C/R^2 - 6(B-D)/R^4 + E\,[6hK_0(R/h)/R +$$

$$+ (1 + 12h^2/R^2)\,K_1(R/h)]/hR = 0,$$

$$-2D/R^3 - E\,[2hK_0(R/h)/R + (1 + 4h^2/R^2)\,K_1(R/h)]/h = 0,$$

a căror rezolvare dă

$$A = -PR^2/2,\quad B = PR^4(q - F_1)/4(q + F_1),$$

$$C = PR^2 q/2(q + F_1),\quad D = 4\,(1-\nu)\,R^2 h^2 P/(q + F_1),$$

$$E = -pR^2 hF_1/(q + F_1)\,K_1(R/h). \tag{8}$$

F are expresia dată în (4) de la § 113.

Se obține pe conturul golului tensiunea

$$\nu_{\theta\theta} = P(1 + 2q\cos 2\theta/(q + F_1)) \tag{9}$$

iar maximul acesteia, pentru $\theta = \pm \pi/2$, este

$$(3q + F_1)P/(q + F_1). \tag{10}$$

Aceste rezultate, care se referă la o problemă plană, se deduce din cele relative la problema mediană luînd $\varepsilon = 1$, $q = 1$, în (6) de la § 113.

Coeficientul de concentrare a tensiunii este

$$K = \max\ \nu_{\theta\theta}/P = (3q + F_1)/(q + F_1) \tag{11}$$

și este maxim pentru $F_1 = 0$. Această condiție are loc pentru $h \to 0$, caz în care $K = 3$ este un număr independent de q.

F_1 este maxim pentru $R/h \to 0$ cînd $F_1 = (\varkappa + 1)\,h^2/2l^2$. Pentru

$$h = l,\quad \nu = 0 \tag{12}$$

rezultă $F_1 = 2$, iar

$$K = (3q + 2)/(q + 2). \tag{13}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cadrul teoriei mediilor cu polaritate constrînsă $q = 1$ iar $K = 5/3$ reprezintă o valoare de 1,8 mai redusă decît în teoria simetrică. În general vom avea următoarele valori :

$k = \alpha/\beta$	$m = \frac{\mathcal{M} + \mathcal{A}}{M + A}$	$q = \frac{k}{km - 1}$	K_{min}
-1 (mediu spectral neomogen)	-1	∞	3
-1 (mediu cu polaritate restrînsă)	0	1	$\frac{5}{3}$
∞		$1/m$	$\frac{3 + 2m}{1 + 2m}$

În diagrama din figura 121 apar valorile lui K în funcție de raportul R/h și $l^2/h^2 q = Q$.

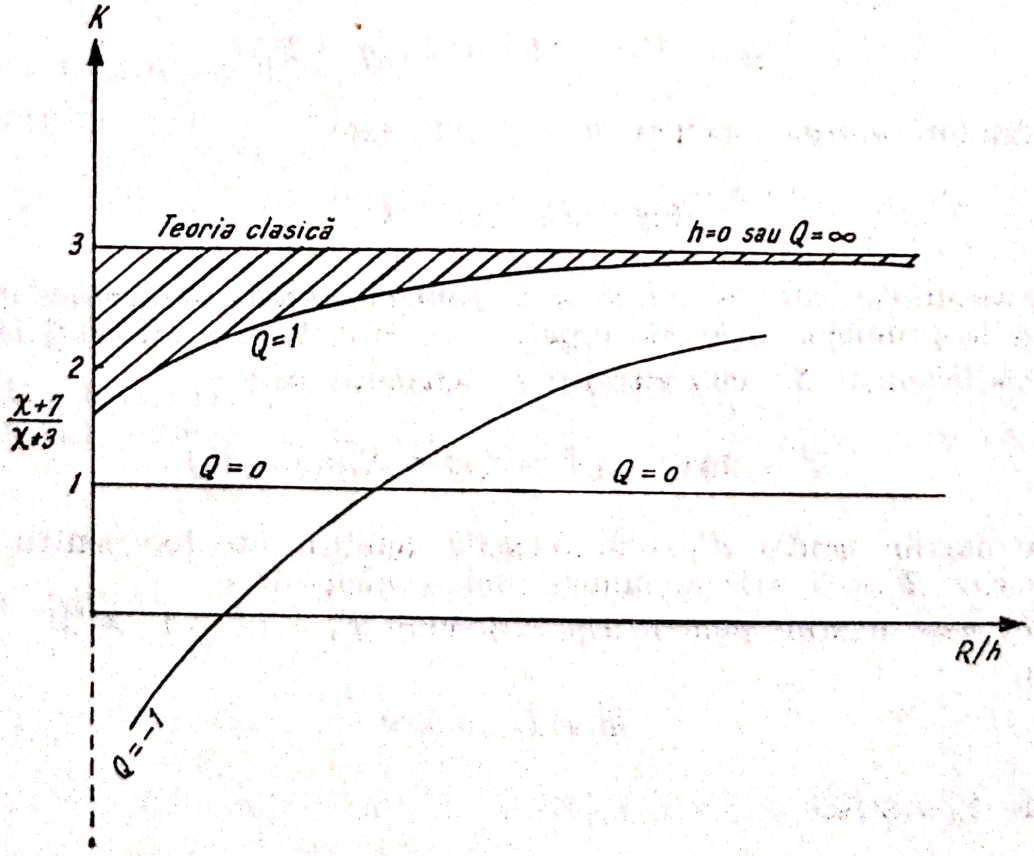


Fig. 121

Tensiunile au expresiile:

$$\nu_{rr} = P(1 + \cos 2\theta)/R + A/r^2 - [6B/r^4 + 4C/r^2 - 6D/r^4]\cos 2\theta +$$

$$+ 2E[(1 + 6h^2/r^2)K_1(r/h) + 3hK_0(r/h)/r]/hr,$$

$$\nu_{\theta\theta} = P(1 - \cos 2\theta)/2 - A/r^2 + 6(B/r^4 - D/r^4)\cos 2\theta -$$

$$- 2E[3hK_0(r/h)/r + (1 + 6h^2/r^2)K_1(r/h)]\cos 2\theta/hr,$$

$$\nu_{\theta r} = -[P/2 + 6B/r^4 + 2C/r^2 - 6D/r^4]\sin 2\theta +$$

$$+ E[6hK_0(r/h)/r + (1 + 12h^2/r^2)K_1(r/h)]\sin 2\theta/hr,$$

$$\nu_{r\theta} = -[P/2 + 6B/r^3 + 2C/r^2 - 6D/r^4]\sin 2\theta +$$

$$+ E[(1 + 6h^2/r^2)K_0(r/h) + (3h/r + 12h^3/r^3)K_1(r/h)]\cdot \sin 2\theta/hr,$$

$$\mu_r = -2D\sin 2\theta/r^3 - E[2hK_0(r/h) + (1 + 4h^2/r^2)K_1(r/h)]\sin 2\theta/h,$$

$$\mu_\theta = \{2D/r^3 + 2E[K_0(r/h) + DhK_1(r/h)/r]\}\cos 2\theta.$$

§ 119. Incluziune cilindrică

În cazul unei incluziuni caracterizate prin constante elastice diferite de materialul care o înconjoară, material ce se presupune nelimitat distribuit în spațiu, se pot determina concentrările de tensiune în funcție de raporturile μ_1/μ_2, l_1/l_2, h_1/h_2 între modulii de lunecare și lungimile caracteristice date de polaritate.

Condițiile pe conturul $r = R$ al incluziunii se scriu astfel

$$\nu_{rr1} = \nu_{rr2}, \quad \nu_{\theta r1} = \nu_{\theta r2}, \quad \mu_{r1} = \mu_{r2},$$
$$u_{r1} = u_{r2}, \; v_{r1} = v_{r2}, \; fo_1 + g\omega_1 = fo_2 + g\omega_2. \tag{1}$$

Indicii 1, 2 raportează mărimile la cele două medii. Condițiile corespund ipotezei că pe granița comună, rotațiile particulelor elementelor structurale sînt corelate liniar, f și g fiind constante. Vom lua $f = 0$, $g = 1$ astfel că pe contur vor fi egale rotațiile constrînse ω.

Scanned with OKEN Scanner

În interiorul incluziunii ($0 \leqslant r \leqslant R$) vom lua soluțiile

$$F = ar^2 + br^2 \cos 2\theta + cr^4 \cos 2\theta,$$
$$G = [ar^2 + rI_2(\rho_1)] \sin 2\theta, \qquad \text{pentru } \rho_1 = \rho/h_1, \tag{2}$$

iar în exterior ($r \geqslant R$)

$$F = Pr^2(1 - \cos 2\theta)/4 + A \log r + (B/r^2 + C) \cos 2\theta$$
$$G = [Dr^2 + EK_2(\rho_2)] \sin 2\theta, \qquad \text{pentru } \rho_2 = r/h_2, \tag{3}$$

I și K fiind funcțiile Bessel modificate de speța 1 și 2. Menționăm relațiile

$$I_n'(x) = -[I_{n+1}(x) - I_{n-1}(x)]/2,$$
$$I_{n+1}(x) = 2nI_n(x)/x - I_{n-1}(x). \tag{4}$$

Constantele C și D satisfac relația (6) din § 118 iar $qd = 6(\varkappa + 1) l^2 c$. Constantele C și D, conform (1) din § 118, sînt corelate prin condiția

$$24(1 - \nu) l^2 C = qD. \tag{5}$$

Vom utiliza formulele de reprezentare pentru tensiuni (3) din § 118 și cele pentru deplasări (9) din § 118 scrise sub formă polară

$$2\mu u_r = -(F_{,r} + G_{,\theta}/r) + 4(1 - \nu) p_r,$$
$$2\mu u_\theta = -(F_{,\theta}/r - G_{,r}) + 4(1 - \nu) p_\theta, \tag{6}$$

p_r și p_θ sînt componentele polare ale funcțiilor definite în (10) de la § 108,

$$p_r = p \cos\theta + q \sin\theta, \quad p_\theta = p \sin\theta - q \cos\theta \tag{7}$$

și care, în cazul funcțiilor (2) și (3), au expresiile:

— în interior:

$$p = ax + 3c(x^3/3 - xy^2), \quad q = ay + 3c(x^2 y - y^3/3),$$
$$p_r = ar + cr^3 \cos 2\theta, \quad p_\theta = -cr^3 \sin 2\theta; \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

— în exterior :

$$4p = Px + 2\,Cx/r^2,\quad 4q = Py - 3Cy/r^2,$$
$$4p_r = Pr + 2C(x^2 - y^2)/r^3,\quad 4p_0 = 4Cxy/r^3. \tag{9}$$

Rezultă următoarele relații :

— în interiorul incluziunii

$$\nu_{rr} = 2a - 2\{b + d + e[\rho_1 I_1(\rho_1) - 3I_2(\rho_1]/r^2\}\cos 2\theta,$$
$$\nu_{\theta\theta} = 2a + 2\{b + d + 6cr^2 + e[\rho_1 I_1(\rho_1) - 3I_2(\rho_1)]/r^2\}\cos 2\theta,$$
$$\nu_{\theta r} = \{2b + 2d + 6cr^2 - e[\rho_1 I_1(\rho_1) - 6I_2(\rho_1)]/r^2\}\sin 2\theta,$$
$$\nu_{r\theta} = \{2b + 2d + 6cr^2 - e[\rho_1 I_1(\rho_1) - (6 - \rho_1^2) I_2(\rho_1)]/r^2\}\sin 2\theta,$$
$$\mu_r = r\{2d + e[\rho_1 I_1(\rho_1) - 2I_2(\rho_1)]/r^2\}\sin 2\theta,$$
$$\mu_\theta = 2r[d + eI_2(\rho_1)/r^2]\cos 2\theta,$$
$$2\mu_1 u_{r1} = 2r[(1-2\nu)\,a - (b + d + 2\nu cr^2 + eI_2(\rho_1)/r^2)\cdot\cos 2\theta]_1,$$
$$2\mu_1 u_{\theta 1} = r[2b + 2d + 2cr^2(3 - 2\nu) + \tag{10}$$
$$+ e(\rho I_1(\rho) - 2I_1(\rho_1))/r^2]\sin 2\theta,$$
$$2\mu_1\omega_1 = qh^2\rho_1^2(d + eI_2(\rho_1)/r^2)\sin 2\theta/2l^2 +$$
$$+ k\mu_1(1/\alpha - m/\mu)_1 eI_2(\rho_1)\sin 2\theta/2\,h_1^2;$$

— în exteriorul incluziunii

$$\nu_{rr} = P/2 + A/r^2 - 2\{-Pr^2/4 + 3B - 3D + 2Cr^2 -$$
$$- Er^2[\rho_2 K_1(\rho_2) + 3K_2(\rho_2)]\}\cdot\cos 2\theta,$$
$$\nu_{\theta\theta} = P/2 - A/r^2 + 2[-Pr^4/4 + 3B - 3D -$$
$$- Er^2(\rho_2 K_1(\rho_2) + 3K_2(\rho_2))]\cos 2\theta/r^4,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\nu_{\theta r} = -\,[Pr^4/2 + 6B - 6D + 2Cr^2 - \tag{11}$$

$$- Er^2(\rho_2 K_1(\rho_2) + 6K_2(\rho_2))]\sin 2\theta,$$

$$\nu_{r\theta} = -\,[Pr^4/2 + 6B - 6D + 2Cr^2 -$$

$$- Er^2(\rho_2 K_1(\rho_2) + (6 + \rho_2^2) K_2(\rho_2))]\ \sin\ 2\theta,$$

$$\mu_r = -\,[2D + Er^2(\rho_2 K_1(\rho_2) + 2K_2(\rho_2))]\sin 2\theta/r^3,$$

$$\mu_\theta = 2\,[D + Er^2 K_2(\rho_2)]\cos\ 2\theta/r^3,$$

$$2\mu_2 u_{r2} = Pr(1 - 2\nu_2)/2 - A/r + 2\,[Pr^4/4 + B - D +$$

$$+ C(1 - \nu_2) r^2 - Er^2\ K_2(\rho)]_2 \cos\ 2\theta/r^3,$$

$$2\mu_2 u_{\theta 2} = [-\,Pr^4/2 + 2B - 2D + 2(2 - \nu) Cr^2 -$$

$$- Er^2(\rho K_1(\rho) - 2K_2(\rho))]_2\ \sin\ 2\theta/r^3,$$

$$2\mu_2 \omega_2 = \{qh^2\ \rho^2 (D + Er^2 K_2(\rho))/2r^4 l^2 +$$

$$+ k\mu(1/\alpha - m/\mu) EK_2(\rho)/2\ h^2\}_2 \sin 2\theta.$$

Condițiile (1) se scriu atunci astfel:

$$2a = P/2 + A/R^2 - 2\{b + d + e[\lambda I_1(\lambda) - 3I_2(\lambda)]_1/R^2\} =$$

$$= -\,2[-\,PR^2/4 + 3B - 3D + 2CR^2 - eR^2(\lambda K_1(\lambda) + 3K_2(\lambda)]/R^4,$$

$$2(b + d + 3cR^2) - e[\lambda I_1(\lambda) - 6I_2(\lambda)]_1/R^2 = -\{PR^1/2 +$$

$$+ 6B - 6D + 2CR^2 - ER^2[\lambda K_1(\lambda) + 6K_2(\lambda)]_2\}/R^4, \tag{12}$$

$$R\{2d + e[\lambda I_1(\lambda) - 2I_2(\lambda)]/R^2\} = -\{2D +$$

$$+ ER^2[\lambda K_1(\lambda) + 2K_2(\lambda)]_2/R^3,$$

$$2R(1 - 2\nu_1) a/\mu_1 = \{PR(1 - 2\nu_2)/2 - A/R\}/\mu_2 - 2R(b + d +$$

$$+ 2\nu cR^2 + eI_2(\lambda)/R^2)_1/\mu_1 = 2[PR^1/4 + B - D +$$

$$+ C(1 - \nu) R^2 - ER^2 K_2(\lambda)]_3/R^3\mu_2,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\{R[2b + 2d + 2c(3 - 2\nu)R^2 + e(\lambda I_1(\lambda) - 2I_2(\lambda))/\lambda^2\}/\mu_1 =$$

$$= \{-PR^4/2 + 2B - 2D + 2(2 - \nu)RC - ER^2(\lambda K_1(\lambda) -$$

$$- 2K_2(\lambda))\}_2/R^3\mu_2,$$

$$\{q(h\lambda/l)^2(d + eI_2(\lambda))/R^2\mu + K(1/\alpha - m/\mu)eI_2(\lambda)/2h^2\}_1/\mu_1 =$$

$$= \{q(h\rho/l)^2(D + ER^2K_2(\lambda))/2R^4 + \mu k(1/\alpha - m/\mu))EK_2(\lambda)/2h^2\}_2/\mu_2$$

la care adăugăm (6) din § 118 și (8).

Un prim grup de soluții ale condițiilor (1) pentru ($f = 0$, $g = 1$) este atunci

$$a = \frac{P}{2}\frac{1 - \nu_2}{1 + (1 - 2\nu_1)g}, \quad A = -\frac{PR^2}{2}\left[1 - \frac{2(1 - \nu_2)}{1 + (1 - 2\nu_1)g}\right] \tag{13}$$

în care $q = \mu_2/\mu_1$.

Restul constantelor se pot determina pe cale numerică. Vom da expresiile acestor constante pentru cazul particular al rotațiilor constrînse ($k = -1$, $m = 0$, $q = 1$, $h = l$, $o = \omega$) astfel cum au fost stabilite de R. I. Hartranft și G. Sih [1]

$$b = P[2(1 - \nu_2)N + 2g(1 - \nu_1)F_2Q_1 -$$

$$- (1 - g)F_2(3 - 2Q_1 + 6M_1 - 3F_1)]/2\Delta, \tag{14}$$

$$B = -PR^4(1 - g)\{(1 + F_2)N + gL_2F_2(1 + 3F_1 - 6M_1)(2 + Q_2) -$$

$$- 4g(1 - \nu_2)F_2(2 - Q_1 - gL^2(2 + Q_2))/(1 - g)\}/4\Delta,$$

$$c = P(1 - g)F_2(2 - Q_1)/2\Delta R^2, \quad C = PR^2(1 - g)N/2\Delta, \tag{15}$$

$$D = PR^2(1 - g)NM_2/2\Delta, \quad d = P(1 - g)F_2(6M_1 - 3F_1)/2\Delta,$$

$$e = -PR^2(1 - g)F_2[1 + 4g(1 - \nu)/(1 - g)]/2\Delta I_2(\lambda_1),$$

$$E = -PR^2(1 - g)M_2[N + gL^2Q_2(1 + 3F_1 - 6M_1 +$$

$$+ 4g(1 - \nu_1)/(1 - g)]/2\Delta K_2(\lambda_2)$$

Scanned with OKEN Scanner

în care

$$\Delta = g(1-g)L^2F_2Q_2[1+3F_1-6M_1+4g(1-\nu_1)/(1-g)]-$$
$$-[3-4\nu_2-F_2+g(1+F_2)]N,$$
$$N = 4g(1-\nu_1)[1-Q_1-gL^2(1+Q_2)]/(1-g)+2-Q_1-$$
$$-[1+gL^2(1+Q_2)](1+3F_1-6M_1), \qquad (16)$$
$$Q_1 = \lambda_1 I_1(\lambda_1)/2I_2(\lambda_1),\quad Q_2 = \lambda_2 K_1(\lambda_2)/2K_2(\lambda_2),$$
$$L = l_2/l_1,\quad M_i = 8(1-\nu_i)/\lambda_i^2,$$
$$F_i = Q_i M_i,\quad \lambda_i = R/l_i,\quad (i=1,\ 2).$$

Notînd

$$T_1 = \nu_{\theta\theta 1},\quad T_2 = \nu_{\theta\theta 2},\quad \mathfrak{R} = \nu_{rr},\quad (r=R), \qquad (17)$$

rezultă, conform relaţiilor (10) şi (11), tensiunile pe graniţa $r = R$

$$T_1/P = (1-\nu_2)/[1+(1-2\nu)g]+$$
$$+(1-\nu_2)2\cos 2\theta[N+3(1-g\nu_1)F_2(2-Q_1)/(1-\nu_2)]/\Delta,$$
$$T_2/P = [\nu_2+(1-2\nu_1)g]/[1+(1-2\nu_1)g]- \qquad (18)$$
$$-2\cos 2\theta[(\nu_2-g)N-3g(1-\nu_1)F_2(2-Q_1)]/\Delta,$$
$$\mathfrak{R}/P = (1-\nu_2)/[1+(1-2\nu_1)g]-(1-\nu_2)2\cos 2\theta[N+$$
$$+3g(1-\nu_1)F_2(2-Q_1)/(1-\nu_2)]/\Delta.$$

Soluţiile în cazul lunecării pure de mărime s la infinit se obţin, analog, sub forma

$$T_1/s = (1-\nu_2)4\sin 2\theta[N+3(1-g\nu_1)F_2(2-Q_1)/(1-\nu_2)]/\Delta,$$
$$T_2/s = -4\sin 2\theta[(\nu_2-g)N-3g(1-\nu_1)F_2(2-Q_1)]/\Delta, \qquad (19)$$
$$\mathfrak{R}/s = -(1-\nu_2)4\sin 2\theta[N+3(1-\nu_1)gF_2(2-Q_1)/(1-\nu_2)]/\Delta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $g = \infty$ se obține un rezultat stabilit de R.D. Mindlin, iar pentru $g = 0$ avem :

a) În cazul unei tensiuni simple P

$$T_2/P = \nu_2[1 + 2\cos 2\theta/(3 - 4\nu_2 - F_2)],$$
$$\mathfrak{R}/P = (1 - \nu_2)\ 4\sin\ 2\theta/(3 - 4\nu_2 - F_2). \tag{20}$$

b) În cazul unei lunecări pure s :

$$T_2/s = \nu_2\ 4\sin 2\theta/(3 - 4\ \nu_2 - F_2),$$
$$\mathfrak{R}/s = (1 - \nu_2)\ 4\sin 2\theta/(3 - 4\nu_2 - F_2). \tag{21}$$

Pentru $l_1 = l_2 = 0$ se reobțin rezultatele teoriei simetrice. Tensiunile radiale sînt mai mari decît cele tangențiale și deci factorul de concentrare efectiv este $\mathfrak{R}/P$ pentru $\theta = 0$, pentru simpla tensiune și $\mathfrak{R}/s$ pentru $\theta = 45°$ pentru lunecare pură (fig. 122).

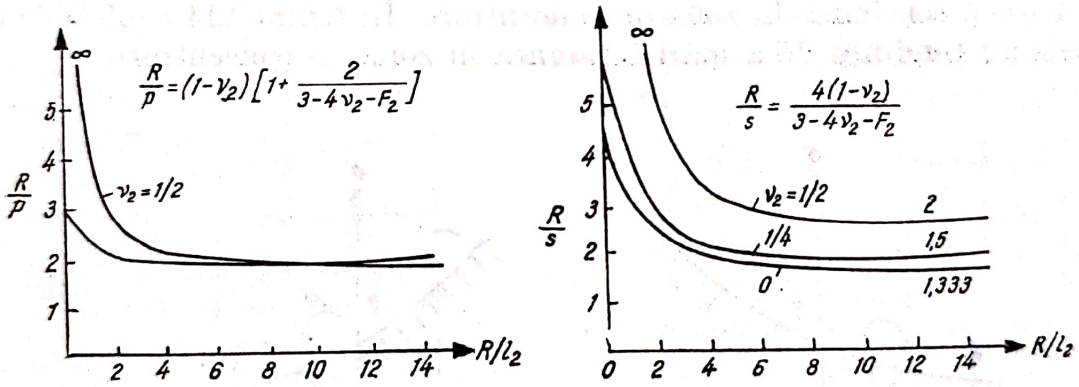


Fig. 122

Se arată astfel că, pe cînd pentru $g = 0$, $R/l_i = 3$, factorul de concentrare al tensiunilor în jurul unei găuri este 13—20% mai scăzut în teoria simetrică decît cea cu rotații constrînse; în cazul unei incluziuni rigide, factorul crește cu 10—50%.

În cazul lunecării pure, factorul de concentrare pentru o gaură circulară este 15—30% mai mare decît în teoria simetrică, iar în cazul incluziunii rigide de 40—75%.

În cazul general, determinarea mărimii tensiunilor maxime este mai dificilă dar se poate efectua numeric.

Scanned with OKEN Scanner

Se poate arăta pe baza rezultatelor obținute de R. I. Hartranft și G. S. Sih [1] că, pentru $r = R$, avem

$$\begin{aligned} \nu_{\theta\theta} &> \nu^{*}_{\theta\theta} && \text{dacă } \partial\mu_0/\partial r < 0 \\ ,, &< ,, && \text{dacă } ,, > 0 \\ \nu_{rr} &> \nu^{*}_{rr} && \text{dacă } ,, < 0 \\ ,, &< ,, && \text{dacă } ,, > 0. \end{aligned} \tag{22}$$

ν^{*} reprezintă tensiunile din teoria clasică a elasticității.

Aceste condiții admit o interpretare fizică corespunzînd modului în care tensiunile și cuplele de tensiune conduc la efecte de suprapunere sau anihilare a acțiunii lor mecanice. Astfel, în figura 123, apare faptul că pentru $d\mu/ds > 0$, cuplul de tensiune pozitiv aplicat pe elementul de suprafață de separare a incluziunii de placă plană (sau de corp) tinde să reducă tensiunea în zona de concentrare. În figura 124 cuplele de tensiune au tendința de a mări tensiunea în zona de concentrare.

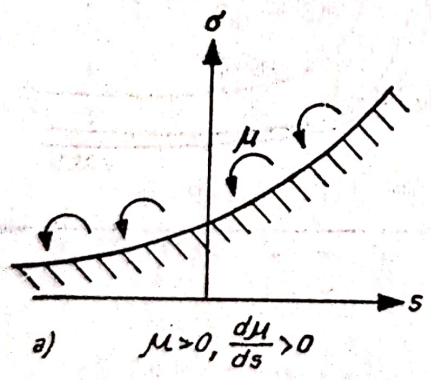


Fig. 123

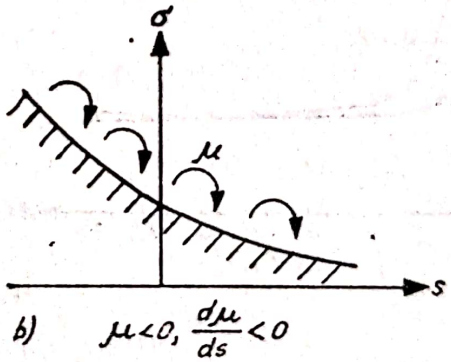


Fig. 124

În obținerea rezultatelor teoriei clasice, soluțiile teoriei mediilor cu rotații constrînse nu pot fi aplicate în mod nemijlocit, datorită constrîngerii impuse de condiția $\omega = o$. Pentru acest motiv, teoria mai generală apare mai naturală, soluțiile respective prezentînd mult mai mult interes practic și teoretic.

Y. Weitsman a rezolvat de asemenea această problemă cu ajutorul calculului cu mașinile electronice pe baza condițiilor de tipul (12).

Scanned with OKEN Scanner

În lucrarea citată s-au făcut calculele cu ajutorul unui calculator electronic pentru cîte opt ecuații, luînd valorile transpuse în diagramele alăturate (fig. 125) și (fig. 126).

Se disting următoarele cazuri tipice.

1. Incluziunea nu este caracterizată de existența unei substructuri ($\lambda_1 \to \infty$, $l_1 > 0$) astfel că $\mu^{(1)}(r, \theta) = 0$ pentru $0 \leqslant r \leqslant R$ și pe contur. Condiția asociată la limită se scrie $\mu_{r2}(R, \theta) = 0$ iar ultima trebuie eliminată în sensul teoriei simetrice (fig. 127) și (fig. 128).

2. Exteriorul nu este caracterizat prin substructură ($\lambda_2 \to \infty$, $l_2 \to 0$, $\mu_r^{(2)}(R, \theta) = 0$) pentru $R \leqslant r < \infty$; condiția la limită pentru cuplele de tensiune se scrie $\mu_{r1}(R, \theta) = 0$ iar ultima din (1) se elimină. Se constată că tensiunile în exterior și interior se reduc la cele din teoria simetrică, abstracție făcînd de l_1. Factorii de concentrare a tensiunii corespund liniilor orizontale, $\lambda_2 = \infty$ (din fig. 125 și fig. 126).

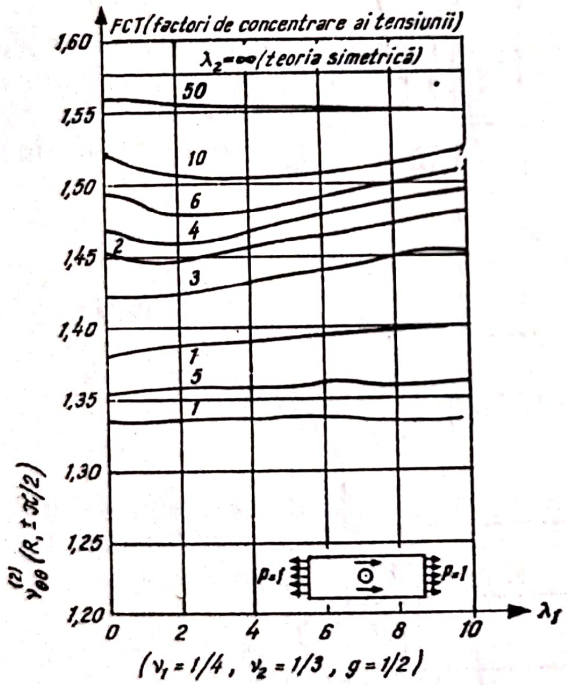


Fig. 125

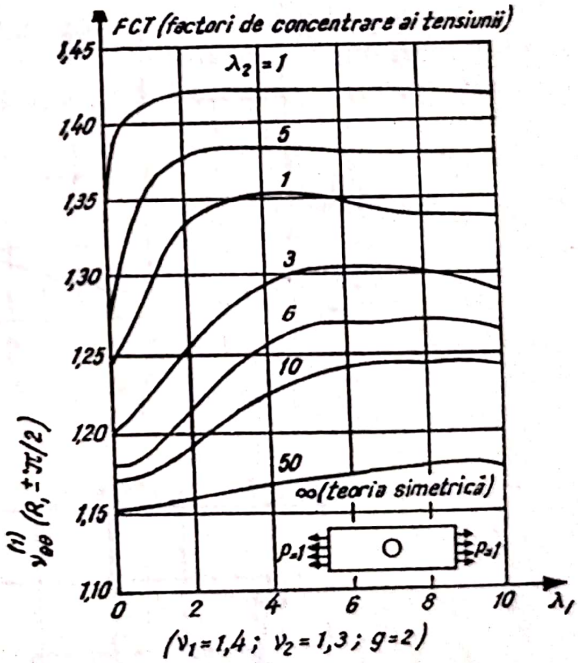


Fig. 126

3. Modulii de lunecare sînt egali ($\mu_1 = \mu_2$, $g = 1$). În acest caz nu apare o discontinuitate pentru $r = R$ iar factorul de concentrare se reduce la 1.

4. Incluziunea rigidă ($1/g = \infty$). În acest caz condiția de rigidizare a conturului $r = R$ este $u_{r2}(R, \theta) = u_{\theta 2}(R, \theta) = \omega_{r\theta 2}(R, \theta) = 0$.

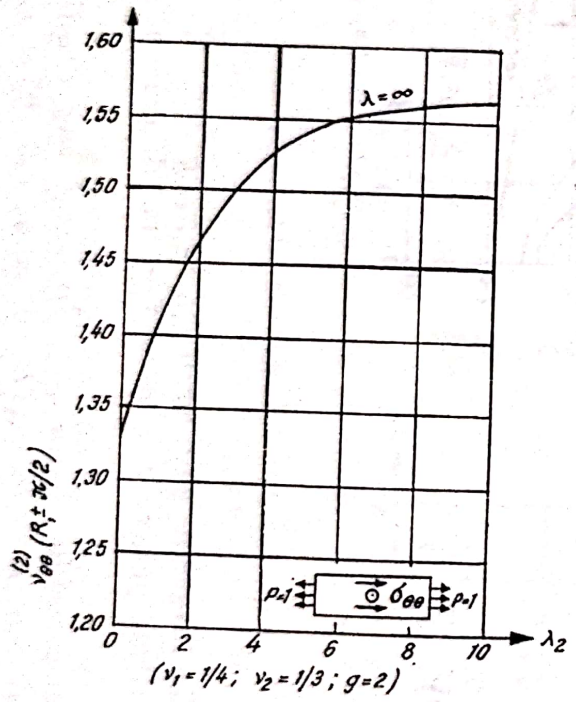
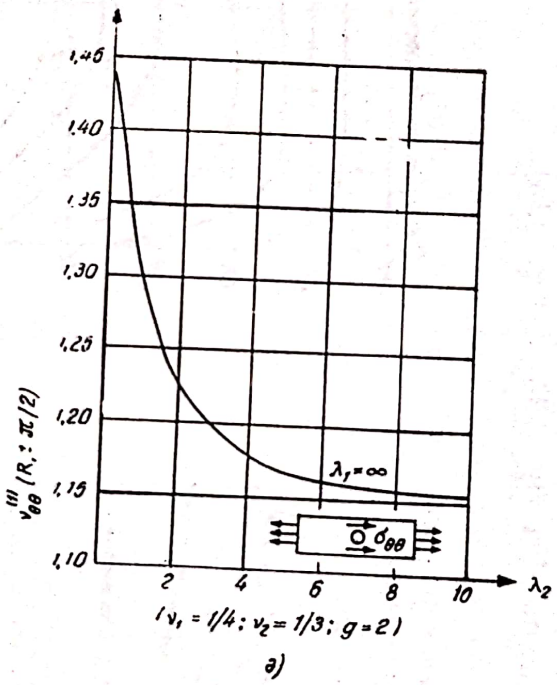


Fig. 127



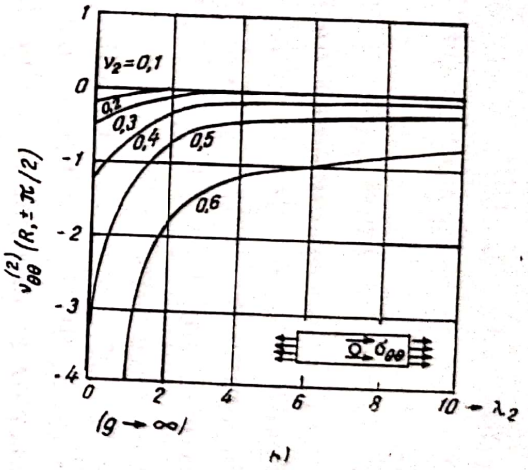


Fig. 128

F. Semiplanul elastic sub acțiunea unor sarcini normale sau tangențiale

§ 120. Transformarea Fourier a ecuațiilor fundamentale

Vom considera semiplanul elastic $0 < x < \infty$, $-\infty < x < \infty$ mărginit de dreapta C, $(x = 0)$. Corespunzător unei încărcări cu o sarcină normală sau tangențială pe contur intervin condițiile la limită

$$A: \nu_{xx}(0, y) = -S(y), \quad \nu_{yx}(0, y) = 0, \quad \mu_x(0, y) = 0, \quad (-\infty \leqslant y \leqslant \infty), \tag{1}$$

$$B: \nu_{yx}(0, y) = S(y), \quad \nu_{xx}(0, y) = 0, \quad \mu_x(0, y) = 0, \quad (-\infty \leqslant y \leqslant \infty).$$

Funcția de încărcare notată S va fi presupusă continuă pe porțiuni și absolut integrabilă în intervalul *) $(-\infty, \infty)$. Deoarece domeniul ocupat de corp nu este mărginit, mai impunem condițiile de regularitate ale soluțiilor la infinit

$$\nu_{xx}, \quad \nu_{xy}, \quad \nu_{yx}, \quad \nu_{yy}, \quad \mu_x, \quad \mu_y \to 0, \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty). \tag{2}$$

Pentru rezolvare se va utiliza transformata Fourier

$$\overline{f(p)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \exp(ipy)\, dy = \mathfrak{F}(f(y); p), \tag{3}$$

funcția $f(y)$ satisfăcînd condiții de regularitate **) în intervalul $(-\infty, \infty)$ iar p fiind un parametru real.

Transformata inversă este

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(p)} \exp(-ipy)\, dp. \tag{4}$$

Transformata derivatei de ordin N a funcției f este

$$\mathfrak{F}(f^{(N)}(y); p) = (-ip)^{(N)} \overline{f(p)} \tag{5}$$

*) În cazul teoriei mediului cu rotații constrînse, soluțiile au fost date în cadrul acestor ipoteze de Rokuro Muki și Eli Sternberg [1].

**) Sneddon, I. [1], [2].

Scanned with OKEN Scanner

dacă

$$f^{(k)}(y) = \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}y^k} \to 0 \text{ pentru } |y| \to \infty, \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1). \tag{6}$$

Vom mai admite condițiile satisfăcute de derivatele funcțiilor F și G

$$\frac{\partial^k F}{\partial y^k}, \frac{\partial^k G}{\partial y^k} \to 0 \text{ pentru } |x| \text{ sau } |y| \to \infty, \quad (k = 0, 1, 2, 3). \tag{7}$$

Atunci, conform relațiilor (5) și (6), vom putea construi transformatele acestor derivate.

Ecuațiile diferențiale (3) din § 108 în care luăm $H = 0$, satisfăcute de funcțiile F și G se transcriu astfel, în cazul problemei plane,

$$\begin{aligned} q(1 - h^2\bar{\Delta})\bar{G}_{,x} &= 2(1-\nu)l^2 ip\Delta\bar{F}, \\ -ipq(1 - h^2\bar{\Delta})\bar{G} &= 2(1-\nu)l^2\bar{\Delta}\bar{F}_{,x} \end{aligned} \tag{8}$$

și deci

$$\bar{\Delta}\bar{\Delta}\bar{F} = 0, \quad \bar{\Delta}(1 - h^2\bar{\Delta})\bar{G} = 0 \tag{9}$$

$\bar{\Delta}$ fiind operatorul $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 - p^2$, iar

$$1 - h^2\bar{\Delta} = 1 + h^2p^2 - h^2\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2. \tag{10}$$

Atunci reprezentarea (2) din § 108 cu ajutorul funcțiilor de tensiune se scrie astfel

$$\begin{aligned} &\bar{\nu}_{xx}(x, p) = -p^2\bar{F} + ip\bar{G}_{,x}, \quad \bar{\nu}_{yy}(x, p) = \bar{F}_{,xx} - ip\bar{G}_{,x}, \\ &\bar{\nu}_{xy}(x, p) = ip\bar{F}_{,x} + \bar{G}_{,xx}, \quad \bar{\nu}_{yx}(x, p) = ip\bar{F}_{,x} + p^2G, \\ &\bar{\mu}_x(x, p) = \bar{G}_{,x}, \quad \bar{\mu}_y(x, p) = -ip\bar{G}. \end{aligned} \tag{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

În baza formulelor (8) din § 108 deducem

$$\bar{u}(x, p)_{,x} = [-p^2\bar{F} + ip\bar{G}_{,x} - \nu\bar{\Delta}\bar{F}]/2\mu,$$

$$-ip\bar{v}(x, p) = [\bar{F}_{,xx} - ip\bar{G}_{,x} - \nu\bar{\Delta}\bar{F}]/2\mu, \tag{12}$$

$$-ip\bar{u}(x, p) + \bar{v}(x, p)_{,x} = -[-2pi\bar{F}_{,x} - \bar{G}_{,xx} - p^2\bar{G}]/2\mu$$

și deci

$$\bar{u}(x, p) = [(1-\nu)\bar{F}_{,xxx} - (2-\nu)p^2\bar{F}_{,x} + ip^3\bar{G}]/2\mu p^2,$$

$$\bar{v}(x, p) = [i(1-\nu)\bar{F}_{,xx} + i\nu p^2\bar{G} + p\bar{G}_{,x}]/2\mu p. \tag{13}$$

De asemenea, în baza ecuațiilor constitutive, rezultă

$$\bar{\nu}_{[xy]} = 2\alpha\bar{o} + 2\beta\bar{\omega} = -[\bar{G}_{,xx} - p^2\bar{G}]/2 \tag{14}$$

în care

$$2\bar{\omega} = \bar{v}_{,x} + ip\bar{u} = 2ip\bar{u} + \bar{\nu}_{,x} - ip\bar{u}) \tag{15}$$

și deci, în baza celor precedente,

$$2\alpha\bar{o} = -(1 + \beta/\mu)[\bar{G}_{,xx} - p^2\bar{G}]/2 + i\beta(1-\nu)[p^2\bar{F}_{,x} - \bar{F}_{,xxx}]/\mu p. \tag{16}$$

Vom considera de asemenea condițiile (1) la limită transformate în:

$$\text{Cazul A}: \bar{\nu}_{xx}(0, p) = -\bar{S}(p),\ \bar{\nu}_{yx}(0, p) = 0,\ \bar{\mu}_x(0, p) = 0; \tag{17}$$

$$\text{Cazul B}: \bar{\nu}_{yx}(0, p) = \bar{S}(p),\ \bar{\nu}_{xx}(0, p) = 0,\ \bar{\mu}_x(0, p) = 0$$

$$(\bar{\nu}_{xx}(x, p),\ \bar{\nu}_{yx}(x, p) \to 0 \text{ pentru } x \to \infty).$$

Soluțiile particulare $\bar{F}(x, p)$, $\bar{G}(x, p)$ pentru $0 < x < \infty$ ale ecuațiilor diferențiale transformate se obțin construind soluția completă a acestor ecuații iar apoi determinînd constantele de integrare.

Pentu aceasta alegem soluțiile

$$\bar{F}(x, p) = A\exp(-|p|x) + Bx\exp(-|p|x),$$

$$\bar{G}(x, p) = C\exp(-|p|x) + D\exp(-a(hp)x/h), \tag{18}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care intervine parametrul adimensional

$$a(hp) = (1 + h^2p^2)^{1/2}. \tag{19}$$

Substituind aceste funcții în ecuațiile diferențiale (8) care le conțin simultan avem

$$\begin{aligned} -q|p|C &= -4(1-\nu)\, l^2 ip|p|B, \\ -qi|p|C &= 4(1-\nu) l^2 p|p|B \end{aligned} \tag{20}$$

și deci

$$C = 4ip\,(1-\nu) l^2 B/q. \tag{21}$$

Vom considera atunci condițiile la limită pentru cazul A. Pentru aceasta calculăm expresiile (11) ale funcțiilor tensiunilor transformate conform (18):

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_{xx} &= -p^2[A\exp(-|p|x) + Bx\exp(-|p|x)] + \\ &+ ip[-|p|C\exp(-|p|x) - Da(hp)h^{-1}\exp(-a(hp)x/h)], \\ \bar{\nu}_{yx} &= ip[-|p|A\exp(-|p|x) + (1-x|p|)B\exp(-|p|x)] + \\ &+ p^2[C\exp(-|p|x) + D\exp(-a(hp)x/h)], \\ \bar{\mu}_x &= -|p|C\exp(-|p|x) - a(hp)h^{-1}D\exp(-a(hp)x/h). \end{aligned} \tag{22}$$

Condițiile la limită conduc la sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} C &= -a(hp)D/h|p|, \quad -p^2A = -\bar{S}, \\ -ip|p|A &+ ipB + p^2(C+D) = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

care admite soluțiile

$$\begin{aligned} A &= \bar{S}/p^2, \quad B = \bar{S}a(hp)/|p|b(hp), \\ b(hp) &= a(hp) + 4(1-\nu)l^2p^2(a(hp) - h|p|)/q, \end{aligned} \tag{24}$$

$$C = 4ip(1-\nu)l^2\bar{S}a(hp)/q|p|b(hp),$$

$$D = -h|p|ip4(1-\nu)l^2\bar{S}a(hp)/a(hp)q|p|b(hp). \tag{25}$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci (18) se vor formula în modul următor :

$$\overline{F}(x,\ p) = \overline{S} \exp\ (-\ |p|\ x)/p^2 + \overline{S}a(hp)\ x\ \exp\ (-\ |p|\ x)/|p|b(hp)$$

$$\overline{G}(x,\ p) = 4(1-\nu)\ il^2 p\overline{S}\ [-\ h|p|\ \exp(-\ a(hp)\ x/h) +$$

$$+\ a(hp)\ \exp\ (-\ |p|\ x)]/q|p|\ b(hp). \qquad (26)$$

În cazul B, se obține, în mod analog, formula

$$\overline{F}(x,\ p) = -\ i\overline{S}a(hp)\ x\ \exp\ (-\ |p|\ x)/pb(hp),$$

$$\overline{G}(x,\ p) = 4(1-\nu)\ l^2\overline{S}\ [-\ h|p|\ \exp\ (-\ a(hp)\ x/h +$$

$$+\ a(hp)\ \exp\ (-\ |p|\ x)]. \qquad (27)$$

Funcțiile originale ale tensiunilor și cuplelor de tensiune rezultă, aplicînd formule de inversiune a transformatei Fourier

$$\nu_{xx}(x,\ y) = -\int_{-\infty}^{\infty} [p^2\overline{F} - ip\overline{G}_{,x}]\ \exp\ (-\ ipy)\ dp/2\pi,$$

$$\nu_{yy}(x,\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} [\overline{F}_{,xx} - ip\overline{G}_{,x}]\ \exp\ (-\ ipy)\ dp/2\pi, \qquad (28)$$

$$\nu_{yx}(x,\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} [ip\overline{F}_{,x} + p^2\overline{G}]\ \exp\ (-\ ipy)\ dp/2\pi,$$

$$\nu_{xy}(x,\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} [ip\overline{F}_{,x} + \overline{G}_{,xx}]\ \exp\ (-\ ipy)\ dp/2\pi,$$

$$\mu_x\ (x,\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}_{,x}\ \exp\ (-\ ipy)\ dp/2\pi,$$

$$\mu_y\ (x,\ y) = -\ i\int_{-\infty}^{\infty} p\overline{G}\ \exp\ (-ipy)dp/2\pi,$$

$$u(x,\ y)\ = \int_{-\infty}^{\infty} [(1-\nu)\ \overline{F}_{,xxx} - (2-\nu)\ p^2\overline{F}_{,x} + ip^3\overline{F}]\cdot$$

$$\cdot \exp\ (-\ ipy)\ dp/4\pi\mu p^2,$$

$$v(x,\ y)\ =\int_{-\infty}^{\infty}[i(1-\nu)\,\overline{F}_{,xx}+i\nu p^2\overline{F}+p\overline{G}_{,x}]\cdot$$

$$\cdot\exp(-ipy)\,\mathrm{d}p/4\pi\mu p.$$

Substituim expresiile funcțiilor de tensiune (26) în integralele precedente (28) și descompunem funcția transformată a solicitării pe contur $\overline{S}$ într-o parte reală și imaginară

$$\overline{S}=q(p)+iq'(p), \tag{29}$$

unde, în baza definiției transformatei Fourier,

$$q(p)=\int_0^{\infty}[\overline{S}(x)+\overline{S}(-x)]\cos(p,\ x)\,\mathrm{d}x,$$

$$q'(p)=\int_0^{\infty}[\overline{S}(x)-\overline{S}(x)]\sin(px)\,\mathrm{d}x. \tag{30}$$

Vom observa că are loc condiția $q=0$ dacă $\overline{S}$ este o funcție impară iar $q'=0$ dacă $\overline{S}$ este pară. Vom calcula integralele precedente. În acest calcul ale cărui rezultate sînt date mai jos, se utilizează notațiile prescurtat (vezi (19) și (24))

$$a=a(hp),\ b=b(hp),$$

$$q^{+}(y,\ p)=q(p)\cos(py)+q'(p)\sin(py),$$

$$q^{-}(y,\ p)=q(p)\sin(py)-q'(p)\cos(py). \tag{31}$$

Rezultă următoarele tensiuni și cuple de tensiune corespunzătoare cazului A:

$$\nu_{xx}(x,\ y)=-\int_0^{\infty}\Big\{(b+apx)\exp(-px)+$$

$$+4(1-\nu)\frac{l^2}{q}ap^2[\exp(-ax/h)-\exp(-px)]\Big\}\,q^{+}(y,\ p)\,\mathrm{d}p/b\pi,$$

$$\nu_{yy}(x,\ y)=\int_0^{\infty}\{[b-2a+apx]\exp(-px)+$$

$$+4(1-\nu)l^2ap^2[\exp(-ax/h)-\exp(-px)]/q\}q^{+}(y,\ p)\,\mathrm{d}p/b\pi, \tag{32}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\nu_{yx}(x,\ y) = -\int_0^\infty \{(b - a + apx)\exp(-px) +$$

$$+ 4(1-\nu)l^2p^2[hp\exp(-ax/h) - a\exp(-px)]/q\}\cdot q^-(y,p)\,dp/b\pi,$$

$$\nu_{xy}(x,\ y) = -\int_0^\infty \{(b - a + apx)\exp(-px) +$$

$$+ 4(1-\nu)\,l^2hap[a\exp(-ax/h) - hp\exp(-px)]/q\}\cdot$$

$$\cdot q^-(y,\ p)\,dp/b\pi,$$

$$\mu_x = 4(1-\nu)\,l^2\int_0^\infty [\exp(-ax/h) - \exp(-px)]\,apq^-(y,\ p)dp/\pi qb,$$

$$\mu_y = -4(1-\nu)\,b^2\int_0^\infty [hp\exp(-ax/h) - a\exp(-$$

$$-px)]\,pq^+(y,\ p)\,dp/\pi qb. \qquad (33)$$

Pentru deplasări obținem expresiile

$$u(x,\ y) = \int_0^\infty \{[2(1-\nu) + px]\,a\exp(-px) +$$

$$+ 4(1-\nu)\,l^2hp^3[\exp(-ax/h) - \exp(-px)]/q\}q^+(y,\ p)\,dp/2\pi\mu bp,$$

$$v(x,\ y) = \int_0^\infty \{[b - 2(1-\nu)\,a + apx]\exp(-px) + \qquad (34)$$

$$+ 4(1-\nu)\,l^2p^2a[\exp(-ax/h) - \exp(-px)]/q\}\,q^-(y,\ p)dp/2\pi\mu bp.$$

În cazul B se deduce

$$\nu_{xz}(x,\ y) = \int_0^\infty \{px\exp(-px) + 4(1-\nu)\,l^2p^2\,[\exp(-ax/h) -$$

$$-\exp(-px)]/q\}\,apq^-(y,\ p)\,dp/b\pi,$$

$$\nu_{yy}(x,\ y) = \int_0^\infty \{(2 - px)\exp(-px) - 4(1-\nu)\,l^2p^2[\exp(-$$

$$- ax/h) - \exp(-px)]/q\}\, aq^-(y,\ p)\ \mathrm{d}p/b\pi, \qquad (35)$$

$$\nu_{yx}(x,\ y) = \int_0^\infty \{a(1 - px)\exp(-px) - 4(1-\nu)\,l^2p^2[hp\exp(-$$

$$- ax/h) - a\exp(-px)]/q\}\, q^+(y,\ p)\,\mathrm{d}p/b\pi,$$

$$\nu_{xy}(x,\ y) = \int_0^\infty \{(1 - px)\exp(-px) - 4(1-\nu)\,l^2p\,[a\exp(-$$

$$- ax/h) - hp\exp(-px)]/qh\}\, aq^+(y,\ p)\,\mathrm{d}p/b,$$

$$\mu_x(x,\ y) = 4(1-\nu)\,l^2\int_0^\infty [\exp(-ax/h) - \exp(-px)]\cdot$$

$$\cdot alpq^+(y,\ p)\,\mathrm{d}p/\pi bq, \qquad (36)$$

$$\mu_y(x,\ y) = 4(1-\nu)\,l^2\int_0^\infty [hp\exp(-ax/h) -$$

$$- a\exp(-px)]\,hpq^-(y,\ p)\,\mathrm{d}p/\pi pq.$$

În cazul mediilor cu rotații constrînse avem $h = l$, $q = 1$. Se obțin în acest caz soluțiile date în lucrarea citată *).

§ 121. Metode de determinare a tensiunilor și cuplelor de tensiune

Pentru determinarea tensiunilor și cuplelor de tensiune pe linia metodei menționate se presupun funcțiile solicitării (1) din § 120 definite cu ajutorul condițiilor

$$\overline{S}_\varepsilon = 0,\ (\varepsilon < |y| < \infty,\ 0 < \varepsilon < a);$$

$$P\overline{S}_\varepsilon(y) = 0,\ (0 \leqslant |y| \leqslant \varepsilon) \qquad (1)$$

*) R. Muki, E. Sternberg [1].

Scanned with OKEN Scanner

în care s-a notat rezultanta încărcării

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} S_\varepsilon(y)\,dy = P. \tag{2}$$

Înlocuind q^+, q^- prin q_ε^+, q_ε^- în formulele stabilite anterior (33) — — (36) din § 120 şi (1)—(2) se efectuează trecerea la limită pentru $\varepsilon \to 0$. Presupunînd apoi q_ε continuă în intervalul $[-\varepsilon, \varepsilon]$, rezultă

$$q_\varepsilon(p) \to P,\ q_\varepsilon'(p) \to 0 \tag{3}$$

(pentru $\varepsilon \to 0$, $0 \leqslant p \leqslant \infty$). Se deduce atunci că va trebui să substituim în integralele (28) şi (33) din § 120 pentru tensiuni şi cuple de tensiuni expresiile :

$$q^+(y,\ p) = P\ \cos\ (py),\ q^-(y,\ p) = P \sin\ (py). \tag{4}$$

Se va defini prin $\overline{D}$ regiunea $0 < y < \infty$, $-\infty < y \leq \infty$. Integralele (improprii) ce trebuie calculate vor fi convergente în $\overline{D}$ exceptînd origina, deoarece pentru $r \to 0$ integralele diverg, iar tensiunile sau cuplele devin nemărginite. Pentru acest motiv va fi util de a nota

$$\nu_{c\beta} = \int_0^\infty \tilde{\nu}_{\alpha\beta}\,dp,\ \mu_\alpha = \int_0^\infty \tilde{\mu}_\alpha\,dp,\ (\alpha = 1,\ 2), \tag{5}$$

$\tilde{\nu}$, $\tilde{\mu}$ reprezintă integranzii pentru ν, μ.

În baza celor precedente, aceşti integranzi sînt mărginiţi şi continui în $\overline{D}$ pentru $p \geqslant 0$ fixat. Se poate deduce atunci în cadrul metodei menţionate că singularităţile care apar în origina $x = y = 0$ provin din termenii care sînt de ordinul $o(p^{-1})$ în origină sau mai mare pentru $p \to \infty$. Aceşti termeni se obţin utilizînd dezvoltările pentru (19), (24), (31) din § 120.

$$a(hp) = ph + 1/2\,ph - 1/8\,p^3h^3 + o(p^{-5}),$$

$$b(hp) = [1 + 2(1 - \nu)\,l^2/qh^2]\,ph + (1 - (1 - \nu)\,l^2/2h^2]/2ph + O(p^{-3})$$

$$\exp\,[-a(hp)x/h] = \exp\,(-px)[1 - x(2ph^2 + x^2/8p^2h^4 +$$

$$+ (6h^2x - x^3)/48p^3h^6 + O(p^{-4})], \tag{6}$$

valabile pentru $h > 0$ fixat, $x \geqslant 0$ şi pentru $p \to \infty$. Din (32), de la § 120, se deduce atunci că

$$\bar{\nu}_{xx}(x, y, p) = (P/\pi)\{1 - ([2(1-\nu)K - 1]/[2(1-\nu)K + 1])px + ((1-\nu)K/2[2(1-\nu)K + 1])(x/h)^2 + ((1-\nu)K/(2(1-\nu)K + 1)ph)[2((1-(1-\nu)K)/(2(1-\nu)K + 1))x/h - (x/h)^3/12] + o(p^{-2})\} \exp(-px)\cos py \quad (7)$$

pentru $p \to \infty$, $K = l^2/qh^2$.

În vederea calculului efectiv al tensiunilor, vom utiliza formulele:

$$\int_0^\infty \exp(-px)\cos(py)\,dp = x/r^2, \quad \int_0^\infty p\exp(-px)\cos(py)\,dp = (x^2-y^2)/r^4,$$

$$\int_0^\infty \exp(-px)\sin(py)\,dp = y/r^2, \quad \int_0^\infty p\exp(-px)\sin(py)\,dp = 2xy/r^4, \quad (8)$$

$$\int_0^\infty \exp(-px)\sin(py)\,dp/p = \operatorname{tg}(y/x), \quad (-\pi/2 < \operatorname{tg}(y/x) < \pi/2),$$

$$\int_0^\infty \exp(-px)(1-\cos(py))\,dp/p = \log(r/x),$$

$$\int_1^\infty \exp(-px)\,dp/p = -\log x + 0(1), \quad (x \to 0). \quad (9)$$

Ultimele formule conduc la următoarele identităţi

$$\int_1^\infty \exp(-px)\cos(py)\,dp/p = -\log r + 0(1), \quad (r \to 0). \quad (10)$$

În baza celor precedente, se deduce că în expresia pentru ν_{xx} doar primii doi termeni intervin în rezultatul final. Aplicînd formulele precedente tuturor integralelor şi calculînd, ca în (33), $\bar{\nu}_{yy}$ etc., rezultă

Cazul A :

$$\nu_{xx} = -2Px[x^2 + 2(1-\nu)Ky^2]/[2(1-\nu)K+1]\pi r^4 + 0(1),$$

$$\nu_{yy} = 2[2(1-\nu)K-1]Pxy^2/[2(1-\nu)K+1]\pi r^4 + 0(1),$$

$$\nu_{yx} = 2[2(1-\nu)K-1]Px^2y/[2(1-\nu)K+1]\pi r^4 + 0(1), \qquad (11)$$

$$\nu_{xy} = -2Py^2[x^2 + 2(1-\nu)Ky^{-2}]/[2(1-\nu)K+1]\pi r^4 + 0(1),$$

$$\mu_x = 0(1), \quad \mu_y = -2(1-\nu)KP\log r/[2(1-\nu)K+1]\pi + 0(1).$$

Cazul B :

$$\nu_{xx} = -2[2(1-\nu)K-1]Px^2y/[2(1-\nu)K+1]\pi r^4 + 0(1),$$

$$\nu_{yy} = 2Py[2(1-\nu)Kx^2 + y^2]/[2(1-\nu)K+1]\pi r^4 + 0(1), \qquad (12)$$

$$\nu_{yx} = 2Px[2(1-\nu)Kx^2 + y^2]/[2(1-\nu)K+1]\pi r^4 + 0(1),$$

$$\nu_{xy} = -2[2(1-\nu)K-1]Pxy^2/[2(1-\nu)K+1]\pi r^4 + 0(1).$$

Termenul $O(1)$ nu este necesarmente analitic în origină.

Pentru $l = h \to 0$ rezultă $\mu_\alpha = 0$ iar :

în cazul A

$$\nu^0_{xx} = -2Px^3/\pi r^4, \quad \nu^0_{yy} = -2Pxy^2/\pi r^4,$$
$$\nu^0_{yx} = \nu^0_{xy} = -2Px^2y/\pi r^4, \quad \mu^0_\alpha = 0; \qquad (13)$$

în cazul B

$$\nu^0_{xx} = 2Px^2y/\pi r^4, \quad \nu^0_{yy} = 2Py^3/\pi r^4,$$
$$\nu^0_{xy} = \nu^0_{yx} = 2Pxy^2/\pi r^4, \quad \mu^0_\alpha = 0. \qquad (14)$$

Indicele superior se referă la ipoteza de anulare a mărimii $h = l$. Aceste rezultate sînt identice cu cele din teoria elasticității.

Scanned with OKEN Scanner

§ 122. Sarcină tangențială distribuită discontinuu

Vom presupune o încărcare

$$S(y) = p_0, \quad (0 < |y| < c), \quad S(y) = 0, \quad (c < |y| < \infty). \tag{1}$$

p_0 este constant. Se deduc relațiile

$$\begin{aligned} \bar{S} &= 2(p_0/p) \sin(pc), \\ q^+(y, p) &= 2(p_0/p) \sin(pc) \cos(py), \\ q^-(y, p) &= 2(p_0/p) \sin(px) \sin(py). \end{aligned} \tag{2}$$

Observînd că apar singularități ale integralelor în punctele $(0, c)$ și aplicînd metoda expusă se deduce că

$$\begin{aligned} &\nu_{xx} = 0(1), \quad \nu_{yy} = 2p_0 \log(r_2/r_1)/[2(1-\nu)K + 1] + 0(1); \\ &\nu_{\alpha\beta} = 0(1), \quad (\alpha \neq \beta), \quad \nu_\alpha = 0(1), \end{aligned} \tag{3}$$

pentru $r_1^2 = x^2 + (y-c)^2$, $r_2^2 = x^2 + (y+c)^2$.

Dacă $h = l \to 0$ se obțin soluțiile din teoria simetrică

$$\begin{aligned} \nu_{xx} &= -p_0[\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2]/2\pi, \\ \nu_{yy} &= p_0[x \log r_2/r_1 + \cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2], \\ \nu_{yx} &= \nu_{xy} = p_0(2\theta_1 - 2\theta_2 + \sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2), \end{aligned} \tag{4}$$

$\mu_\alpha = 0$, $(\theta_1 = \operatorname{arctg} x/(y-c), \quad \theta_2 = \operatorname{arctg} x/(y+c), \quad 0 \leqslant \theta_\alpha \leqslant \pi)$.

Vom calcula efectiv tensiunea

$$\nu_{yy}(0, y) = 4p_0 \int_0^\infty a(hp) \sin(pc) \sin(py)\, dp/pb(hp) \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

în punctele $y = \pm c$. Pentru aceasta se vor aplica formulele ce rezultă din cele date anterior (vezi (3) din § 120 și (9) din § 121)

$$a(p)/pb(p) = 1/[2(1-\nu)K+1]p + \\ + 3(1-\nu)Kg_1(p)/2[2(1-\nu)K+1] + g_2(p),$$

$$g_1(p) = (m^2+p^2)^{-3/2},\ m^2 = [5+(1-\nu)K]/9[2(1-\nu)K+1], \tag{6}$$

$$g_2(p) = g(p)/[2(1-\nu)K+1]p - 3(1-\nu)Kg_1(p)/2[2(1-\nu)K+1]^2,$$

$$g(p) = \frac{2(1-\nu)K[2(2(1-\nu)K+1)p^3(\sqrt{1+p^2}-p)+(4(1-\nu)K-1)p^2+1]}{8(1-\nu)K[2(1-\nu)K+1]p^4+[1+8(1-\nu)K]p^2+1},$$

$$g_1(p) = 0(p^{-3}), \quad g_2(p) = 0(p^{-7}), \quad (p\to\infty),$$

$$\int_0^\infty \sin(pc)\sin(py)\,dp/p = (1/2)\log|(c+y)/(c-y)|, \quad (c>0,\ c\neq y), \tag{7}$$

$$\int_0^\infty \cos(ap)\,dp/(m^2+p^2)^{3/2} = aK_1(am)/m, \quad (m>0,\ a>0).$$

K este funcția Bessel modificată de speța și ordinul 1. Se deduce expresia tensiunii normale

$$\nu_{yy}(0,y) = (2p_0/[2(1-\nu)K+1]\pi)\log|(c+y)/(c-y)| +$$

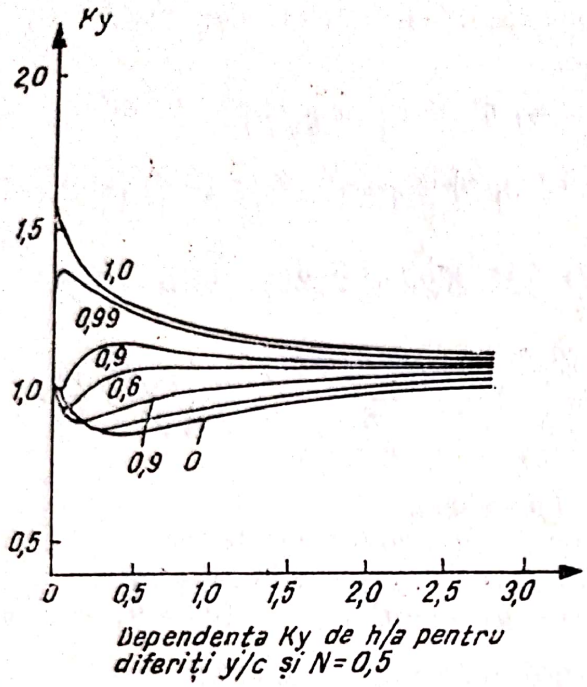
$$+\frac{3(1-\nu)}{[2(1-\nu)K+1]^2}\frac{p_0K}{m\pi}\left[\frac{|c-y|}{h}K_1\left(\frac{m|c-y|}{h}\right)-\frac{|c+y|}{h}K_1\left(\frac{m|c+y|}{h}\right)\right]+$$

$$+4p_0\int_0^\infty g_2(p)\sin(cp/h)\sin(yp/h)\,dp/\pi. \tag{8}$$

Notînd prin $\nu^0_{yy}(0,y)$ valoarea lui ν_{yy} pentru $h = l \to 0$ și formînd raportul

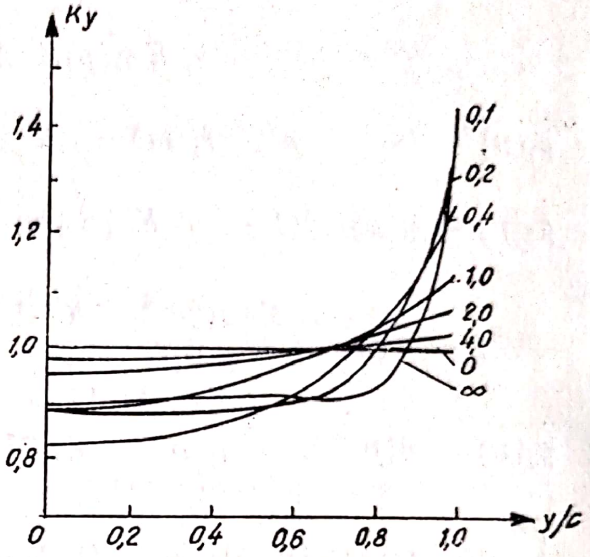
$$(\nu/\nu^0)_{yy}(0,y) \tag{9}$$

s-au calculat, în cadrul metodei expuse mai jos, valorile acestui raport pentru $0 \leqslant y/c < 1$ și $0 \leqslant h/c \leqslant 3$, $N = 1-(1-\nu)K = 0{,}5$ sau $(1-\nu)K = 0{,}5$. Rezultatele apar în figura 129. În diagrama din figura 130 se consideră $0 \leqslant h/c \leqslant \infty$. În figurile 131 și 132, s-a luat $N = 0$ sau $K = 1/(1-\nu)$.



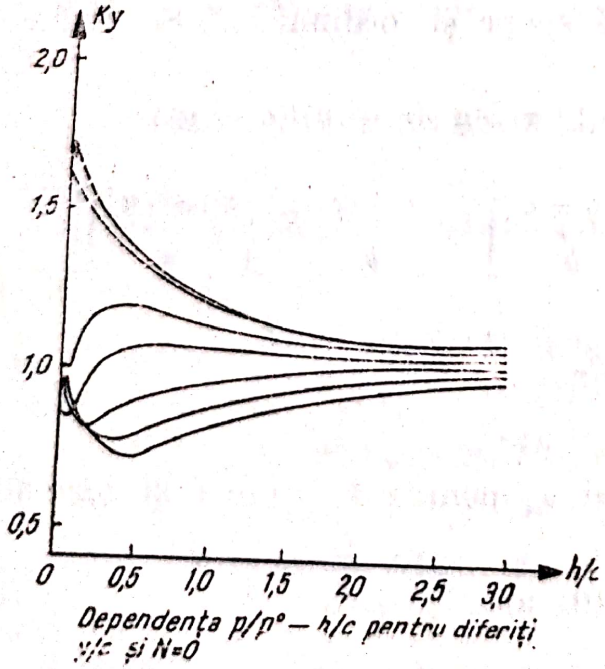
Dependența Ky de h/a pentru diferiți y/c și N=0,5

Fig. 129



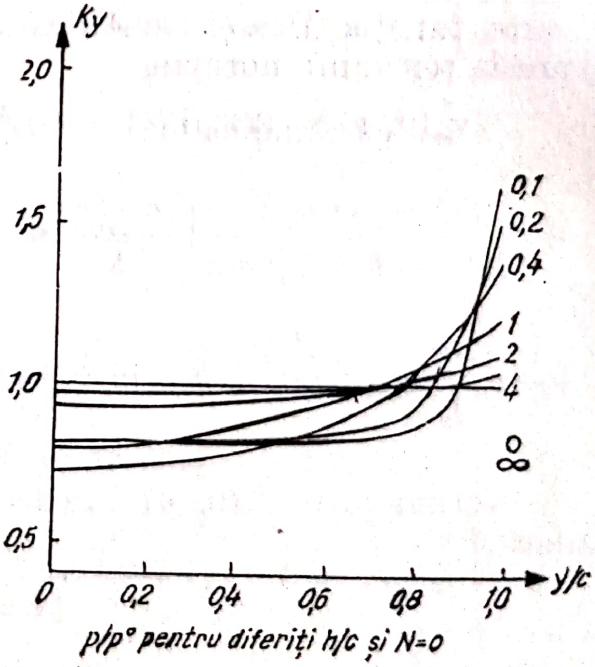
K pentru diferiți h/c și pentru N=0,5

Fig. 130



Dependența p/p° — h/c pentru diferiți y/c și N=0

Fig. 131



p/p° pentru diferiți h/c și N=0

Fig. 132

Scanned with OKEN Scanner

Aceste rezultate extind cele stabilite în cazul elasticității constrînse de către autorii citați. Diagramele coincid cu cele construite de acești autori pentru $h = l$, $K = 1$, $N = \nu$.

§ 123. Stampă plană aplicată pe semiplanul elastic

Vom considera o stampă plană aplicată pe o porțiune de lungime $2c$ a conturului semiplanului elastic (vezi fig. 133). Vom avea condițiile la limită:

$$\nu_{yx}(0, y) = 0, \quad \mu_x(0, y) = 0, \quad (-\infty < y < \infty),$$

$$u_{,y}/_{0,y} = 0, \quad (0 \leqslant |y| < c), \quad \nu_{xx}(0, y) = 0, \quad (c < |y| < \infty); \tag{1}$$

$$\int_{-c}^{c} \nu_{xx}(0, y)\, dy = -P,$$

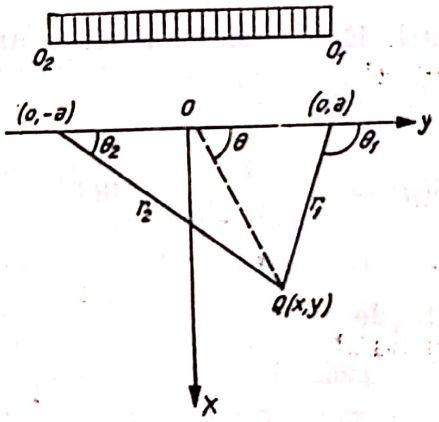


Fig. 133

P fiind presiunea totală. De asemenea presupunem că pentru $r \to \infty$ avem $\nu_{\alpha\beta}$, $\mu_\alpha \to 0$. Ne situăm în condițiile cazului A pentru

$$S(y) = 0, \quad (c < |y| < \infty), \quad S(-y) = S(y),$$

$$(0 \leqslant |y| < c), \quad 2\int_0^c S(y)\, dy = P. \tag{2}$$

În baza formulelor (30), (31), $(34)_1$ din § 121 și $(2)_2$ din § 122, condiția la limită în deplasare din (1) se mai scrise astfel, după integrare în raport cu x:

$$\int_0^\infty \int_0^c S(x)\, a(hp) \sin(py) \cos(px)\, dx\, dp/b(hp) = 0 \quad (o \leqslant y < c). \tag{3}$$

Deci va trebui determinată o funcție S în intervalul $[0, c)$ satisfăcînd ecuația integrală omogenă de mai sus cu condiția (de normalizare) $P = 2\int_0^c S(y)\,dy$. Ecuația integrală se caracterizează prin faptul că S poate deveni infinită în capătul $y = C$ al intervalului de definiție. Pentru acest motiv este necesar de a fi transformată într-o integrală de tip standard, regulată.

Deoarece în teoria simetrică*) avem

$$S^0(y) = P/\pi\sqrt{c^2 - y^2}, \qquad (0 \leqslant y < a) \tag{4}$$

se va presupune prin anticipare o soluție de forma

$$S(y) = \frac{A}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{c^2 - y^2}} + \int_y^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{t^2 - y^2}}\right], \qquad (0 \leqslant y \leqslant c), \tag{5}$$

A, φ fiind nedeterminați. Este clar că dacă φ ar fi o funcție continuă în $[0, c)$, am avea

$$S(y) = \frac{A}{\pi\sqrt{c^2 - y^2}} + 0(1) \qquad \text{pentru } y \to c. \tag{6}$$

Deoarece au loc identitățile

$$\int_0^c \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^c \frac{\cos(py)}{\sqrt{c^2 - y^2}}\,dy = \frac{\pi}{2} J_0(cp) \tag{7}$$

se deduce din ultima relație și din (2), (6) și (3)

$$P = A\left[1 + \int_0^c \varphi(t)\,dt\right],$$

$$\int_0^\infty a(hp)\left[J_0(cp) + \int_0^c \varphi(t)\,J_0(pt)\,dt\right]\sin(py)\,dp/b(hp) = 0, \quad (0 \leqslant y < c). \tag{8}$$

*) M. A. Sadovsky [1].

Scanned with OKEN Scanner

Presupunînd φ continuu în intervalul $[0, c)$, fapt ce se va confirma ulterior, vom putea inversa ordinea integrării din ultima ecuație astfel că

$$\int_0^c \varphi(t) \int_0^\infty a(hp)\, J_0(pt) \sin(py)\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}t/b(hp) =$$

$$= -\int_0^\infty a(hp)\, J_0(cp) \sin(py)\, \mathrm{d}p/b(hp), \quad (0 \leqslant y < c). \tag{9}$$

Ecuația obținută este singulară, deoarece este divergentă pentru $t = y$. Pentru acest motiv apare oportun de a o transforma într-o ecuație de tip Fredholm standard. Astfel se observă că

$$[2(1 - \nu) K + 1]\, a(p)/b(p) = 1 + g(p), \quad 0 \leqslant p < \infty, \tag{10}$$

$g(p)$ fiind deja definită în secțiunea anterioară în (6), § 122. Atunci, deoarece avem

$$\int_0^\infty J_0(pt) \sin(py)\, \mathrm{d}p = \begin{cases} 0, & (0 \leqslant y < t), \\ 1/\sqrt{y^2 - p^2}, & (0 < t < y) \end{cases} \tag{11}$$

ecuația integrală (9) devine

$$\int_0^y \varphi(t)\, \mathrm{d}t/\sqrt{y^2 - t^2} = h(y), \quad (0 < y < a) \tag{12}$$

în care funcția din membrul drept se definește în modul următor

$$h(y) = -\int_0^c \int_0^\infty g(hp)\, \varphi(t)\, J_0(pt) \sin(py)\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}t - \int_0^\infty g(hp)\, J_0(pc) \sin(py)\, \mathrm{d}p. \tag{13}$$

O transformare de variabile și funcții

$$t^2 = t', \; y^2 = y', \; \varphi_1(t') = \frac{\varphi(\sqrt{t'})}{2\sqrt{t'}}, \; h_1(y') = h(\sqrt{y'}) \tag{14}$$

conduce la ecuația integrală

$$\int_0^{y'} \frac{\varphi_1(t')}{\sqrt{y' - t'}}\, \mathrm{d}t' = h_1(y'), \qquad (0 \leqslant y' < c^2). \tag{15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd transformarea Laplace

$$\bar{f}(w) = \int_0^\infty f(x) \exp(-wx)\, dx = \mathfrak{L}(f(x);\ w) \tag{16}$$

se deduce cu ajutorul teoremei convoluţiei egalitatea

$$\bar{\varphi}_1(w) = w\bar{h}_1(w)/\sqrt{\pi w}. \tag{17}$$

Trecînd la funcţia origină se obţine o ecuaţie integrală

$$\varphi_1(t') = \int_0^{t'} \frac{(d/dy')\, h_1(y')}{\pi\sqrt{t' - y'}}\, dy', \qquad (0 \leqslant t' \leqslant c^2). \tag{18}$$

Revenind la variabilele unitate, ecuaţia se transcrie astfel

$$\varphi(t) = 2t\int_0^t \frac{(d/dy)\, h(y)}{\pi\sqrt{t^2 - y^2}}\, dy, \qquad (0 \leqslant t \leqslant c). \tag{19}$$

După înlocuirea expresiei funcţiei h din (13) rezultă

$$\varphi(t) = -2t\int_0^t\int_0^c\int_0^\infty d(hp)\cdot\varphi(\tau)\, J_0(p\tau)\cos(py)\, p\, dp\, d\tau\, dy/\pi\sqrt{t^2 - y^2} - \tag{20}$$

$$- 2t\int_0^t\int_0^\infty g(hp)\, J_0(p\tau)\cos(py)\, p\, dp\, dy/\pi\sqrt{t^2 - y^2}.$$

Nucleul acestei integrale poate fi simetrizat înlocuind variabilele adimensionale

$$\zeta = t/c,\ \eta = \tau/c,\ \lambda = 1/c,\ \Phi(\zeta) = c\,\varphi(c\zeta)/\sqrt{\zeta}. \tag{21}$$

În acest caz (15) devine

$$\Phi(\zeta) + \int_0^1 \Phi(\eta)\, F(\zeta, \eta)\, d\eta = -F(\zeta, 1),\ (0 \leqslant \zeta \leqslant 1), \tag{22}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde *)

$$F(\zeta, \eta) = \sqrt{\zeta\eta}\int_0^\infty g(\lambda, p)\, J_0(\zeta p)\, J_0(\eta p)\, p\, dp,\ (0 < \zeta \leqslant 1,\ 0 < \eta \leqslant 1) \qquad (23)$$

$$F(\zeta, 0) = F(0, \zeta) = 0,\ (0 \leqslant \zeta < 1).$$

Pentru a înlătura singularitatea ce apare în integrală, se utilizează funcția și identitatea

$$G(p) = g(p) - 3(1 - \nu)K/[2(1 - \nu)K + 1]\ 2(p^2 + n^2),$$

$$n^2 = \{5 + (1 - \nu)\ K\}/6[2(1 - \nu)\ K + 1], \qquad (24)$$

$$\int_0^\infty p\, J_0(\zeta p)\, J_0(\eta p)\, dp/(p^2 + n^2) = I_0(n\eta)\, K_0(n\zeta)\ (0 < \eta \leqslant \zeta),$$

I_0, K_0 fiind funcțiile Bessel de ordin zero modificate de speța 1 și 2.

Atunci vor rezulta din (23) expresiile

$$F(\zeta, \eta) = F(\eta, \zeta) = \sqrt{\zeta\eta}\left\{\frac{3(1 - \nu)\, KI_0(n\eta/\lambda)\, K_0(n\zeta/\lambda)}{2[2(1 - \nu)\, K + 1]\lambda^2} + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty G(\lambda p)\, J_0(\zeta p)\, J_0(\eta p)\, p dp\right\},\qquad (0 < \eta \leqslant \zeta \leqslant 1), \qquad (25)$$

$$F(\zeta, 0) = F(0, \zeta) = 0,\ (0 \leqslant \zeta \leqslant 1).$$

În baza expresiei din (7), § 122, dată pentru funcția $g(p)$, rezultă că $G(p) = 0\ (p^{-6})$ pentru $p \to \infty$. Integrala obținută e uniform convergentă în regiunea închisă $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ pentru $\lambda > 0$ și $1 - (1 - \nu)\, K$ arbitrar în intervalul $[-\infty, 1/2]$. Se poate deduce și faptul că nucleul $F(\zeta, \eta)$ este continuu în aceeași regiune.

În baza definiției funcției $i\,\Phi$ din (21) avem

$$c\varphi(t) = \sqrt{t/c} \cdot \Phi(t/c)\,, \qquad (0 \leqslant t \leqslant c). \qquad (26)$$

*) Ultima ecuație este cea căutată. Funcția g ia valori pozitive și este uniform mărginită în intervalul $[0, \infty]$ pentru $-\infty < \nu \leqslant 1/2$ iar $g(p) = o\,(p^{-2})$ pentru $p \to \infty$. Integrala ce apare converge pentru $\lambda \to 0$, $\zeta > 0$, $\eta > 0$ și diverge la limita superioară pentru $\zeta = \eta = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Se deduce atunci conform lucrării citate a lui R. Muki şi E. Sternberg [1] că φ există şi este continuă în intervalul $[0, c)$ şi satisface condiţia $\varphi(t) = 0(t^{1/2}))$ pentru $t \to 0$.

De asemenea se arată că $S(y)$ e continuă în intervalul $0 \leqslant y < c$.

În baza soluţiei alese $S(y)$ din (6), a expresiei pentru P din (8) şi a corelaţiei (16) între φ şi Φ, avem

$$A = P\left[1 + \int_0^1 \sqrt{\zeta}\,\Phi(\zeta)\,d\zeta\right]^{-1},$$

$$S(y) = A\left[1/\sqrt{1-(y/c)^2} + \int_{y/c}^1 \sqrt{\zeta}\,\Phi(\zeta)/\sqrt{\zeta^2-(y/c)^2}\,d\zeta\right]/\pi c \;(0 \leqslant y < c). \tag{27}$$

Din (30), (31) din § 122 şi din (7), (27) şi identităţile deja utilizate rezultă

$$\begin{aligned} \overline{S}(p) &= A\left[J_0(cp) + \int_0^c \varphi(t) J_0(tp)\,dt\right], \\ q^+(y,p) &= A\left[J_0(cp) + \int_0^c \varphi(t)\,J_0(tp)dt\right]\cos(py), \\ q^-(y,p) &= A\left[J_0(cp) + \int_0^c \varphi(t) J_0(tp)\,dt\right]\sin(py). \end{aligned} \tag{28}$$

De asemenea, utilizînd notaţiile din (4) de la § 122 şi relaţiile (33) din § 120, precum şi notaţiile din figura 133, se obţin, în afara punctelor $x = 0$, $y = \pm c$ şi pentru $c > 0$, $a > 0$, la limita $r \to 0$, următoarele expresii definitive ale tensiunilor

$$\begin{aligned} \nu_{xx} &= -A\{\sin[(\theta_1+\theta_2)/2] + ([2(1-\nu)K-1]\,r^2/[2(1-\nu)K+1]\,r_1 r_2)\times \\ &\quad \times \sin\theta\cos(\theta - 3(\theta_1+\theta_2)/2)\}/\pi\sqrt{r_1 r_2} + 0(1) \\ \nu_{yy} &= [2(1-\nu)K-1]\,A\{\sin[(\theta_1+\theta_2)/2] + r^2 \times \\ &\quad \times \sin\theta\cos(\theta - 3(\theta_1+\theta_2)/2)/r_1 r_2\}\cdot/[2(1-\nu)K+1]\,\pi\sqrt{r_1 r_2} + 0(1) \\ \nu_{yx} &= -[2(1-\nu)K-1]\,A\{(r^2/r_1 r_2)\sin\theta\sin(\theta - 3(\theta_1+\theta_2)/2)\}\times \\ &\quad \times /[2(1-\nu)K+1]\,\pi\sqrt{r_1 r_2} + 0(1) \\ \nu_{xy} &= -A\{4(1-\nu)K\cos[(\theta_1+\theta_2)/2] + [2(1-\nu)K-1]\cdot r^2 \times \\ &\quad \times \sin\theta\sin[\theta - 3(\theta_1+\theta_2)/2]\}/[2(1-\nu)K+1]\,\pi\sqrt{r_1 r_2} + 0(1). \end{aligned} \tag{29}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cadrul teoriei simetrice soluțiile sînt

$$\nu^0_{xx} = -P\{\sin[(\theta_1+\theta_2)/2] - (r^2/r_1r_2)\sin\theta\cos(\theta - 3(\theta_1+\theta_2)/2)\}\cdot/\pi\sqrt{r_1r_2},$$

$$\nu^0_{yy} = -P\{\sin[(\theta_1+\theta_2)/2] + (r^2/r_1r_2)\sin\theta\cos(\theta - 3(\theta_1+\theta_2)/2)\}\cdot\pi\sqrt{r_1r_2},$$

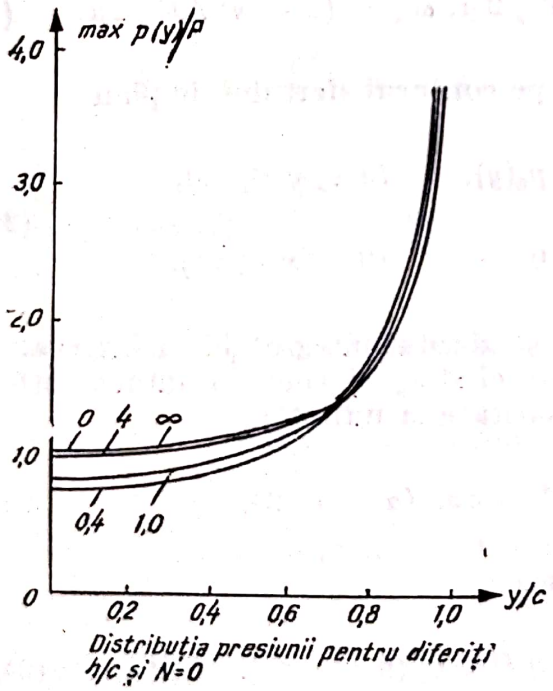
$$\nu^0_{xy} = \nu^0_{yx} = (Pr^2/\pi\sqrt{r_1r_2}\,r_1r_2)\sin\theta\sin(\theta - 3(\theta_1+\theta_2)/2),\ \mu^0_x = 0. \qquad (30)$$

În deducerea soluțiilor (29) și (28), s-au utilizat identitățile

$$\int_0^\infty \exp(-px)\,J_0(cp)\cos(py)\,dp = (r_1r_2)^{-1/2}\sin[(\theta_1+\theta_2)/2],$$

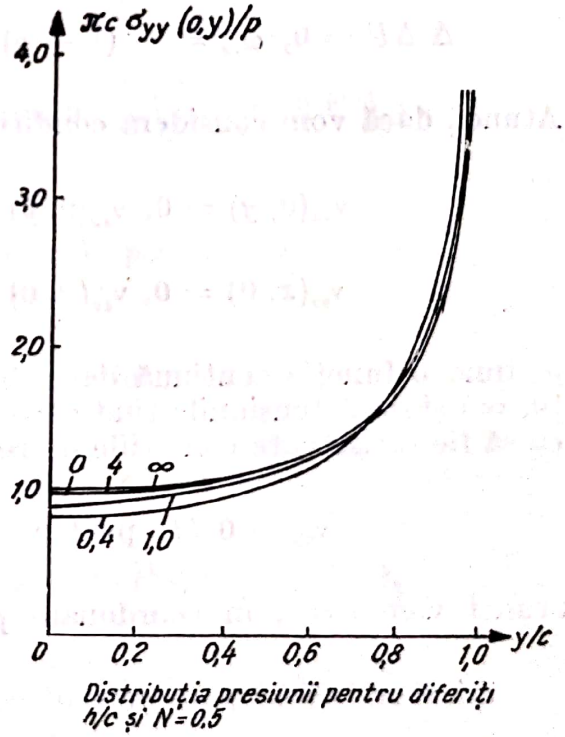
$$\int_0^\infty \exp(-px)\,J_0(cp)\sin(py)\,dp = (r_1r_2)^{-1/2}\cos[(\theta_1+\theta_2)/2], \qquad (31)$$

$$\int_0^\infty p\exp(-px)\,J_0(cp)\cos(py)\,dp = -r(r_1r_2)^{-3/2}\cos(\theta - 3(\theta_1+\theta_2)/2).$$



Distribuția presiunii pentru diferiți h/c și N=0

Fig. 134



Distribuția presiunii pentru diferiți h/c și N=0,5

Fig. 135

În diagramele din figurile 134—135 apare distribuția presiunii și dependența acesteia de poziția și caracteristicile mediului.

Scanned with OKEN Scanner

G. Sfertul de plan elastic

§ 124 Aplicarea transformatei Mellin

Sfertul de plan elastic se defineşte în domeniul

$$0 < x < \infty, \qquad 0 < y < \infty.$$

Vom studia echilibrul elastic atît în cadrul teoriei clasice a elasticităţii, cît şi în cazul mediului Cosserat cu rotaţii constrînse.

În cadrul teoriei clasice a elasticităţii, funcţiile potenţial de tensiune se vor reduce, conform (1) din § 118, la funcţia F a lui Airy, care, conform (2) din § 118, este biarmonică. Aplicînd ecuaţiile constitutive inverse, definiţia deformaţiilor şi reprezentările (2), § 108, deducem relaţiile utile

$$\Delta\,\Delta F = 0,\ \omega_{,x} = -(1-\nu)\,\Delta F_{,y}/2\mu,\ \omega_{,y} = (1-\nu)\,\Delta F_{,x}/2\mu. \qquad (1$$

Atunci, dacă vom considera condiţiile pe conturul sfertului de plan

$$\begin{aligned} &\nu_{xx}(0, y) = 0,\ \nu_{xy}(0, y) = p_0(y), && (0 \leqslant y \leqslant \infty), \\ &\nu_{yx}(x, 0) = 0,\ \nu_{yy}(x, 0) = 0, && (0 \leqslant x < \infty), \end{aligned} \qquad (2)$$

p_0 fiind o funcţie continuă derivabilă şi absolut integrabilă în intervalul $[0, \infty)$ şi dacă tensiunile tind către zero cînd $x_\alpha\, x^\alpha$ tinde la infinit astfel ca să fie satisfăcute condiţiile de regularitate la infinit*)

$$\nu_{\alpha\beta} = 0\ (1)\ \text{pentru}\ x_\alpha x^\alpha \to \infty,\ (\alpha = 1, 2), \qquad (3)$$

atunci vom avea, în coordonate polare,

$$\Delta\Delta F \equiv (\partial^2/\partial r^2 + \partial/r\,\partial r + \partial^2/r^2\,\partial\theta^2)\,F = 0,\ (0 < r < \infty,\ 0 < \theta < \pi\ (2),$$

$$\omega_{,r} = -(1-\nu)\,\Delta F_{,\theta}/2\mu r,\ \omega_{,\theta} = (1-\nu)\,r\Delta F_{,r}/2\mu, \qquad (4)$$

*) Se utilizează simbolul 0 (1) pentru a indica faptul că funcţiile tensiunilor tind la infinit către valori avînd ordinul de mărime 0.

Scanned with OKEN Scanner

iar

$$\nu_{\theta\theta}(r, \pi/2) = 0,\ \nu_{r\theta}(r, \pi/2) = -p(r),\ (0 \leqslant r < \infty),$$

$$\nu_{\theta\theta}(r, 0) = 0,\ \nu_{r\theta}(r, \theta) = -p(r),\ (0 \leqslant r < \infty), \tag{5}$$

$$\nu_{rr} = 0(1),\ \nu_{\theta\theta} = 0(1),\ \nu_{r\theta} = 0\ (1),\ (r \to \infty).$$

La acestea adăugăm reprezentările (3), § 118, în care luăm $G = 0$.

În vederea rezolvării problemei la limită corespunzătoare expunem metoda elaborată de D. B. Bogy și E. Sternberg [1], [2] bazată pe transformarea Mellin

$$\overline{f} = \mathcal{M}\{f; s\} = \int_0^\infty f(r)\, r^{s-1}\, dr, \tag{6}$$

s fiind un parametru complex de transformare a următoarelor funcții

$$\overline{F}(s, \theta) = \int_0^\infty F(r, \theta)\, r^{s-1}\, dr,\ \overline{\nu}_{rr}(s, \theta) = \int_0^\infty \nu_{rr}(r, \theta)\, r^{s+1}\, dr,$$

$$\overline{\omega}(s, \theta) = \int_0^\infty \omega(r, \theta)\, r^{s+1}\, dr,\ \overline{p}(s) = \int_0^\infty p(r)\, r^{s+1}\, dr. \tag{7}$$

Atunci condițiile de mai sus se transformă astfel

$$(\partial^2/\partial\theta^2 + s^2)\,(\partial^2/\partial\theta^2 + (s+2)^2)\overline{F}(s, \theta) = 0, \quad (0 < \theta < \pi/2),$$

$$\overline{\omega}(s, \theta) = (1 - \nu)\,(\partial^3/\partial\theta^3 + s^2\partial/\partial\theta)\,\overline{F(s, \theta)}/2\mu(s+2),$$

$$\overline{\nu}_{r\theta}(s, \pi/2) = -\overline{p}(s),\ \overline{\nu}_{\theta\theta}(s, \pi/2) = \overline{\nu}_{r\theta}(s, \theta) = \overline{\nu}_{\theta\theta}(s, \theta) = 0, \tag{8}$$

$$\overline{\nu}_{rr}(s, \theta) = (\partial^2/\partial\theta^2 - s)\,\overline{F}(s, \theta),\ \overline{\nu}_{\theta\theta}(s, \theta) = s(s+1)\,\overline{F}(s, \theta),$$

$$\overline{\nu}_{r\theta}(s, \theta) = (s+1)\,\overline{F}(s, \theta)_{,\theta}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd procedee uzuale ale teoriei transformării integrale — vezi de ex. C. I. Tranter [1] — se deduc soluțiile sistemului de mai sus

$$\begin{aligned}
\overline{F}(s,\theta) &= \overline{p}(s)[a_1(s,\theta) - a_2(s,\theta)\cos 2\theta + a_3(s,\theta)\sin 2\theta]\cdot 1/2\,(s+1)\,\Delta(s),\\
\overline{\nu}_{rr}(s,\theta) &= \overline{p}(s)[-sa_1(s,\theta) + (s+4)\,a_2(s,\theta)\cos 2\theta -\\
&\quad -(s+4)\,a_3(s,\theta)\sin 2\theta]/2\Delta(s), \qquad (9)\\
\overline{\nu}_{00}(s,\theta) &= \overline{p}(s)[sa_1(s,\theta) - sa_2(s,\theta)\cos 2\theta + sa_3(s,\theta)\sin 2\theta]/2\Delta(s),\\
\overline{\nu}_{,0}(s,\theta) &= \overline{p}(s)[-sa_4(s,\theta) + (s+2)\,a_3(s,\theta)\cos 2\theta +\\
&\quad +(s+2)\,a_2(s,\theta)\sin 2\theta]1/2\Delta(s),\\
\overline{\omega}(s,\theta) &= -(1-\nu)\,\overline{p}(s)[a_3(s,\theta)\cos 2\theta + a_2(s,\theta)\sin 2\theta]/\mu\Delta(s),
\end{aligned}$$

în care

$$\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}}(s,\theta) &= (s+1)\sin(s\pi/2)\cos(s\theta) - \frac{(s+2)}{s}\cos(s\pi/2)\sin(s\theta),\\
a_3(s,\theta) &= \frac{s}{(s+2)}\cos(s\pi/2)\sin(s\theta) + (s+1)\sin(s\pi/2)\sin(s\theta), \qquad (10)\\
\Delta(s) &= (s+1)^2 - \cos^2(s\pi/2).
\end{aligned}$$

În cele ce urmează se va aplica transformarea Mellin inversă

$$f(r) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{F}\{f;s\}\,r^{-s}\,ds, \qquad (0<r<\infty) \qquad (11)$$

astfel că*), c fiind oarecare, $r^{c-1}f(r)$ să fie absolut integrabilă în intervalul $[0,\infty)$, dacă f are derivate continui în $[0,\infty)$. Se deduce

$$\begin{aligned}
F(r,\theta) &= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{F}(s,\theta)\,r^{-s}\,ds/2\pi i,\\
\nu_{rr}(r,\theta) &= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{\nu}_{rr}(s,\theta)\,r^{-s-2}\,ds/2\pi i, \qquad (12)\\
\omega(r,\theta) &= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{\omega}(s,\theta)\,r^{-s-2}\,ds/2\pi i.
\end{aligned}$$

*) C. I. Tranter [1].

§ 125. Valori asimptotice asociate problemelor la limită

Vom alege drumul de integrare al acestor integrale *)

$$c = 1 - \varepsilon, \qquad (0 < \varepsilon < 1) \tag{1}$$

ceea ce implică includerea drumului de integrare în banda $-2 < \mathrm{Re}(s)$ în care funcțiile care apar sînt regulate și în care avem formula de inversiune **)

$$p(r) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{p}(s)\, r^{-s-2}\, ds, (0 < r < \infty). \tag{2}$$

Fie atunci în planul complex $s = \xi + i\eta$ conturul rectangular dat în figura 136 de laturi $\Gamma_k(b)$, $(k = 1, 2, 3, 4)$ pentru $0 < b < \infty$, $0 < \varepsilon < 1$. Vom aplica teorema reziduurilor integralei pe acest contur

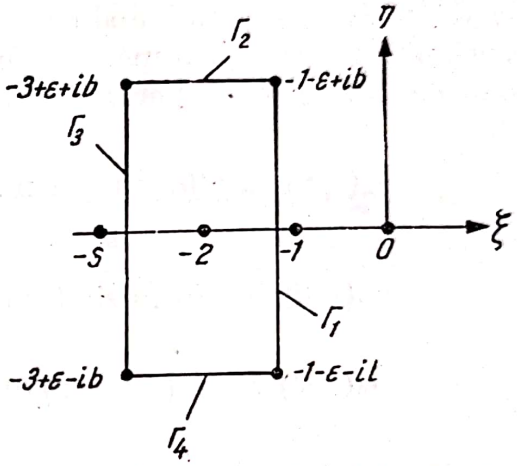


Fig. 136

$$\int_{\Gamma_1(b)} \overline{\nu}_{rr}(s, \theta)\, r^{-s-2}\, ds =$$

$$= 2\pi i \nu^0_{rr}(r, \theta) - \sum_{k=2}^{4} \int_{\Gamma_k(b)} \overline{\nu}_{rr}(s, \theta)\, r^{-s-2}\, ds \tag{3}$$

---

*) Drumul de integrare $\mathrm{Re}(s) = c$ este situat în interiorul unei bande din planul s în care termenii de integrat au proprietăți de regularitate. Determinarea acestei benzi se face observînd că p, regulată în $[0, \infty)$, atrage convergența absolută a integralei din (7) pentru $-2 < \mathrm{Re}(s) \leqslant -1$. Atunci $\overline{p}(s)$ va fi analitică în banda deschisă $-2 < \mathrm{Re}(s) \leqslant -1$ (conform G. Doetsch [1], p. 58). Regularitatea încărcării p se mai traduce prin condițiile $p(r) = p(0) + 0(r)$ pentru $r \to 0$ și $p(r) = 0\,(1/r)$ pentru $r \to \infty$. Conform G. Doetsch [1], vol. 2, cap. 5, sec. 2, și cap. 4, sec. 2, rezultă că $\overline{p}(s)$ poate fi prelungită analitic în banda $-3 < \mathrm{Re}\,(s) < -1$ din care excludem polul simplu $s = -2$ în care avem reziduul $p(0)$ iar $\overline{p}(s) = p(0)/(s+2) + g(s)$.

Deoarece funcțiile a_1 și Δ din (10) sînt întregi, mai rezultă din aceste observații că în (9), funcțiile $\overline{F}$, $\overline{\nu}_{rr}$, $\overline{\nu}_{\theta\theta}$, $\overline{\nu}_{r\theta}$, $\overline{\omega}$ sînt analitice în ultima bandă menționată exceptînd polii care pot apare (ai lui $\overline{p}$) și zerourile lui $\Delta(s)$. Dar $\Delta(s)$ se anulează în banda menționată doar pentru $s = -2$, unde are un zero simplu și deci termenii de integrat din formulele de mai sus au cel mult un pol în aceeași bandă $-3 < \mathrm{Re}(s) \leqslant 1$ în $s = -2$. Într-adevăr, se găsește că $\overline{F}$, $\overline{\nu}_{rr}$, $\overline{\nu}_{r\theta}$, $\overline{\nu}_{\theta\theta}$ au poli simpli iar $\overline{\omega}$ are un pol de ordin 2 în $s = -2$.

**) Aceasta nu mai e valabilă pentru $c < -2$ dacă $p(0) \neq 0$ după cum rezultă din formula din nota precedentă. Pentru acest motiv s-a ales pentru c intervalul de variație definit mai sus în (11), § 124.

Se poate arăta că formulele de inversiune (12), § 124, pentru F, ν, ω reprezintă funcții reale cu derivate parțiale continui de orice ordin în sfertul de plan și funcțiile satisfac ecuațiile de biarmonicitate, reprezentare și regularitate la infinit din (1), (5) de la § 124.

Scanned with OKEN Scanner

$\nu^0_{rr}(r, \theta)$ reprezintă reziduul care apare în $s = -2$. Soluțiile $\overline{F}$, $\overline{\nu}$, $\overline{\omega}$ obținute anterior în (9) de la § 124 ne arată că integralele pe Γ_2, Γ_4 tind la zero pentru $b \to \infty$ iar integrala pe Γ_3 are ordinul de mărime $0(1)$ dacă $r \to 0$. Aşadar, ţinînd seama de formulele de inversiune pentru aceste funcţii (12) de la § 124, vom avea

$$\nu_{rr}(r, \theta) = \lim \int_{\Gamma_1(b)} \overline{\nu}_{rr}(s, \theta)\, r^{-s-2} ds/2\pi i = \nu^0_{rr}(r, \theta) + 0(1), \ (r \to 0). \qquad (4)$$

În definitiv, efectuînd deducţii similare pentru celelalte componente ale tensiunii şi rotaţiei, după determinarea reziduurilor în $s = -2$, se obţin valorile asimptotice pentru $r \to 0$:

$$\begin{aligned}
\underset{\theta\theta}{\nu_{rr}}(r, \theta) &= p(0)\{2\theta \pm \sin 2\theta - \pi(1 \pm \cos 2\theta)/2\}/2 + 0(1), \\
\nu_{r\theta}(r, \theta) &= p(0)\{\pi \sin(2\theta)/2 - 1 + \cos 2\theta\}/2 + 0(1), \qquad (5) \\
\omega(r, \theta) &= -(1 - \nu)\, p(0) \log(r)/\mu + 0(1)
\end{aligned}$$

sau, în componente carteziene,

$$\begin{aligned}
\nu_{xx}(x, y) &= p(0)[-\pi + \sin 2\theta + 2\theta]/2 + 0(1), \\
\nu_{yy}(x, y) &= p(0)[-\sin 2\theta + 2\theta]/2 + 0(1), \qquad (6) \\
\nu_{xy}(x, y) &= p(0) \sin^2\theta + 0(1), \\
\omega(x, y) &= -(1 - \nu)\, p(0) \log(r)/\mu + 0(1).
\end{aligned}$$

Se constată că dacă $p(0) \neq 0$, apare o discontinuitate finită la colţ iar rotaţia, pentru $r \to 0$, capătă valori logaritmice infinite. Termenii principali din aceste relaţii satisfac ecuaţiile de echilibru şi compatibilitate. Ei corespund unei încercări tangenţiale $p(0)$ uniforme pe faţa $x = 0$, $0 \leqslant y < \infty$. Soluţia este identică soluţiei date de E Reissner [2].

Autorii menţionaţi mai înainte au studiat şi cazul mediului cu cuple de tensiune într-un cîmp de rotaţii constrînse ($\Omega = 0 - \omega = 0$), caz expus mai jos. Conform ecuaţiilor (1), (2) de la § 118, vom avea de consi-

derat potențialii F și G. Condițiile la limită și de regularitate la infinit vor avea forma

$$\nu_{xx}(0, y) = 0,\ \nu_{xy}(0, y) = p(y),\ \mu_x(0, y) = 0,\ (0 \leqslant y < \infty),$$

$$\nu_{yx}(x, 0) = 0,\ \nu_{yy}(x, 0) = 0,\quad \mu_y(x, 0) = 0,\ (0 \leqslant x < \infty), \tag{7}$$

$$\nu_{\alpha\beta} = 0(1),\ \mu_\alpha = 0(1),\quad (x_\alpha x^\alpha \to \infty).$$

Presupunem că p este continuă și absolut integrabilă în intervalul $[0, \infty)$ împreună cu primele două derivate. Din ecuațiile (11) de la § 108, se deduce că rotațiile se determină în funcție de G conform relațiilor

$$4\mu l^2 \omega_{,x} = G_{,x},\quad 4\mu l^2 \omega_{,y} = G_{,y}. \tag{8}$$

Problema la limită corespunzătoare este reductibilă după cum au arătat autorii menționați la rezolvarea unei ecuații integrale unidimensionale cu ajutorul a două probleme auxiliare pentru semiplanele

$$S^1 : 0 < x < \infty,\quad -\infty < y < \infty,$$

$$S^2 = -\infty < x < \infty,\quad 0 < y < \infty, \tag{9}$$

spațiul sfertului de plan S reprezentînd intersecția semiplanelor S_1 și S_2 (vezi fig. 137).

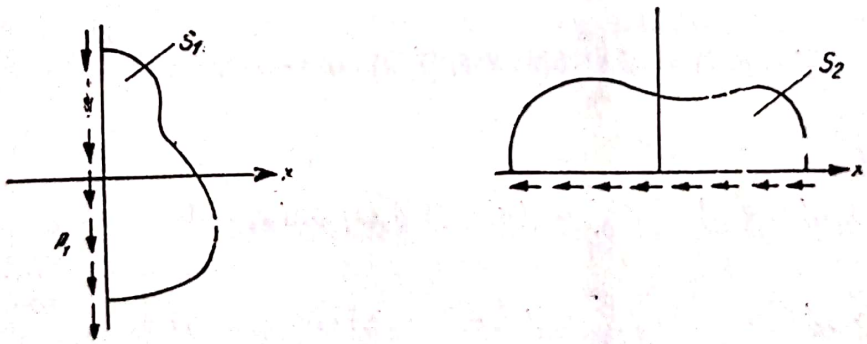


Fig. 137

Pentru semiplanul $S^k, (k = 1, 2)$, vom considera soluțiile F^k, G^k, $\nu^k_{\alpha\beta}$, μ^k_α care satisfac ecuațiile diferențiale, condițiile de regularitate la infinit date mai sus și condițiile la limită

$$\nu^1_{xx}(0, y) = 0,\ \nu^1_{xy}(0, y) = p_1(y),\ \mu^1_x(0, y) = 0,\ (-\infty < y < \infty),$$

$$\nu^2_{yx}(x, 0) = p_2(x),\ \nu^2_{yy}(x, 0) = 0,\ \mu^2_y(x, 0) = 0,\ (-\infty < x < \infty). \tag{10}$$

Eforturile tangențiale p_α se vor presupune pare :

$$p_\alpha(-x) = p_\alpha(x), \quad (-\infty < x < \infty, \quad \alpha = 1, 2). \tag{11}$$

§ 126. Determinarea tensiunilor și cuplelor de tensiune

După cum s-a considerat în § § 124 — 125 (vezi contextul ce urmează formulelor (2) de la § 124 și (7) de la § 125) eforturile tangențiale sînt absolut integrabile și continui pe porțiuni în intervalul $[0, \infty)$. Atunci, conform formulelor (35) de la § 120, aplicate problemelor auxiliare menționate mai înainte, se deduc expresiile tensiunilor și cuplelor de tensiune :

în S_1

$$\nu_{\gamma\gamma 1}(x, y, l) = 2\int_0^\infty b_{\gamma\gamma}(x, s, l)\,\tilde{p}_1(s)\sin(ys)\,ds/\pi,$$

$$\nu_{\gamma\delta 1}(x, y, l) = 2\int_0^\infty b_{\gamma\delta}(x, s, l)\,\tilde{p}_1(s)\cos(ys)\,ds/\pi,$$

$$\mu_{x1}(x, y, l) = 2\int_0^\infty b_1(x, s, l)\,\tilde{p}_1(s)\cos(ys)\,ds/\pi,$$

$$\mu_{y1}(x, y, l) = 2\int_0^\infty b_2(x, s, l)\,\tilde{p}_2(s)\sin(ys)\,ds/\pi,$$

$$\omega_1(x, y, l) = 2\int_0^\infty b(x, s, l)\,\tilde{p}_1(s)\cos(y,s)\,ds/\pi\,;$$

în S_2

$$\nu_{\gamma\gamma 2}(x, y, l) = 2\int_0^\infty b_{\gamma\gamma}(y, s, l)\,\tilde{p}_2(s)\sin(x, s)\,ds/\pi,$$

$$\nu_{\gamma\delta 2}(x, y, l) = 2\int_0^\infty b_{\delta\gamma}(y, s, l)\,\tilde{p}_2(s)\cos(x, s)\,ds/\pi,$$

$$\mu_{x2}(x, y, l) = -2\int_0^\infty b_2(y, s, l)\,\tilde{p}_2(s)\sin(xs)\,ds/\pi, \tag{1}$$

$$\mu_{y2}(x, y, l) = -2\int_0^\infty b_1(y, s, l)\,\tilde{p}_2(s)\cos(x, s)\,ds/\pi$$

$$\omega_2(x, y, l) = -2\int_0^\infty b(y, s, l)\,\tilde{p}_2(s)\cos(xs)\,ds/\pi \qquad (\gamma, \delta = 1, 2)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde, conform ecuațiilor (32), (19) și (24) de la § 120,

$$\widetilde{p}_\gamma(s) = \int_0^\infty p_\gamma(x) \cos(sx)\, ds, \qquad (0 \leqslant s < \infty, \gamma = 1/2),$$

$$b_{11}(x, s, l) = \{xs \exp(-xs) + 4(1-\nu) l^2 s^2 (\exp(-\alpha x/l) - \exp(-xs))\} \alpha/\beta,$$

$$b_{22}(x, s, l) = \{(2-xs) \exp(-xs) - 4(1-\nu) l^2 s^2 (\exp(-\alpha x/l) - \exp(-xs))\} \alpha/\beta,$$

$$b_{12}(x, s, l) = \{\alpha(1-xs) - 4(1-\nu) l^2 s^2 (ls \exp(-\alpha x/l) - \alpha \exp(-xs))\}/\beta,$$

$$b_{21}(x, s, l) = \{(1-xs) \exp(-xs) - 4(1-\nu) ls (\alpha \exp(-\alpha x/l) - ls \exp(-xs))\} \alpha/\beta,$$

$$b_1(x, s, l) = 4(1-\nu) l^2 s [\exp(-\alpha x/l) - \exp(-xs)]\, \alpha/\beta,$$

$$b_2(x, s, l) = 4(1-\nu) l^2 s [ls \exp(-\alpha x/l) - \alpha \exp(-xs)]/\beta, \qquad (2)$$

$$b(x, s, l) = -(1-\nu) [ls \exp(-\alpha x/l) - \alpha \exp(-xs)]/\mu\beta,$$

$$\alpha = \alpha(ls) = \sqrt{1 + l^2 s^2},$$

$$\beta = \beta(ls) = \alpha(ls) + 4(1-\nu) l^2 s^2 (\alpha(ls) - ls), \quad (\gamma \neq \delta).$$

Funcțiile $\overline{p}_\gamma$ se vor alege astfel ca să fie satisfăcute condițiile la limită (10) de la § 125. Pentru aceasta, vom considera funcțiile sumă

$$F = F^1 + F^2, \quad \nu_{\alpha\beta} = \nu^1_{\alpha\beta} + \nu^2_{\alpha\beta}, \quad \mu_\alpha = \mu^1_\alpha + \mu^2_\alpha, \quad \omega = \omega^1 + \omega^2 \qquad (3)$$

definite în S, funcții care satisfac condițiile diferențiale și de regularitate la infinit formulate mai înainte (1) de la § 124 și (7) de la § 125, valabile pentru orice funcții p_α. Condițiile la limită (10) de la § 125 vor fi și ele satisfăcute dacă funcțiile p_α conform condițiilor în S^1, S^2, pentru ansamblul funcțiilor parțiale (10) de la § 125, verifică ecuațiile

$$p_1(x, l) + 2\int_0^\infty b_{21}(x, s, l)\, \widetilde{p}_2(s, l)\, ds/\pi = p(x), \quad (0 \leqslant x < \infty),$$

$$2\int_0^\infty b_{21}(x, s, l)\, \widetilde{p}_1(s, l)\, ds/\pi + p_2(x, l) = 0, \quad (0 \leqslant x < \infty). \qquad (4)$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd transformata Fourier (vezi formula pentru $(2)_1$) termenilor din ultima ecuație și inversînd ordinea de integrare obținem

$$\tilde{p}_2(u, l) = -\int_0^\infty L(u, t, l)\, \tilde{p}_1(t, l)\, dt, \tag{5}$$

unde

$$L(u, t, l) = 2\int_0^\infty \cos(ux)\, b_{21}(x, t, l)\, dx/\pi. \tag{6}$$

Vom substitui $\tilde{p}_2$ dată de (5) în prima ecuație din grupul anterior (4). Apoi aplicăm transformata Fourier, inversăm ordinea de integrare și deducem

$$\tilde{p}_1(u, l) = \int_0^\infty K(u, t, l)\, \tilde{p}_1(t, l)\, dt = \tilde{p}(u), \quad (0 \leqslant u < \infty), \tag{7}$$

unde

$$K(u, t, l) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty ds \int_0^\infty \cos(ux)\, b_{21}(x, s, l)\, dx. \qquad \int_0^\infty \cos(sy)\, b_{21}(y, t, l) dy. \tag{8}$$

În acest mod rezolvînd ecuația obținută în $\tilde{p}_1$ și determinînd $\tilde{p}_2$ din cea anterioară (5), putem evalua funcțiile F, G, ω din (1) — (3). Ecuația în $\tilde{p}_1$ se transformă într-o ecuație standard Fredholm de speța 2, dar se poate utiliza și ecuația deja obținută*) (7).

Expresiile (2) ne arată că acestea sînt funcții continui mărginite pentru orice variabile (x, s) în intervalul $[0, \infty)$, $[0, \infty)$ și pentru $l > 0$. Așadar deoarece funcțiile $\tilde{p}_\alpha$, $(\alpha = 1, 2)$ determinate de ecuațiile (5), (7) sînt absolut integrabile **) în $[0, \infty]$, integralele care furnizează expresiile tensorilor și rotației în S^1, S^2 (1) definesc funcții continui în aceleași intervale. Se poate deduce din (1)—(8) cu ajutorul formulei de inversiune a transformatei Fourier că, pentru $r \to 0$, $l > 0$:

$$\begin{gathered} \nu_{\gamma\delta}(x, y, l) = 0(1), \quad (\neq \nu_{12}), \quad \nu_{12}(x, y, l) = p(0) + 0(1), \\ \mu_\alpha(x, y, l) = 0(1), \quad \omega(x, y, l) = 0(1). \end{gathered} \tag{9}$$

În baza acestor rezultate și a formulelor(6) din § 125, se constată că spre deosebire de teoria clasică, nu mai apar singularități.

*) Autorii menționați au demonstrat existența și unicitatea soluției problemei la limită asociată ecuației integrale (7), pe baza căreia se efectuează studiul asimptotic al soluțiilor dat în continuare.

**) Conform studiului menționat în nota precedentă.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

Aero, E. L., Kuvshinski, E. V., [1] *Ecuațiile de bază ale teoriei elasticității mediilor cu particule în rotație care interacționează.* Fizika Tverdovo Tela, **2**, *7*, 1399—1409 (1960). [2] *Teoria continuală a elasticității asimetrice.* Fizika Tverdovo Tela, **5**, *9* (1963).

Abramian, B. I., Alexandrov, I. Ia., [1] *Problema axial-simetrică a elasticității.* Mehanika Tverdovo Tela, Lucrările sesiunii unionale de mecanică teoretică, Nauka, Moscova, 7—38 (1966).

Albias, J. B., Kuipers, M., [1] *Moment-stresses in fluids with a dipolar structure.* Arch. Mech. Stos., **20**, *6*, 623—635 (1968).

Almansi, E., [1] *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$. Ann. Mat. Pura Appl., ser. 3, 21—51 (1899).

Anikin, E. P., [1] *Concentrația tensiunilor în plăci cu gol dreptunghiular.* Trudî Dalnevastocinii politehn. inst., **45**, 63—81 (1956).

Ariman, T., [1] *Micropolar and dipolar fluids.* Int. J. Eng. Sci., **6**, *1*, 1—9 (1968).

Arutiunian, N. H., Abramian, B. L., [1] *Torsiunea corpurilor elastice*, Fizmatghiz, Moscova, 1963.

Avetisian, A. S., [1] *Studiul concentrației tensiunilor în planul infinit slăbit de un gol în formă de romb.* Ucen. Zapis. Erevan Ped. Inst., **2**, 105—119 (1963).

Babici, D. V., [1] *Asupra influenței tensiunilor asupra frecvenței vibrațiilor proprii ale plăcilor cilindrice.* Priklad. Meh., **3**, *4*, 39—45 (1967).

Babuşka, I., Pektorys, K., Vycichlo, [1] *Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme.* Akademie Verlag, Berlin, 1960.

Bartels, R.C.F., [1] *Torsion of Hollow Cylinders.* Trans. Amer. Math. Soc., **53**, *1*, 1—13 (1943).

Barton Cliff Smith, [1] *A method for determining the stress distribution in a plate due to uniform pressure applied on the boundary of a square hole.* Proc. 2-nd, U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. Ann. Arbor. Mich. 1954, New York, 283—289 (1955).

Baumgarte, I., *Verallgemeinerte Nicht-Lokalität bei elastischen Kontinua mit Mikrostruktur in 3n Dimensionen.* ZAMP, **21**, *2*, 224—232 (1970).

Beltrami, E., [1] *Sulle equazioni generali dell'elasticità.* Ann. Mat., **10**, *2*, 188—211 (1881).

Bernstein, S. W., [1] *Despre convergența absolută a seriilor trigonometrice.* Com. Sem. Soc. Harkov, ser. 2, **14**, *3*, 139—144 (1914); **14**, *3*, 200—201 (1915).

Bers, L., [1] *Theory of pseudo-analytic functions.* New York, 1953.

Bert, C, W., Appl., F. J., [1] *General solution for two-dimensional couple stress elasticity.* AIAA. J., **6**, *5*, 968—969, (Techn. Notes) (1968).

Betz, A., [1] *Konforme Abbildung.* Berlin-Göttingen, Heidelberg, 1948.

Bilby, A., [1] *Geometry and Continuum Mechanics.* Proc. IUTAM-Symp. on Mechanics of Generalized Continua, Springer, 180—200 (1968).

Scanned with OKEN Scanner

Biot, M. A., [1] *Rheologic stability with couple-stresses and its applications to geological folding.* Proc. Roy. Soc. London, ser. (a), Mat. and Phys. Sci., **298**, 1455, 402—423 (1967).

Boggio, T., [1] *Sull'equilibrio di membrane elastiche piane.* Atti del Ist. Veneto, **61**, *2*, 619—636 (1901/2).

[2] *Integrazione dell'equazione* $\Delta^{2n} = 0$ *in un'area ellitica.* Atti del. R. Ist. Veneto, **60**, *2*, 501—509 (1901).

Boggy, D. B., Sternberg, E., [1] *The effect of couple-stresses on singularities due to discontinous loadings.* Int. J. Solids Struct., **3**, 757 (1967).

[2] *The effect of couple-stresses on the corner-singularities due to an asymetric shear loading.* Int. J. Solids Struct., 159—174 (1968).

Boiarskii, B. V., [1] *Reprezentarea generală a soluției sistemului eliptic de 2 ecuații în plan.* DAN, SSSR, **122**, *4*, 543—546 (1958).

[2] *Analiza rezolubilității problemei la limită a teoriei funcțiilor.* Issled. po sovrem. teor. funct. peremen., Moscova, (1961).

Boim, A., [1] *Asupra concentrației tensiunilor în placa întinsă infinită cu un gol de formă trapezoidală.* Naucinîi Zapis, Lwov. Politehn. Inst., **29**, *3*, 121—125 (1955).

Born, M., [1] *Atom Theory des festen Zustandes*, Fortschritte der math. Wissenschaften, Leipzig, Berlin, 1923.

Born, M., Huang, K., [1] *Dynamical Theory of Crystal Lattices.* Oyford, 1954.

Bowen, R. M., [1] *Toward a Thermodynamics and Mechanics of Mixtures.* Archiv. Rat. Mech. Anal., **27**, *5*, 370—403 (1967).

Brinkman, J. A., [1] *A Modernization of Mac Cullagh's Ether Theory.* Proc. Iutam Symp. on Mechanics of Generalized Continua, Sptinger, 344—347 (1968).

Bromwich, T. J. I., [1] *An Introduction to the Theory of Infinite Series.* 2nd edit. Macmillan, 1926.

Bulîghin, A. N., Kuvshinski, E. V., [1] *Deformația plană în teoria asimetrică a elasticității.* PMM, **31**, *3*, 534—547 (1967).

Carleman, T., [1] *Sur les systèmes linéaires aux derivées partielles de premier ordre à deux variables.* C.R. Acad. Sci. Paris, **197**, 471—474 (1933).

Carlson, D. E., [1] *Stress-functions for couple- and dipolar stresses.* Quart. Appl. Math., **24**, 29—35 (1966).

[2] *Stress-function for plane problems with couple-stresses.* ZAMP, **17**, *6*, 789—792 (1966).

[3] *The general solution of the stress equations of equilibrium for a Cosserat continuum.* Proc. Fifth. U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 24 (1966).

[4] *On Günther's stress functions for couple-stresses.* Quart. of Appl. Math., **25**, *2*, 139—146 (1967).

Cauchy, A., [1] *Mémoire sur les intégrales definies*, în *Applications de mathématiques*, (1826)—(1829).

[2] *Mémoire.* Exercises de mathématique, **3**, 328—355 (1828).

Ciaplighin, S. A., [1] *Opere complete*, vol. 3, Moscova—Leningrad, 1950.

Clebsch, A., [1] *Theorie der Elastizität fester Körper.* Leipzig, 1862).

Cohen, H., [1] *Dislocations in couple-stress elasticity.* J. Math. Phys., **45**, 35—44 (1966).

Cosserat, R. et F., [1] *Théorie des corps déformables.* Hermann, Paris, 1906.

[2] *Sur la statique de la ligne déformable.* C.R. Acad. Sci. Paris, **145**, 1409—1412 (1907).

Scanned with OKEN Scanner

[3] *Sur la statique de la surface déformable et la dynamique de la ligne déformable.* C.R. Acad. Sci. Paris, **146**, 68—71 (1908).
[4] *Sur la théorie des corps minces.* C. R. Acad. Sci. Paris, **146**, 169—172 (1908).
[5] *Théorie des corps déformables.* Paris, în O. D. Chwolson, Traité de Physique 2 edit., **2**, 953—1173 (1909).

CROCHET, M. J., *Compatibility Equations for a Cosserat Surface.* J. de Méc., **6**, *4*, 593—600 (1967).

CZUDEK, H., [1] *Niektore zagadnenia wytrzymalosci tarczy nieograncizonej z osrodkiem szlywnym.* Rozprawy inzynierskie, **CLXXII**, *8*, 3 (1960). deWit, R., [1] *Differential Geometry of a Nonlinear Continuum Theory of Dislocations.* Proc. IUTAM Symp. on Mechanics of Generalized Continua, Springer, 251—262 (1968).

DIKMEN, M., [1] *Note on the State and Stability of Polar Hyperelastic Materials.* Proc. IUTAM-Symp. on Generalized Mechanics of Continua, Springer, 87—90 (1968).

DOETSCH, G., [1] *Handbuch der Laplace-Transformation.* Birkhäuser-Verlag 1955.
[2] *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace Transformation.* Birkhäuserverlag, Basel 1958.

DOYLE, T. C., ERICKSEN, J. L., [1] *Nonlinear Elasticity.* Advances in Appl. Mech., *4*, 53—115 (1956).

DOYLE, J. M., [1] *A displacement potential representation.* Quart. Appl. Math., **24**, *3*, 265—269 (1966).

DU-ȚÎH-HUA, [1] *Problema plană a teoriei elasticității mediilor neomogene izotrope.* Izd. Akad. Nauk, Moscova, 1961.

DUHEM, P., [1] *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique.* Ann. Ecole Norm., **10**, *3*, 476—504 (1893).

EIMER, C., [1] *Stresses in multiphase media.* Archiv. Mech. Stos., *19* (1967).
[2] *Problema la limită a teoriei elasticității pentru medii multifazice.* Archiv. Mech. Stos., **15**, *12*, 705—709 (1967).
[3] *Asupra tensiunilor în medii multifazice.* Bull. Acad. Pol. Sci., 427—431 (1967).

ERICKSEN, J. L., TRUESDELL, C., [1] *Exact Theory of Stress and Strain in Rods and Shells,* Archiv. Rat. Mech. Anal., **1**, *1*, 295—323 (1958).

ERINGEN, A. C., [1] *Nonlinear Theory of Continous Media,* Mc Graw Hill, N.Y., 1962.
[2] *Linear Theory of Micropolar Elasticity.* J. Math. Mech., **15**, *6*, 904—926 (1966).
[3] *Linear Theory of Micropolar Elasticity.* Int. J. Eng. Sci., **5**, *2*, 191—204 (1967).
[4] *Theory of Micropolar Plates.* J. Appl. Math. Phys., ZAMP, **18**, *1*, 12—30 (1967).
[5] *Linear Theory of Micropolar Viscoelasticity.* Int. J. Eng. Sci., **5**, 191—204 (1967).
[6] *Mechanics of Micromorphic Continua.* Proc. IUTAM Symp. on Mechanics of Generalized Continua, Springer, 18—36 (1968).
[7] *Mechanics of Micromorphic Elasticity.* În Fracture, vol. 3, Academic Press, 1968.

ERINGEN, A. C., INGRAM, J. D., [1] *A Continuum Theory of Chemically Reacting Media,* I. Int. J. Eng. Sci., **3**, *2*, 197—213 (1965).

Scanned with OKEN Scanner

[7] *The Mechanics of Structural Media with Independent Coupling Motions.* Rev. Roum. Sci. Techn. Ser. Mec. Appl., **12**, *3* (1967).
[8] *The Coupled Mechanical Model. Hypo and Hyperdeformable Bodies.* Rev. Roum. Sci. Techn. Ser. Mec. Appl., **12**, *1*, 177—199 (1967).
[9] *Mecanica mediilor deformabile.* Edit. Academiei, Bucureşti, 1967.
[10] *The Generalized Dual Continuum in Elasticity and Dislocation Theory.* Proc. IUTAM-Symp. on the Mechanics of Generalized Continua. Springer, 141—152 (1968).
[11] *A Theory of Thin Elastic Shells with Local Structural Effects.* Proc. IUTAM-Symp. on the Theory of Shells, Copenhagen, Springer, 56—60 (1968).
[12] *Interpolation Principles of Dynamics and Dual Continuum Theory of Material Systems.* Rev. Roum. Sci. Techn. Ser. Mec. Appl., **13**, *3*, 511—521 (1968).
[13] *Derivation of a Continuum Theory of Dislocations on the Basis of an Estimative Analysis of Crystal Lattices.* Int. Conf. on Theory of Dislocations, NBS, Washington, 20—25 April 1969.
[14] *The Method of Continuum Spectral Models in the Theory of Elasticity.* Rev. Roum. Sci. Techn., Ser. Mec. Appl., **15**, *5*, 1029—1042 (1970).
[15] *Generalized Theory of Thermoelasticity Associated to Boundary Value Problems of Classical Fields.* W. Novacki Anniversary volume, Noordhof-Groningen, 1970.
[16] *Tensional Elasticity.* Rev. Roum. Sci. Techn. Ser. Mec. Appl. **15**, *6* (1970).
[17] *Rheomobility and Structural Creep.* Second IUTAM-Symp. on Creep, Göteborg, 1970.

MIŞICU, M., TEODOSIU, Cr., [1] *Asupra problemei axial-simetrice şi a problemei plane a teoriei elasticităţii pentru corpuri izotrope neomogene.* Com. Acad. R.P.R., **12**, *8*, 921—927 (1962).
[2] *Soluţia cu ajutorul teoriei funcţiilor de variabilă complexă a problemei plane statice a teoriei elasticităţii pentru corpuri izotrope neomogene.* PMM, 378—386 (1966).

MUKI, R., STERNBERG, E., [1] *The Influence of Couple-stresses on Singular Stress Concentrations in Elastic Solids.* ZAMP, **16**, *5*, 611—649 (1966).

MURA, T., [1] *Continuum Theory of Dislocations and Plasticity.*. IUTAM-Symp. on Mechanics of Generalized Continua, Springer, 1968.

MUŞHELISVILI, N. I., [1] *Sur l'équilibre des corps élastiques soumis à l'action de la chaleur.* Izv. Tifliscovo Inst., *3*, (1915).
[2] *Despre tensiunile termice în problema plană din teoria elasticităţii.* Electrotehn. Inst., 1223—1227 (1916).
[3] *Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la Physique Mathématique.* Tiflis, édit. de l'Univ. (1922).
[4] *Unele probleme fundamentale ale teoriei matematice a elasticităţii.* Izdat. Akad. Nauk. S.S.S.R., 1954.

NAGHDI, P. M., [1] *A Static-geometric Analogy in the Theory of Couple-stresses.* Proc. Ned. Akad. Wet. (B), **68**, *1*, 29—32 (1965).

NEMÎŞ, Iu. N., [1] *Problema plană a teoriei elasticităţii cu cuple de tensiuni pentru domenii cu gaură circulară.* Priklad, Meh., **1**, *5*, 52—59 (1965).
[2] *Solicitarea în mediul elastic cu gol circular şi cu cuple de tensiune.* Priklad. Meh., **2**, *7*, 43—50 (1966).

Scanned with OKEN Scanner

[3] *Concentrația tensiunilor din jurul golului curbiliniu în teoria asimetrică a elasticității.* Priklad. Meh., **2**, *4*, 85—96 (1966).

NEMÎȘ, Iu. M., TRETIAK, V. P., [1] *Încovoierea unei console slăbite de un gol circular considerînd cuplele de tensiune.* Priklad. Meh., **3**, *4*, 131—134 (1967).

NEUBER, H., [1] *Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel.* Z.A.M.M., **14**, 203—212 (1934).

[2] *Die Grundgleichungen der elastischen Stabilität in allgemeinen Koordinaten und ihre Integration.* Z.A.M.M., **23**, 321—330 (1943).

[3] *Kerbspannungslehre, Grundlagen für genauere Festigkeitsberechnung von Konstruktionsform und Werkstoff.* Springer, 1 Aufl., 1937, 2 Aufl., 1958.

[4] *Über die allgemeine Lösung linear elastischer Probleme in isotropen und anisotropen Cosserat-Kontinua.* 11 Int. Congr. Appl. Mech., Münich. 1964.

[5] *Über Probleme der Spannungskonzentration in Cosserat-Körper.* Acta Mech. **2**, 48—69 (1966).

[6] *Das statistische und kinetische Torsionsproblem für den Cosserat-Kreiszylinder.* Z.A.M.M., (1966).

[7] *Die schubbeanschpruchte Kerbe im Cosserat Körper.* Z.A.M.M., **47**, *5*, 313—318 (1967).

[8] *On the Effect of Stress Concentrations in Cosserat Continua.* Proc. IUTAM-Symp. on Mechanics of Generalized Continua, Springer, 109—114 (1968).

NOLI, W., [1] *Inhomogeneities in Materially Uniform Simple Bodies.* Proc. IUTAM-Symp. on Mechanics of Generalized Continua, Springer, 239—247 (1968).

NOWACKI, W., [1] *Green Functions for Micropolar Elasticity.* Bull. Ac. Pol. Sci. Ser. Sci.Techn., **16**, *11—12*, 555—565 (1958).

[2] *Green Functions for Micropolar Thermoelasticity.* Bul. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Techn., **16**, *11—12*, 919—929 (1968).

OSGOOD, W. F., [1] *Lehrbuch der Funktionentheorie.* 1. Leipzig, 1912.

PALMOV, V. A., [1] *Ecuațiile fundamentale ale teoriei asimetrice a elasticității.* P.M.M., **28**, 401—409 (1964).

[2] *Problema plană a elasticității asimetrice.* P.M.M., **28**, *6*, 117—121 (1964).

PAPCOVICI, P. F., [1] *Solution générale des équations différentielles fondamentales d'élasticité exprimée par trois fonctions harmoniques.* C.R. Acad. Sci., Paris, **195**, 513—515 (1932).

PLEMELJ, I., [1] *Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integralendarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend.* Monasthefte für Math. Phys., **19**, 205—210 (1908).

POCHI, GIANCARLO, [1] *Trasformazioni termomeccaniche dei continui tridimensionali.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2), **23**, 205—222 (1969).

POISSON, S. D., *Mémorie sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques.* Mém. Ac. Sci., **8**, *2*, 537—570 (1829).

POLOJII, G. N., [1] *Despre funcțiile p-analitice de variabilă complexă și unele aplicații.* Issl. po sovr. probl. teor. func. complex. peremenovo, Moscova, 1960.

PÖSCHL, T., [1] *Über eine partikulare Lösung des biharmonischen Problems für den Aussenraum der Ellipse.* Zeitschr., **11**, 89—96 (1921).

RADOK, J. R., [1] *Asupra teoriei liniare a viscoelasticității, Probleme ale mecanicii mediilor continui.* Izdat Akademii Nauk, S.S.S.R., Moscova, 1961.

Scanned with OKEN Scanner

THEORY OF ELASTIC MOBILITY OF SOLIDS (THE TRANSVERSE AND MEDIAN PROBLEM OF PLATES)

(Abstract)

The book includes theoretical foundations as well as applications leading to practical formulas, numerical values and variation curves useful for the determination of stress fields in different types of bodies.

These elements are more comprehensive than the usual results available in literature, as may be seen from the table of contents.

I. The fundamental laws which are established in the first chapter examine up to the last consequences, in an exhaustive manner, the definition of stress. Then follows a coherent extension of Hooke's laws and Cauchy's laws of equilbrium : the stresses do not depend only on the strain components being also possible to consider a dependence on the vectors of rotation and displacement. Meanwhile, the divergence of the stress tensor (or the body forces) can be dependent on the same vectors. Some equivalences worked out with real structures emphasize the physical significance of these dependences in the frame of a verifiable accuracy. These structures are i) continuous bodies with regularly distributed inclusions and frames with nodal masses, ii) plates on slender piles, and iii) usual bodies in an isotropic electrostatic field.

II. The applications are based on solving procedures resorting to complex variable functions and conformal mappings, exposed in the second chapter. Together with a suitable utilization based on other tools of analysis, such as Bessel-Fourier series, integral transformations and integral equations, introduced in the subsequent chapters, the solving procedures lead in an elegant way to results of more diversified practical interest than usually considered and in the frame of a more accurate formulation of boundary value problems.

III. The transversal boundary value problem newly formulated, the solving methods and the solutions obtained in Chapter III concern the plates with a transversal field of shear. According to the analysis of errors, this field occurs in plates with lateral plate elements or armatures. Problems for plates acted on the marginal boundary by shear forces or on the lateral sides by transversal forces are solved. The concentration effects around holes are determined for different shapes of the external boundary of the plate or of the holes.

Scanned with OKEN Scanner

IV. The analysis of plates acted by forces in the median plate or in transversal sense on the lateral surfaces, symmetrically with respect to the median plane is developed in Chapter IV in connection with the formulation of the median problem. Among the most important solutions, those exposed concern the stress concentration around circular and elliptical holes and the median dislocations. The results extend the plane problem of classical elasticity.

V. The analysis of non-homogeneous bodies with a regular internal structure (granular, lamellar or fibrous) is performed in Chapter V by means of a quasi-periodic decomposition of different physical quantities. The resulting system of equations constitutes an extension of different mechanical models proposed in literature and differs from these ones by the realistic and rigorous way of derivation. More particular cases are deduced and compared with other technical structures, such as for instance the spatial regular framework (the reticular or lattice body). The general theory of some spectral models is developed and specified in the case of the median problem. The solutions obtained concern the plates with holes, the cantilever, the half-plane and the quarter-plane.

On the basis of the examples given one may consider different structures of practical interest.

Scanned with OKEN Scanner

Contents

Page

Introduction 5

Part I.

Tensional elasticity

Chapter I. **General theory of elasticity of continuous media with internal interactions of stress type** . . . . .

A. **The kinematic and dynamic fields of the tensional model** 18

§1. Reference frames 18, § 2. Distortions 20, § 3. Kinematic conditions of compatibility 25, § 4. Stresses and body forces 26

B. **General equations** 28

§ 5. The mechanical model of the continuum media with internal interactions of stress type (the tensional model) 28, § 6. The principle of conservation of energy 29, § 7. The principle of conservation of entropy 32, § 8. The Fourier law of thermal conductivity 33, § 9. Mobility equations 33, § 10. Differential equations 37, § 11. Equations of tensional elasticity with polar type mobility 38, § 12. Approximation of short wave of coupling length. Equivalence with electrostatically loaded bodies 42, § 13. Latice with concentrated masses at knots and the effect of inertial polarization 45, § 14. The plate on elastic piles and the effect of polar coupling 48, § 15. The compatibility conditions of stresses 50

Chapter II. **Properties of complex variable functions and conformal mapping intervening in the solving procedures of boundary problems of the theory of tensional elasticity with polar type mobility** 53

§ 16. Domains of determination of the representation functions 53
§ 17. General properties of conformal mapping 56, § 18. Conformal

Scanned with OKEN Scanner

Page

mapping on a circular curve and curvilinear coordinates 59, § 19. Functions of conformal mapping on the circle with unit radius for the analysis of stress concentrations around holes 61, § 20. Complex Fourier series 21, § 21. Some properties of the integral of Cauchy type 70, § 22. Some elements concerning the utilization of generalized analytic functions 74

Chapter III. The transversal problem 77

A. Formulation of the transversal problem 77

§ 23. Fundamental equations of the transversal problem 77, § 24. Physical significance of the transversal problem 86, . 25. Lateral constraints 92, § 26. Complex representation of the solutions 93, § 27. Determination of the representation fonctions 95, § 28. Utilization of conformal mapping 96, § 29. Utilization of conformal mapping and power series 97, § 30. Complex formulation of the boundary conditions 99

B. Solving examples of the transversal problem 100

§ 31. One-dimensional shear field 100, § 32. Shear in a circular plate 100, § 33. Elliptical plate 104, § 34. Plate with an equilateral triangular boundary 106, § 35. Rectangular plate 109, § 36. Circular annular plate 115, § 37. Plate bounded by an epitrochoidal curve 119, § 38. Plate bounded by the Booth lemniscate 121

C. Concentrations of stresses around holes 122

§ 39. Analysis of solutions in the case of multi-connected domains 122, § 40. Cylindrical field of shear 125, § 41. Two-directional field of shear 130, § 42. Rectangular plate with a hole 134, § 43. Triangular plate with an inner hole 138, §. 44. Plate with a circular hole stiffened by means of a rib 142, § 45. The transversal non-homogeneous problem 151

Chapter IV. The median problem 153

A. General formulations of the median problem 154

§ 46. The fundamental equations of the median problem 154, § 47. Physical meaning of median problem 155, § 48. Boundary conditions of the median problem 158, § 49. The tensional elasticity field around a point 159, § 50. Stress functions 163, § 51. Representation of the solutions of the

Scanned with OKEN Scanner

Page

median problem by means of complex variable functions 164, § 52. Complex representations for stresses 165, § 53. The principal vector and momentum 168, § 54. The determination of the representation functions in the case of simply connected domains 170, § 55. Representation formulas in the case of multi-connected domains 172, § 56. Representation formulas in an infinite domain 176, § 57. Representations in orhogonal coordinates 179, § 58. Representations in the case of polar coordinates 181, § 59. The transformation of the representations of the median problem 182, § 60. Boundary conditions in the transformed domain 184, § 61. Multiform distortion and dislocation 185

B. Solutions of the median problem obtained by means of complex representations 188

§ 62. Solution of the first fundamental problem for the circle 188, § 63. Solution of the second fundamental problem for the circle 191, § 64. Solution of the first fundamental problem for the infinite plate with a circular hole 192, § 65. One-directional median extension of a plate with circular hole 195, § 66. Plate with a circular hole undergoing a transversal extension 198, § 67. Plate with a circular hole undergoing two-directional median extension 199, § 68. Plate with uniform normal pressure on the boundary of a inner circular hole 199, § 69. Plate with a circular hole acted on the boundary a force 200, § 70. Concentrated couple 202, § 71. Concentrated force (in the main) 203, § 72. The infinite plate with an inclusion from a different material 207, § 73. The stretched plate with a freely introduced or constrained inclusion 208, § 74. Extension of the plate with elastic inclusion 211, § 75. The first fundamental problem for the circular annulus 215, § 76. Various loading cases of the circular annulus 220, a) Annulus undergoing pressure 220, b) Dislocation. Multiform displacements of the circular annulus 221, § 77. Bending of the circular plate 226

C. Thermal stresses 228

§ 78. Equations of the theory of tensional elasticity 228, § 79. Thermal stresses in the circular annulus 231

D. Solutions obtained by means of conformal mapping 233

§ 80. General solutions 233, § 81. The first fundamental problem for the ellipse 240, § 82. Reduction of the median problem to functional equations 245, § 83. Solutions of the first fundamental problem for the infinite plane with elliptic hole 252, § 84. Extension of a plate with elliptical hole 257, § 85. The Plate acted on the boundary of an inner elliptical hole by a hydrostatic pressure 264, § 86. Plate acted on the boundary

Scanned with OKEN Scanner

Page

of an inner elliptical hole by uniform tangential stresses 266, § 87. Plate partially acted on the boundary of an inner elliptical hole by a uniform pressure 267, § 88. One-directional median extension of a plate with a hole of arbitrary shape 268, § 89. Median extension of a plate with a quadratic hole 269, 90. § Transversal extension of a plate with a quadratic hole 275, § 91. Median extension of a plate with a triangular hole 276, § 92. Transversal extension of a plate with a triangular hole 279, § 93. Two-directional median extension of a plate with a curvilinear hole 280, § 94. Shear in a plate with a hole 283

E. Solutions in the median dynamic problem 285

§ 95. Equations and fundamental representations 285, § 96. Moving perturbations 289, § 97. Impulsive pressure applied in a moving point on the surface of a half-plane 291, § 98. Moving dislocations 292

Part II

Polar elasticity

Chapter V. Structural non-homogeneous media in the frame of generalized theory of elastic mobility (spectral elasticity) 297

A. Reduction of the equations of the structural non-homogeneous media to the theory of spectral models 297

§ 99. Quasi-periodic elastic field 297, § 100. Compatibility conditions of the kinematic spectral components 300, § 101. Mobility conditions for dynamic spectral components 302, § 102. Parametric analysis of spectral models 305, § 103. Conditions and boundary problems for the spectral model of non-homogeneous type 311, § 104. Equivalence of the spectral model (with quasi-periodic non-homogeneity) with some real structures 311, § 105. Equivalence of reticular structures with the spectral model endowe with retrained polarity effects 314

B. Formulation of the median problem of the spectral model 322

§ 106. Median problem of the spectral polar model 322, §107. Compatibility conditions for the spectral model 323, § 108. Potential representations in the frame of the median (plane) problem of the spectral polar model 324, § 109. Complex formulation of displacements and rotations for the spectral polar model 326, § 110. Complex formulation of stresses

Scanned with OKEN Scanner

Page

and couple stresses for the spectral polar model 328, § 111. Correlation of the representation and stress functions 331

C. **Analysis of stresses around holes in plates with structural non-homogeneity** 334

§ 112. Plane plate with circular hole 334, § 113. Particular solutions for the plane with circular hole 338, § 114. Bending of the cantilever beam with circular hole 342 § 115. Circular hole stiffened by means of concentric rings 346

D. **Solutions obtained by means of conformal mapping** 352

§ 116. Application of the method of conformal mapping to the Helmholtz equation in the polar theory of elasticity 352, § 117. Stress and couple-stress concentrations around holes with elliptic boundary 361

E. **Solutions obtained by means of stress and couple-stress functions** 365

§ 118. Cylindrical inclusions in an one-dimensional stress field 365, § 119. Cylindrical inclusion in a traction and shear field 369

F. **The elastic half-plane under the action of normal or tangential loads** . . . 379

§ 120. Fourier transforms of the fundamental equations 379, § 121. Methods of determination of stresses and couple-stresses 386, § 122. Tangential load discontinously distributed 390, § 123. Plane punch applied on the elastic half-plane 393

G. **The elastic quarter of plane** 400

§ 124. Application of the Mellin transform 400, 125. Asymptotic values associated to boundary problems 403, § 126. Determination of stresses and couple stresses 406 406

Scanned with OKEN Scanner

Redactor PETRE MOCANU
Tehnoredactor ELENA PREDA

Bun de tipar 29.12.1971. Hîrtie scris I A. Format 16/70 × 100 de 80 G/m². Coli de tipar 26.75. C.Z. pentru biblioteci mari { *539.312:624.073.* / *539.374*
C.Z. pentru biblioteci mici 539.3

Întreprinderea poligrafică Informația, București,
str. Brezoianu nr. 23—25
Republica Socialistă România

TEORIA MOBILITĂȚII ELASTICE

în

EDITURA ACADEMIEI
REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

au apărut:

1. I. S. GHEORGHIU și AL. FRANSUA, Tratat de mașini electrice, vol. III, 1971.
2. EDMOND NICOLAU, Sinteza sistemelor radiante, 1971.
3. C. I. PENESCU, Sisteme de protecție de distanță, 1971.
4. DAN PAVELESCU, Concepții noi, calcul și aplicații în frecarea și uzarea solidelor deformabile, 1971.
5. GEORGE ST. ANDONE, Istoria matematicilor aplicate clasice din România (Mecanică și Astronomie), 1971.

Lei 23,50

TEORIA MOBILITĂȚII ELASTICE

Scanned with OKEN Scanner